Τράπεζα Θεμάτων

Επιμέλεια: Συντακτική Ομάδα Έρευνας Τεκμηρίωσης Διδασκαλίας Φυσικής της ΕΕΦ

Γρηγόρης Δρακόπουλος
Αριστείδης Εμμανουηλίδης
Μιχάλης Πετρόπουλος

Θέματα Τράπεζας

Φυσική

Α Λυκείου

Απαντήσεις των θεμάτων

2021

Μεσαιωνική πόλη της Ρόδου

ΘΕΜΑ Β

Β1. Σωστή η απάντηση *(γ)*

Ενδεικτική Αιτιολόγηση

Θεωρούμε επίπεδο αναφοράς της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας το έδαφος και έστω h το ύψος της ταράτσας, συνεπώς για το σημείο της ταράτσας έχουμε:

Δυναμική ενέργεια της Α: $U_A = m \cdot g \cdot h$, κινητική ενέργεια K_A=0

Μηχανική ενέργεια: $E_{MHX,A} = U_A + K_A$ *ή*

$$\boxed{E_{MHX,A,TAP} = m \cdot g \cdot h \quad (1)}$$

Δυναμική ενέργεια της Β: $U_B = 3 \cdot m \cdot g \cdot h,$ κινητική ενέργεια K_B=0

Η Μηχανική ενέργεια της Β: $E_{MHX,B,TAP} = U_B + K_B$ *ή*

$$\boxed{E_{MHX,B,TAP} = 3 \cdot m \cdot g \cdot h \quad (2)}$$

Κατά την κίνηση των δυο σφαιρών ισχύει το θεώρημα Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας.

$$E_{MHX,A,TAP} = E_{MHX,A,E\Delta A\Phi O\Sigma} \quad ή$$

$$E_{MHX,A,E\Delta A\Phi O\Sigma} = m \cdot g \cdot h \;\; και \;\; E_{MHX,A,E\Delta A\Phi O\Sigma} = K_A \quad ή$$

$$K_A = m \cdot g \cdot h \quad (3)$$

Όμοια
$$K_B = 3 \cdot m \cdot g \cdot h \quad (4)$$

(3) και (4) → $\boxed{K_B = 3K_A}$

Β2. Σωστή απάντηση η (β).

Ενδεικτική Αιτιολόγηση

Εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας για τις μετατοπίσεις των κιβωτίων. Έστω $m_A = m_B = m$ και $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x$,

Κιβώτιο Α: $K_{\tau\varepsilon\lambda}$-$K_{\alpha\rho\chi}$= W_{F_A} ή $\frac{1}{2}mv_A^2 - 0 = F\,\Delta x$ ή $\boxed{v_A = \sqrt{\frac{2\,F\,\Delta x}{m}}}$ (1)

Κιβώτιο Β: $K_{\tau\varepsilon\lambda}$-$K_{\alpha\rho\chi}$= W_{F_B} ή $\frac{1}{2}mv_B^2 - 0 = \frac{F}{2}\,\Delta x$ ή $\boxed{v_B = \sqrt{\frac{F\,\Delta x}{m}}}$ (2)

Από (1) και (2) → $v_A = v_B\sqrt{2}$

ΘΕΜΑ Β

Β1. Σωστή η απάντηση *(γ)*

Ενδεικτική Αιτιολόγηση

Το σημείο που αρχικά και τελικά βρίσκεται ο κολυμβητής συμπίπτουν συνεπώς $\Delta x_{ολ}=0$

Β2. Σωστή η απάντηση *(β)*

Ενδεικτική Αιτιολόγηση

Από την εξίσωση της ταχύτητας συμπεραίνουμε ότι: $\alpha = 5\frac{m}{s^2}$ (1)

από τον 2^o ν. του Νεύτωνα και την (1):

$$F = m \cdot 5 \quad \text{(S.I.)}$$

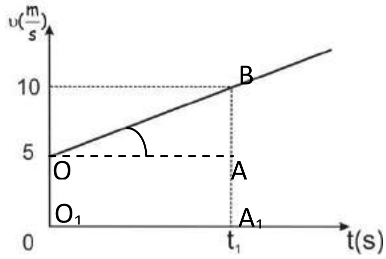
δηλ. F(t)=σταθ δηλ. ευθεία παράλληλη στον άξονα του χρόνου συνεπώς το (Γ) διάγραμμα είναι σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. Σωστή η απάντηση *(α)*

Ενδεικτική Αιτιολόγηση

Από το διάγραμμα ταχύτητας-χρόνου μπορούμε να προσδιορίσουμε την στιγμιαία επιτάχυνση από την κλίση:



$\alpha = \frac{AB}{OA}$

Από το εμβαδόν της επιφάνειας του σχήματος (O_1OBA_1) μπορούμε να υπολογίσουμε την μετατόπιση του κινητού: $\Delta x = x - x_0$. Συνεπώς για να υπολογίσουμε τη θέση x τη χρονική στιγμή t_1 πρέπει να γνωρίζουμε τη θέση x_0 τη χρονική στιγμή t_0

Β2. Σωστή η απάντηση *(β)*

Ενδεικτική Αιτιολόγηση

Επειδή το επίπεδο είναι λείο ισχύει για τη συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στο κιβώτιο ΣF=F. Από τον 2^o ν. του Νεύτωνα ΣF=mα συμπεραίνουμε ότι από:

0s-15s η επιτάχυνση είναι θετική και $\upsilon_0=0$ συνεπώς η κίνηση είναι επιταχυνόμενη, το μέτρο της ταχύτητας αυξάνεται

15s-30s η επιτάχυνση είναι αρνητική, η ταχύτητα είναι θετική συνεπώς η κίνηση γίνεται επιβραδυνόμενη, το μέτρο της ταχύτητας μειώνεται.

Συνεπώς το μέτρο της ταχύτητας γίνεται μέγιστο τη χρονική στιγμή που η δύναμη F αλλάζει πρόσημο/φορά δηλ για t=15s.

ΘΕΜΑ Β

Β1. Σωστή η απάντηση *(β)*

Ενδεικτική Αιτιολόγηση

Κατά τη διαδρομή (Ι) το έργο της δύναμης του βάρους είναι παραγόμενο:

$W_1 = m \cdot g \cdot h \;\; ή \;\; W_1 = 5000 \cdot g \quad (SI) \qquad (1)$

Κατά τη διαδρομή (ΙΙ) η δύναμη του βάρους δεν παράγει έργο διότι είναι κάθετη στη μετατόπιση

$W_2=0$ (2) από (1) και (2) προκύπτει: $W_1>W_2$

Συνεπώς σωστή απάντηση είναι η (β)

Β2. Σωστή η απάντηση *(γ)*

Ενδεικτική Αιτιολόγηση

Η δύναμη της τριβής εξαρτάται από την κάθετη δύναμη που ασκεί η επιφάνεια στο σώμα: Ν

Νόμος της τριβής:

$$T=\mu\cdot N \quad (1)$$

και ο συντελεστής μ είναι ανεξάρτητος από το εμβαδόν της επιφάνειας επαφής και από την ταχύτητα.

Από την ισορροπία των δυνάμεων στον κατακόρυφο άξονα:

$$\Sigma F_y=0 \;\; ή \;\; N-m\cdot g=0 \;\; ή \;\; N=m\cdot g \quad (2)$$

Από (1) και (2) $T=\mu\cdot m\cdot g$, δηλαδή η τριβή είναι ανάλογη της μάζας των επιβατών.

Συνεπώς σωστή απάντηση είναι η (γ)

ΘΕΜΑ Β

Β1. Σωστή η απάντηση *(γ)*

Ενδεικτική Αιτιολόγηση

Από το θεώρημα Μεταβολής Κινητικής Ενέργειας - Έργου για ένα σώμα του οποίου το μέτρο της ταχύτητας μεταβάλλεται από την αρχική τιμή υ_A στη τελική τιμή υ_T έχουμε:

$$W = \frac{1}{2}m\cdot\upsilon_T^2 - \frac{1}{2}m\cdot\upsilon_A^2 \text{ ή } W = \frac{1}{2}m\cdot(\upsilon_T^2 - \upsilon_A^2) \text{ ή } W = \frac{1}{2}m\cdot(\upsilon_T + \upsilon_A)\cdot(\upsilon_T - \upsilon_A) \quad (1)$$

Από την (1) λαμβάνω για τα W_1 και W_2 αντίστοιχα:

$$W_1 = \frac{1}{2}m\cdot\left(30\frac{m}{s}\right)\cdot\left(10\frac{m}{s}\right) \quad (2)$$

$$W_2 = \frac{1}{2}m\cdot\left(50\frac{m}{s}\right)\cdot\left(10\frac{m}{s}\right) \quad (3)$$

Από (2) και (3) $\boxed{W_2 > W_1}$

Συνεπώς σωστή απάντηση η (γ)

Β2. Σωστή η απάντηση *(α)*

Ενδεικτική Αιτιολόγηση

Οι σφαίρες εκτελούν ελεύθερη πτώση, συνεπώς ισχύει για κάθε σφαίρα:

Σφαίρα (1): $h_1 = \frac{1}{2}g\cdot t_1^2 \quad (1)$

Σφαίρα (2): $h_2 = \frac{1}{2}g\cdot t_2^2 \quad (2)$

$$\frac{(1)}{(2)}: \frac{h_1}{h_2} = \left(\frac{t_1}{t_2}\right)^2 \text{ ή } \frac{h_1}{h_2} = \left(\frac{2t_2}{t_2}\right)^2 \text{ ή } \boxed{\frac{h_1}{h_2} = 4}$$

Συνεπώς σωστή απάντηση η (α)

ΘΕΜΑ Β

Β1.

Χρονική στιγμή t (s)	*Ταχύτητα* υ (m/s)	*Διάστημα* s (m)
0	0	0
1	4	2
2	8	8
4	16	32

Ενδεικτική Αιτιολόγηση-

Από τον πίνακα υ_0=0 και επειδή η κίνηση είναι ευθύγραμμη σταθερής φοράς $s = |\Delta x|$

2η σειρά: Από την εξίσωση κίνησης: $\Delta x = \frac{\upsilon}{2} \cdot t$ αντικαθιστώντας τις τιμές από τον πίνακα: $\Delta x = 2\,m$

Υπολογίζουμε την επιτάχυνση της κίνησης από την εξίσωση: $\upsilon = \alpha \cdot t$ ή $\boxed{\alpha = 4\frac{m}{s^2}}$ (1)

3η σειρά: Όταν Δx=8m τότε από την εξίσωση $\boxed{\Delta x = \frac{1}{2}\alpha t^2}$ (3) και την (1) υπολογίζω $t = \pm 2s$ κρατάω την θετική λύση

Από την εξίσωση $\boxed{\upsilon = \alpha \cdot t}$ (2) και την (1) υπολογίζω την $\boxed{\upsilon = 8\frac{m}{s}}$

4η σειρά: Για $\upsilon = 16\frac{m}{s}$, την (1) και την εξίσωση (2) υπολογίζω $\boxed{t = 4s}$ (4)

Από την εξίσωση (3), την (1) και (4) υπολογίζω $\boxed{\Delta x = 32m}$

Β2. Σωστή η απάντηση *(α)*

Ενδεικτική Αιτιολόγηση

Τα σώματα εκτελούν ελεύθερη πτώση, συνεπώς για κάθε σώμα ισχύει:

Σώμα (1): $\Delta x_1 = \frac{1}{2} g \cdot t^2$ (1)

Σώμα (2): $\Delta x_2 = \frac{1}{2} g \cdot (t-1)^2$ (2)

Η μεταξύ τους απόσταση είναι $d = \Delta x_1 - \Delta x_2$, $d = \frac{1}{2} g \cdot (t^2 - (t-1)^2)$ ή

$d = \frac{1}{2} g \cdot (2t - 1)$ t>1 (1)

Συνεπώς σωστή απάντηση η (α)

ΘΕΜΑ Β

Β1. Σωστή η απάντηση *(β)*

Ενδεικτική Αιτιολόγηση-

Η απόσταση του μοτοσικλετιστή από το σημείο Α ισούται με την μετατόπιση του μοτοσικλετιστή: Δx.

Επειδή α σταθερή ισχύει:

$$\Delta x_1 = \frac{1}{2} g \cdot t^2 \quad (1)$$

$$\Delta x_2 = \frac{1}{2} g \cdot (2t)^2 \quad \text{ή} \quad \Delta x_2 = \frac{1}{2} g \cdot 4t^2 \quad \text{ή} \quad \Delta x_2 = 4\Delta x_1 \quad \text{ή}$$

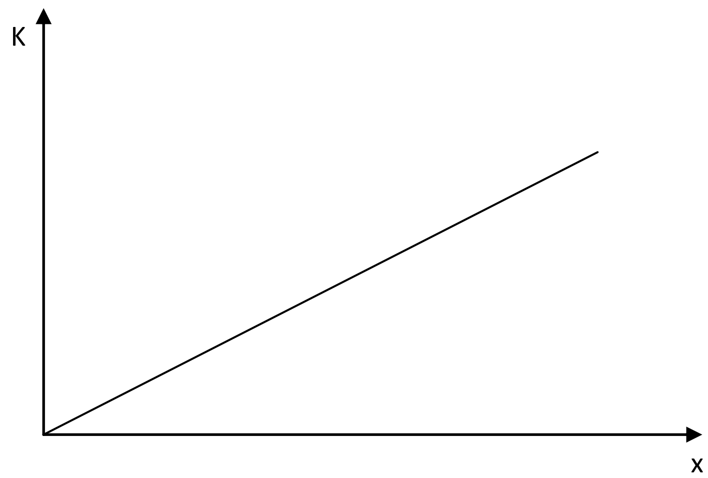
$$\boxed{\Delta x_2 = 40m} \quad (2)$$

Β2.

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μεταβολής Κινητικής Ενέργειας -Έργου για την κίνηση του κιβωτίου μεταξύ των θέσεων x_0 και x

$K - K_0 = W$ ή $K = F \cdot x$

επειδή F=σταθ. προκύπτει ότι η γραφική παράσταση K=f(x) είναι μια ευθεία γραμμή που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.



ΘΕΜΑ Β

Β1. Σωστή η απάντηση *(γ)*

Ενδεικτική Αιτιολόγηση-

Επειδή η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα

$\Sigma F = W$ ή $\alpha\pi\acute{o}\ 2o\ \ \nu.N\varepsilon\acute{\upsilon}\tau\omega\nu\alpha\ \ \alpha = \frac{W}{m} = g = \sigma\tau\alpha\theta$

Δηλ. τα δυο σώματα κινούνται με την ίδια σταθερή επιτάχυνση g δηλ. εκτελούν ελεύθερη πτώση.

Αν h το ύψος του μπαλκονιού από το έδαφος θα ισχύει:

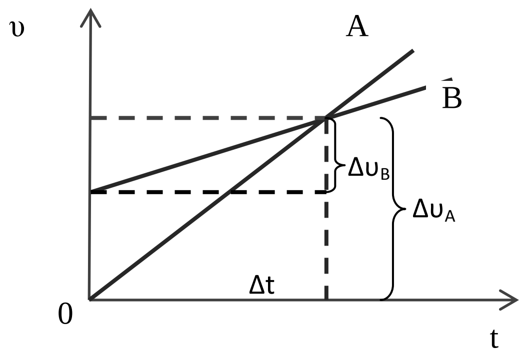
$$h = \frac{1}{2} g \cdot t^2 \quad \text{ή} \quad t_A = t_B = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Συνεπώς σωστή απάντηση η (γ)

Β2. Σωστή η απάντηση *(α)*

Ενδεικτική Αιτιολόγηση-

Από τη μορφή των γραφικών παραστάσεων της ταχύτητας σε συνάρτηση με το χρόνο προκύπτει ότι τα οχήματα εκτελούν Ευθύγραμμη Ομαλά Επιταχυνόμενη Κίνηση και η επιτάχυνση καθενός προκύπτει από τη κλίση της αντίστοιχης ημιευθείας.



Έτσι έχουμε:

$$\alpha_A = \frac{\Delta\upsilon_A}{\Delta t} \quad (1)$$

$$\alpha_B = \frac{\Delta\upsilon_B}{\Delta t} \quad (2)$$

Από το σχήμα: $\Delta\upsilon_B < \Delta\upsilon_A$ (3)

Από (1), (2) και (3) συμπεραίνουμε: $\boxed{\alpha_A > \alpha_B}$

Συνεπώς σωστή απάντηση η (α)

ΘΕΜΑ Β

Β1. Σωστή η απάντηση *(γ)*

Ενδεικτική Αιτιολόγηση-

Επειδή η αντίσταση του αέρα στη γη θεωρείται αμελητέα

$F = W_\Gamma$ ή $από\ 2ο\ \ ν. Νεύτωνα\ \ \alpha_\Gamma = \frac{W_\Gamma}{m} = g_\Gamma = σταθ$

Στην Σελήνη δεν έχει ατμόσφαιρα:

$F = W_\Sigma$ ή $από\ 2ο\ \ ν. Νεύτωνα\ \ \alpha_\Sigma = \frac{W_\Sigma}{m} = g_\Sigma = \frac{g_\Gamma}{6} = σταθ$

Ισχύει: $h = \frac{1}{2} g_\Gamma \cdot t_\Gamma^2$ ή $t_\Gamma = \sqrt{\frac{2h}{g_\Gamma}}$ όμοια $t_\Sigma = \sqrt{\frac{2h}{g_\Sigma}}$ ή $t_\Sigma = \sqrt{\frac{2h}{\frac{g_\Gamma}{6}}}$ ή

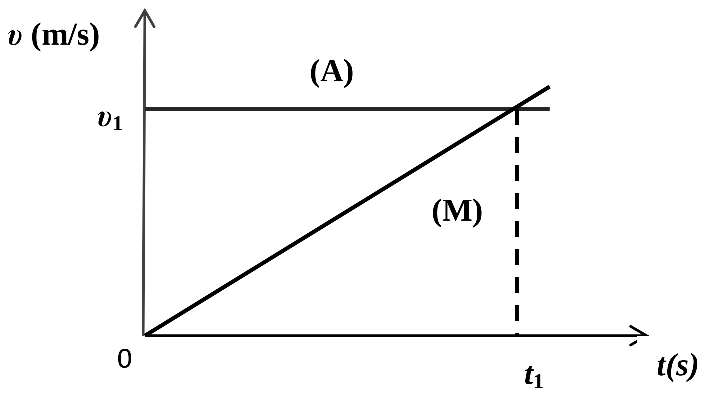
$$t_\Sigma = \sqrt{\frac{12h}{g_\Gamma}} > t_\Gamma$$

Β2. Σωστή η απάντηση *(a)*

Ενδεικτική Αιτιολόγηση-

Από τη γραφική παράσταση της ταχύτητας σε συνάρτηση με το χρόνο μπορούμε να υπολογίσουμε την μετατόπιση από το εμβαδόν της επιφάνειας που ορίζεται από τη γραφική παράσταση και τους άξονες ταχύτητας και του χρόνου.

Η ταχύτητα του αυτοκινήτου και του μοτοσικλετιστή διατηρεί σταθερό πρόσημο συνεπώς ισχύει $S = |\Delta x|$



Έτσι έχουμε:

$$S_A = \upsilon_1 \cdot t_1 \qquad (1)$$

$$S_M = \frac{1}{2} \upsilon_1 \cdot t_1 \qquad (2)$$

Συνεπώς από (1) και (2): $S_B < S_A$

7978

ΘΕΜΑ Β

Β1. Σωστή η απάντηση *(β)*

Ενδεικτική Αιτιολόγηση-

$$\upsilon_A = 36\frac{Km}{h} \quad ή \quad \upsilon_A = 36\frac{1000\,m}{3600s} \quad ή \quad \upsilon_A = 10\frac{m}{s} \quad (1)$$

$$\upsilon_\Sigma = 1\frac{cm}{s} \quad ή \quad \upsilon_\Sigma = 1\frac{1\,m}{100s} \quad ή \quad \upsilon_\Sigma = \frac{1}{100}\frac{m}{s} \quad (2)$$

Από (1) και (2): $\boxed{\frac{\upsilon_A}{\upsilon_\Sigma} = 1000}$

Β2. Σωστή η απάντηση *(γ)*

Ενδεικτική Αιτιολόγηση-

Αν τα σώματα μετακινηθούν, εφόσον βρίσκονται σε επαφή, θα κινούνται με την ίδια επιτάχυνση α.

Εφαρμόζω το $2^{ο}$ ν. του Νεύτωνα για το σώμα μάζας m_2 στο σχήμα α και το σώμα μάζας m_1 στο β

Σχήμα α (m_2):

$$\Sigma F_2 = F_2 = m_2 \cdot \alpha$$

Σχήμα β: (m_1):

$$\Sigma F_1 = F_1 = m_1 \cdot \alpha$$

Επειδή $m_1 > m_2$ προκύπτει $F_1 > F_2$

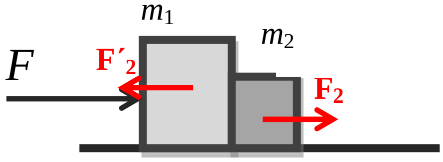
Από τον τρίτο νόμο του Νεύτωνα για τα μέτρα των δυνάμεων ισχύει

Σχήμα α (m_1):

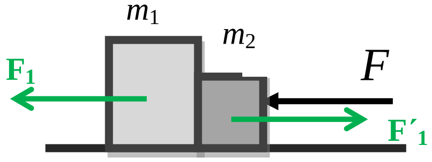
$$F_2' = F_2$$

Σχήμα β: (m_2):

$$F_1' = F_1$$



Σχήμα α



Σχήμα β

Β1. Σωστή η απάντηση **(α)**

Ενδεικτική Αιτιολόγηση

Η εξίσωση θέσης ενός κινητού που εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση είναι της μορφής:

$$x = x_0 + \upsilon_o t + \frac{1}{2}at^2.$$

Από τα δεδομένα έχουμε $x_0 = 0$ και $\upsilon_0 = 0$.

Επομένως η εξίσωση θέσης του κινητού είναι:

$$x = \frac{1}{2}at^2, \text{ δηλαδή παραβολή.}$$

Β2. Σωστή η απάντηση **(β)**

Ενδεικτική Αιτιολόγηση

Το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση.

Από τις εξισώσεις κίνησης, απαλείφοντας τον χρόνο έχουμε:

$$\upsilon^2 = \upsilon_0^2 - 2 \cdot \alpha \cdot \Delta x.$$

Η τελική ταχύτητα του οχήματος είναι μηδέν και λύνοντας ως προς Δx λαμβάνουμε:

$$\Delta x = \frac{\upsilon_0^2}{2\alpha}.$$

Β1. Σωστή η απάντηση **(α)**

Ενδεικτική Αιτιολόγηση

Το εμβαδόν του τραπεζίου που περικλείεται μεταξύ της γραμμής που παριστά την ταχύτητα και των αξόνων *υ, t* είναι ίσο με τη μετατόπιση του οχήματος. Επομένως: $\Delta x = \frac{10+8}{2} \cdot 4 = 36\ m$.

Β2. Σωστή η απάντηση **(γ)**

Ενδεικτική Αιτιολόγηση

α' τρόπος

Τα αυτοκίνητα εκτελούν ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση.

Γενικά από τις εξισώσεις κίνησης, απαλείφοντας τον χρόνο έχουμε: $\upsilon^2 = \upsilon_0^2 - 2 \cdot \alpha \cdot S$.

Η τελική ταχύτητα είναι μηδέν και λύνοντας ως προς S λαμβάνουμε: $S = \frac{\upsilon_0^2}{2\alpha}$.

Έχουμε: $S_1 = \frac{\upsilon_{01}^2}{2a_1}$ και $S_2 = \frac{\upsilon_{02}^2}{2a_2}$. Διαιρώντας κατά μέλη

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\upsilon_{01}^2}{\upsilon_{02}^2} \cdot \frac{a_2}{a_1} \quad (1)$$

Αλλά $K_1 = K_2 \Rightarrow \frac{\upsilon_{01}^2}{\upsilon_{02}^2} = \frac{m_2}{m_1}$ (2) και $T_1 = T_2 \Rightarrow \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{m_1}{m_2}$ (3)

Η σχέση (1) σε συνδυασμό με τις σχέσεις (2),(3) γίνεται: $\frac{S_1}{S_2} = 1$

β' τρόπος

Με εφαρμογή του ΘΜΚΕ για τα δύο αυτοκίνητα έχουμε:

$-T_1 \cdot S_1 = K_{\tau\varepsilon\lambda,1} - K_{\alpha\rho\chi,1} \xrightarrow{K_{\tau\varepsilon\lambda,1}=0} T_1 \cdot S_1 = K_{\alpha\rho\chi,1}$ και

$-T_2 \cdot S_2 = K_{\tau\varepsilon\lambda,2} - K_{\alpha\rho\chi,2} \xrightarrow{K_{\tau\varepsilon\lambda,2}=0} T_2 \cdot S_2 = K_{\alpha\rho\chi,2}$

Αλλά από την εκφώνηση έχουμε $T_1 = T_2$ και $K_{\alpha\rho\chi,1} = K_{\alpha\rho\chi,2}$ επομένως και $S_1 = S_2$

B1. Σωστή η απάντηση **(β)**

Ενδεικτική Αιτιολόγηση

Η βαρυτική δυναμική ενέργεια δίδεται από τη σχέση:

$U = m \cdot g \cdot y$, όπου m η μάζα της σφαίρας και y η απόσταση από το έδαφος.

Επομένως η ζητούμενη γραφική παράσταση είναι μια ευθεία που περνά από την αρχή των αξόνων.

B2. Σωστή η απάντηση **(α)**

Ενδεικτική Αιτιολόγηση

α' τρόπος

Στην ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση οι εξισώσεις κίνησης είναι:

$x = x_0 + \upsilon_o t + \frac{1}{2}at^2$ (1) και $\upsilon = \upsilon_o + \alpha t$ (2).

Από την (1) έχουμε: $s = \upsilon_o t + \frac{1}{2}at^2$ (3) ($\Delta x = x - x_0$ και $s = |\Delta x|$)

Απαλείφοντας τον χρόνο στις σχέσεις (2) και (3) καταλήγουμε στη σχέση $\upsilon^2 = \upsilon_0^2 + 2\alpha \cdot s$

β' τρόπος

Εφαρμόζοντας διαδοχικά το ΘΜΚΕ και τον 2^o Ν. Νεύτωνα έχουμε:

$K_{\tau\varepsilon\lambda}$ - $K_{\alpha\rho\chi}$= $W_{\Sigma F}$ ή $\frac{1}{2}m\upsilon^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 = \Sigma F \cdot \Delta x$ ή $\frac{1}{2}m\upsilon^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 = ma \cdot s$, και

τελικά $\upsilon^2 = \upsilon_0^2 + 2\alpha \cdot s$

Β1. Σωστή η απάντηση **(γ)**

Ενδεικτική Αιτιολόγηση

Σύμφωνα με το διάγραμμα

στο χρονικό διάστημα $0 \rightarrow t_1$ το κινητό εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση (η ταχύτητα είναι θετική και το μέτρο της μειώνεται) και την χρονική στιγμή t_1 η ταχύτητα του μηδενίζεται.

Στη συνέχεια στο χρονικό διάστημα από $t_1 \rightarrow t_2$ η ταχύτητα γίνεται αρνητική και το μέτρο της αυξάνεται, επομένως εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με φορά του αρνητικού ημιάξονα.

Β2. Σωστή η απάντηση **(β)**

Ενδεικτική Αιτιολόγηση

Στην αρχική της θέση η σφαίρα έχει μηδενική κινητική ενέργεια ενώ έχει δυναμική ενέργεια ως προς το έδαφος:

$$U_{\alpha\rho\chi} = mgh = 120\,J$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας από την αρχική θέση έως τη θέση που απέχει $\frac{h}{3}$, από το σημείο που αφήνεται η σφαίρα :

$$K_{\tau\varepsilon\lambda}\text{-}K_{\alpha\rho\chi} = W_w \text{ ή } K_{\tau\varepsilon\lambda}\text{- } 0 = \frac{mgh}{3} = \frac{120}{3} = 40J.$$

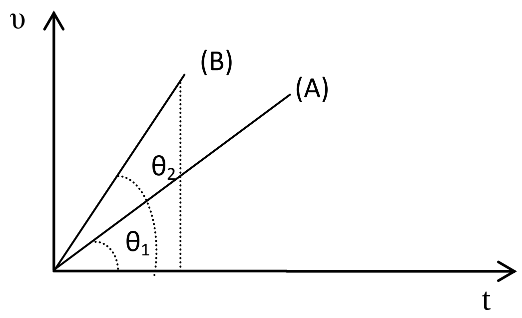
Από τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας στην αρχική θέση και στη θέση που απέχει $\frac{h}{3}$, από το από το σημείο που η σφαίρα αφήνεται να κινηθεί:

$$K_{\alpha\rho\chi} + U_{\alpha\rho\chi} = K_{\tau\varepsilon\lambda} + U_{\tau\varepsilon\lambda} \Leftrightarrow 0 + 120 = 40 + U_{\tau\varepsilon\lambda} \text{ ή } U_{\tau\varepsilon\lambda} = 80J$$

Β1. Σωστή η απάντηση **(γ)**

Ενδεικτική Αιτιολόγηση

Τα κιβώτια εκτελούν ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση χωρίς αρχική ταχύτητα. Η κλίση της ευθείας στο διάγραμμα της ταχύτητας σε συνάρτηση με το χρόνο, δίνει την επιτάχυνση.



Από το δοθέν διάγραμμα η κλίση του διαγράμματος της ταχύτητας του κιβωτίου Β είναι μεγαλύτερη από αυτή του Α.

$$(\varepsilon\varphi\theta_1 < \varepsilon\varphi\theta_2 \text{ ή } \alpha_A < \alpha_B)$$

Β2. Σωστή η απάντηση **(β)**

Ενδεικτική Αιτιολόγηση

Στην αρχική της θέση η σφαίρα έχει μηδενική κινητική ενέργεια ενώ έχει δυναμική ενέργεια ως προς το έδαφος:

$$U_{\alpha\rho\chi} = mgh = 120\,J$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας από την αρχική θέση έως τη θέση που απέχει $\frac{h}{3}$, από το σημείο που αφήνεται η σφαίρα :

$$K_{\tau\varepsilon\lambda}\text{-}K_{\alpha\rho\chi}= W_w \text{ ή } K_{\tau\varepsilon\lambda}\text{- } 0 =\frac{mgh}{3} = \frac{120}{3} = 40J.$$

Από τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας στην αρχική θέση και στη θέση που απέχει $\frac{h}{3}$, από το από το σημείο που η σφαίρα αφήνεται να κινηθεί:

$$K_{\alpha\rho\chi} + U_{\alpha\rho\chi} = K_{\tau\varepsilon\lambda} + U_{\tau\varepsilon\lambda} \Leftrightarrow 0 + 120 = 40 + U_{\tau\varepsilon\lambda} \text{ ή } U_{\tau\varepsilon\lambda} = 80J$$

Β1. Σωστή η απάντηση **(γ)**

Ενδεικτική Αιτιολόγηση

Τη χρονική t_1 η κινητική ενέργεια του αυτοκινήτου είναι: $K_1 = \frac{1}{2} m \upsilon_1^2$ (1)

Τη χρονική t_2 η κινητική ενέργεια του αυτοκινήτου είναι:

$K_2 = \frac{1}{2} m \upsilon_2^2 = \frac{1}{2} m 4 \upsilon_1^2$ ή λόγω της (1) $K_2 = 4K_1$

Β2. Σωστή η απάντηση **(β)**

Ενδεικτική Αιτιολόγηση

Οι αθλητές έκαναν τα πρώτα 50 m σε χρόνο 10 s κινούμενοι με σταθερή επιτάχυνση, επομένως

$$s = \frac{1}{2} a t^2 \text{ ή } \alpha = 1 \frac{m}{s^2}.$$

Η ταχύτητα τους στο τέλος των 50 μέτρων είναι:

$$\upsilon = at \text{ ή } \upsilon = 10 \frac{m}{s}.$$

Τα υπόλοιπα 50 m οι αθλητές τα διήνυσαν σε χρόνο

$$t' = \frac{s}{\upsilon} \text{ ή } t' = 5 \text{ sec.}$$

Επομένως ο η επίδοση των αθλητών είναι:

$$t_{ολικο} = 10 + 5 = 15 \text{ sec.}$$

Β1. Σωστή η απάντηση (β**)**

Ενδεικτική Αιτιολόγηση

Η μόνη δύναμη που δέχεται το μπαλάκι στην άνοδο αλλά και στη κάθοδο είναι το βάρος του.

Από το 2ο νόμο του Νεύτωνα για τα μέτρα της δύναμης και της επιτάχυνσης έχουμε

$$B = ma \text{ ή } mg = ma \text{ ή } g = a \ (1)$$

Κατά την άνοδο το μπαλάκι εκτελεί ευθύγραμμα ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση, επομένως

$$\upsilon = \upsilon_0 - \alpha t \overset{(1)}{\Rightarrow} \upsilon = \upsilon_0 - gt \Rightarrow 0 = \upsilon_0 - gt_a \Rightarrow t_a = \frac{\upsilon_0}{g} \ (2)$$

Το τελικό ύψος h που θα φτάσει το μπαλάκι είναι

$$h = \upsilon_0 t_a - \frac{1}{2}\alpha t_a^2 \overset{(2)}{\Rightarrow} h = \frac{\upsilon_0^2}{2g} \ (3)$$

Κατά την κάθοδο το μπαλάκι εκτελεί ελεύθερη πτώση από ύψος h, άρα έχουμε

$$y = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow h = \frac{1}{2}gt_\kappa^2 \overset{(3)}{\Rightarrow} \frac{\upsilon_0^2}{2g} = \frac{1}{2}gt_\kappa^2 \text{ και τελικά}$$

$$t_\kappa = \frac{\upsilon_0}{g} \ (4)$$

Από τις (2) και (4)

$$t_\alpha = t_\kappa$$

Β2. Σωστή η απάντηση **(γ)**

Ενδεικτική Αιτιολόγηση

Το κιβώτιο μέχρι τη χρονική στιγμή t_2 δέχεται, σύμφωνα με το διάγραμμα, οριζόντια (συνισταμένη) δύναμη ίδιας φοράς και μεταβλητού μέτρου, επομένως συνεχώς επιταχύνεται και τελικά τη μέγιστη κατά μέτρο ταχύτητα την αποκτά τη χρονική στιγμή t_2.

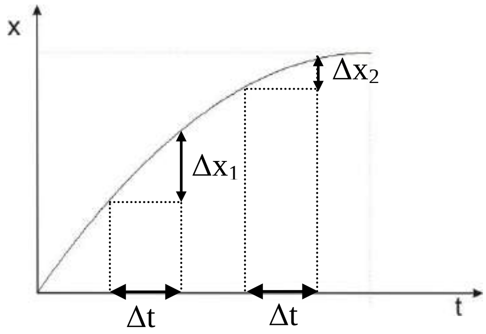
Σύμφωνα με το 2ο νόμο του Νεύτωνα η επιτάχυνση είναι ανάλογη της συνισταμένης δύναμης, επομένως τη μέγιστη κατά μέτρο επιτάχυνση το κιβώτιο την έχει τη χρονική στιγμή t_1.

Β1. Σωστή η απάντηση **(γ)**

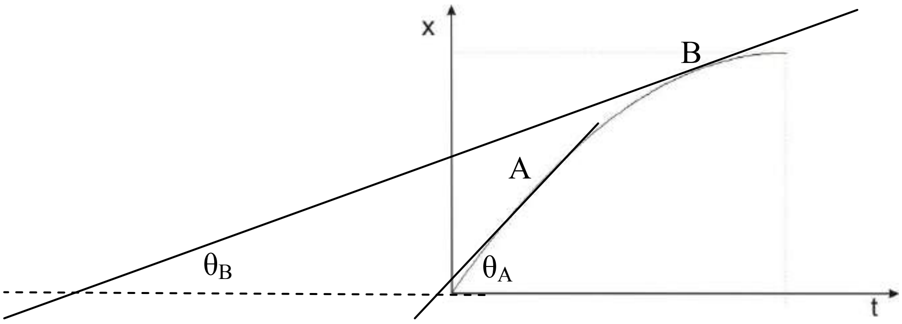
Ενδεικτική Αιτιολόγηση

Από το διάγραμμα θέσης-χρόνου του σκιέρ παρατηρούμε ότι προϊόντος του χρόνου, η μετατόπιση του για το ίδιο χρονικό διάστημα (Δt) μειώνεται ($\Delta x_1 > \Delta x_2$).

Επομένως $\frac{\Delta x_1}{\Delta t} > \frac{\Delta x_2}{\Delta t}$ ή $\upsilon_1 > \upsilon_2$, η ταχύτητα συνεχώς μειώνεται, άρα ο σκιέρ εκτελεί επιβραδυνόμενη κίνηση.



Ή διαφορετικά συγκρίνουμε την κλίση της καμπύλης σε δυο διαφορετικά σημεία στο Α και το Β



Γνωρίζουμε ότι

$$\upsilon_A = \varepsilon\varphi\theta_A \text{ και } \upsilon_B = \varepsilon\varphi\theta_B \quad (1)$$

Από το σχήμα: $\theta_A > \theta_B$ συνεπώς $\varepsilon\varphi\,\theta_A > \varepsilon\varphi\,\theta_B$ (2)

Από (1) και (2) συμπεραίνουμε $\upsilon_A > \upsilon_B$

Δηλ. το μέτρο της ταχύτητας του σκιέρ μειώνεται, συνεπώς εκτελεί επιβραδυνόμενη κίνηση άρα σωστό το (γ)

Β2. Εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας από τη αρχική θέση έως τη θέση x:

$K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = Fx$ ή $K - 0 = Fx$ ή $K = Fx$ (1),

όπου F η δύναμη που ασκεί ο εργάτης στο κιβώτιο.

Εφαρμόζοντας διαδοχικά το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας για όλες τις θέσεις του κιβωτίου και έχοντας υπόψη την (1) συμπληρώνουμε τον πίνακα.

x	***K***
0	*0*
2x	*2K*
3x	*3K*
4x	*4K*

ΘΕΜΑ Β

Β1. Σωστή η απάντηση *(β)*

Ενδεικτική Αιτιολόγηση

Η εξίσωση της θέσης του κινητού είναι: $x = 5t + 2\,t^2$ (S.I), δηλαδή της μορφής

$$x = x_0 + \upsilon_o t + \frac{1}{2}at^2, \text{ με } x_0 = 0,\ \upsilon_0 = +5\ m/s \text{ και } \alpha = +4\ m/s^2.$$

Τα υ_0 και α έχουν το ίδιο πρόσημο, οπότε το κινητό εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με εξίσωση ταχύτητας,

$$\upsilon = \upsilon_o + \alpha t = 5 + 4t\ (S.I).$$

Άρα για $t = 5$ s η ταχύτητα έχει μέτρο *25 m / s.*

Β2. Σωστή η απάντηση *(β)*

Ενδεικτική Αιτιολόγηση

Στην αρχική της θέση η σφαίρα έχει μηδενική κινητική ενέργεια ενώ έχει δυναμική ενέργεια ως προς το έδαφος:

$$U_{\alpha\rho\chi} = mgh = 120\,J$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας από την αρχική θέση έως τη θέση που απέχει $\frac{h}{3}$, από το σημείο που αφήνεται η σφαίρα :

$$K_{\tau\varepsilon\lambda}\text{-}K_{\alpha\rho\chi} = W_w \text{ ή } K_{\tau\varepsilon\lambda}\text{- } 0 = \frac{mgh}{3} = \frac{120}{3} = 40J.$$

Από τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας στην αρχική θέση και στη θέση που απέχει $\frac{h}{3}$, από το από το σημείο που η σφαίρα αφήνεται να κινηθεί:

$$K_{\alpha\rho\chi} + U_{\alpha\rho\chi} = K_{\tau\varepsilon\lambda} + U_{\tau\varepsilon\lambda} \Leftrightarrow 0 + 120 = 40 + U_{\tau\varepsilon\lambda} \text{ ή } U_{\tau\varepsilon\lambda} = 80J$$

B$_1$. Σωστή απάντηση η (α).

Ενδεικτική αιτιολόγηση

Το εμβαδό που περικλείεται από τη γραφική παράσταση επιτάχυνσης-χρόνου ($\alpha = f\,(t)$) και τον άξονα του χρόνου είναι αριθμητικά ίσο με τη μεταβολή της ταχύτητας του σώματος $\Delta\upsilon$. Οπότε:

0 – 2s: $\Delta\upsilon = +8\ m\,/s$

2s – 4s: $\Delta\upsilon = 0$

4s – 6s: $\Delta\upsilon = -\ 4\ m\,/s$

Άρα στη χρονική διάρκεια 0 - 6s η ταχύτητα έχει μεταβληθεί κατά + 4 m / s και καθώς το όχημα δεν έχει αρχική ταχύτητα ,τη χρονική στιγμή $t_1 = 6s$, η τιμή της θα είναι ίση με + 4 m / s.

B$_2$. Σωστή απάντηση η (β).

Ενδεικτική αιτιολόγηση

Εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας για τις μετατοπίσεις των κιβωτίων. Έστω $m_A = m_B = m$ και $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x$,

Κιβώτιο Α: $K_{\tau\varepsilon\lambda}$-$K_{\alpha\rho\chi}$= W_{F_A} ή $\frac{1}{2} m\upsilon_A^2 - 0 = F\ \Delta x$ ή $\upsilon_A = \sqrt{\frac{2\ F\ \Delta x}{m}}$

Κιβώτιο Β: $K_{\tau\varepsilon\lambda}$-$K_{\alpha\rho\chi}$= W_{F_B} ή $\frac{1}{2} m\upsilon_B^2 - 0 = \frac{F}{2}\ \Delta x$ ή $\upsilon_B = \sqrt{\frac{F\ \Delta x}{m}}$

Άρα, $\upsilon_A = \upsilon_B\sqrt{2}$

B$_1$. Σωστή απάντηση η (β).

Ενδεικτική αιτιολόγηση

Η ταχύτητα διάδοσης του ήχου στον αέρα είναι ίση με 340 m / s. Θεωρώντας ότι τα ηχητικά κύματα εκτελούν ευθύγραμμη ομαλή κίνηση:

$$S = \upsilon_{\eta\chi} \cdot \Delta t \Leftrightarrow \Delta t = \frac{S}{\upsilon_{\eta\chi}} = 3{,}5\ s$$

B$_2$. Σωστή απάντηση η (α).

Ενδεικτική αιτιολόγηση

Εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας από τη θέση που τα οχήματα ξεκινούν να επιβραδύνονται μέχρι να ακινητοποιηθούν:

$$K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = W_{\Sigma F} \text{ ή } 0 - \frac{1}{2} m \cdot \upsilon^2 = -\Sigma F \cdot \Delta x,$$

όπου υ - η αρχική ταχύτητα των οχημάτων.

Η μετατόπιση του φορτηγού θα είναι μεγαλύτερη καθώς έχει μεγαλύτερη μάζα.

ΘΕΜΑ Β

Β1. **Α)**

Κινητική Ενέργεια (J)	**Δυναμική Ενέργεια (J)**	**Μηχανική Ενέργεια (J)**
0	80	**80**
20	**60**	**80**
40	40	**80**
80	**0**	**80**

Ενδεικτική αιτιολόγηση

Κατά την ελεύθερη πτώση ισχύει η Αρχή διατήρησης της Μηχανικής ενέργειας:

$$E = K + U = 80\ J = \text{σταθερή}$$

Β2. Σωστή απάντηση η (γ)

Ενδεικτική αιτιολόγηση

Κατά την αλληλεπίδραση των μαθητριών (ώθηση) ισχύει ο 3^{ος} νόμος του Newton:

$\overrightarrow{F_{M,A}} = -\overrightarrow{F_{A,M}}$, όπου $\overrightarrow{F_{M,A}}$ είναι η δύναμη που ασκεί η Μαρία στην Αλίκη και $\overrightarrow{F_{A,M}}$ η δύναμη που ασκεί η Αλίκη στη Μαρία. Οι δυνάμεις έχουν ίσα μέτρα και προκαλούν επιταχύνσεις στις μαθήτριες σύμφωνα με τον 2^{ο} νόμο του Newton:

$$F_{M,A} = F_{A,M} \text{ ή } m_A a_A = m_M a_M \text{ ή } \frac{m_A}{m_M} = \frac{a_M}{a_A}$$

$$\text{Εφόσον, } m_M > m_A \text{ τότε } a_M < a_A.$$

B1. Σωστή απάντηση η (α)

Ενδεικτική αιτιολόγηση

Η μάζα δεν μεταβάλλεται από τόπο σε τόπο.

Η ελκτική δύναμη που ασκεί ο πλανήτης στον αστροναύτη έχει μέτρο $w = m\ g$. Εφόσον στην επιφάνεια του Δία το $g_Δ$ είναι μεγαλύτερο σε σχέση με το g στην επιφάνεια της Γης, η ελκτική δύναμη στον Δία θα έχει μεγαλύτερο μέτρο.

B2. Σωστή απάντηση η (α)

Ενδεικτική αιτιολόγηση

Η κινητική ενέργεια υλικού σημείου υπολογίζεται από τον τύπο:

$K = \frac{1}{2} m υ^2$. Διπλασιάζοντας την ταχύτητα η κινητική ενέργεια τετραπλασιάζεται οπότε $K' = 4J$.

Άρα η μεταβολή της κινητικής ενέργειας θα είναι 3J (αύξηση).

Β1. Σωστή απάντηση η (β)

Ενδεικτική αιτιολόγηση

Το βάρος του κύβου έχει μέτρο

$$B = m\,g\ (1).$$

Το μέτρο της επιτάχυνσης της βαρύτητας στην επιφάνεια της Γης είναι 6,25 φορές μεγαλύτερο από το μέτρο της επιτάχυνσης της βαρύτητας στην επιφάνεια της Σελήνης δηλαδή:

$$g_{\Gamma} = 6{,}25\ g_{\Sigma},$$

άρα σύμφωνα με την (1)

$$B_{\Gamma} = 6{,}25\ B_{\Sigma}.$$

Επίσης εφαρμόζοντας το 2^{ο} νόμο του Newton για τον κύβο:

$$F = ma \text{ ή } \alpha = \frac{F}{m}$$

προκύπτει ότι το μέτρο της επιτάχυνσης είναι ίδιο τόσο στην Γη όσο και στη Σελήνη.

Β2. Σωστή απάντηση η (γ)

Ενδεικτική αιτιολόγηση

Το εμβαδό που περικλείεται από τη γραφική παράσταση ταχύτητας-χρόνου ($\upsilon = f\,(t)$) και του άξονα του χρόνου είναι αριθμητικά ίσο με τη μετατόπιση της μπίλιας. Οπότε:

0 – 20s: $\Delta x_1 = +100\ m$

20s – 30s: $\Delta x_2 = -25\ m$

Άρα στη χρονική διάρκεια 0 - 30s:

$$\Delta x_{o\lambda} = \Delta x_1 + \Delta x_2 = +\ 75\ m \text{ και}$$

$$S = |\Delta x_1| + |\Delta x_2| = 125m$$

Β1. Σωστή απάντηση η (β)

Ενδεικτική αιτιολόγηση

Ο ρυθμός μεταβολής της θέσης είναι η ταχύτητα της πέτρας δηλ.:

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} = a \cdot t$$

Β2. Σωστή απάντηση η (α)

Ενδεικτική αιτιολόγηση

Η κινητική ενέργεια υλικού σημείου υπολογίζεται από τον τύπο:

$K = \frac{1}{2} m\upsilon^2$. Όταν η ταχύτητα διπλασιάζεται η κινητική ενέργεια τετραπλασιάζεται οπότε

$$K' = 4 \cdot K$$

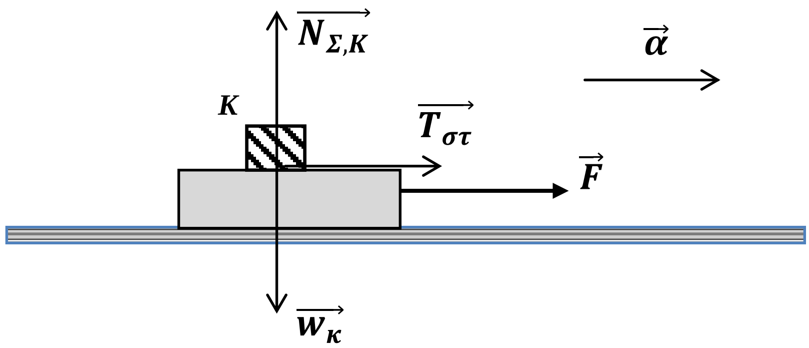
Εφαρμόζοντας το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας για τη μεταλλική σφαίρα από το σημείο Α στο σημείο Β:

$$K_{\tau\varepsilon\lambda}\text{-}K_{\alpha\rho\chi}= W_w \text{ ή } K' - K = W_W \text{ ή } 4K - K = W_W \text{ ή } W_W = 3K,$$

όπου W_W το έργο του βάρους της σφαίρας κατά τη μετατόπιση της από τη θέση Α στην θέση Β.

B$_1$.

A) Στον κύβο ασκούνται το βάρος $\overrightarrow{w_\kappa}$ **,** η κάθετη δύναμη επαφής από τη σανίδα $\overrightarrow{N_{\Sigma,K}}$ και η στατική τριβή $\overrightarrow{T_{\sigma\tau}}$.



B) Σωστή απάντηση η (γ).

<u>Ενδεικτική αιτιολόγηση</u>

Ο κύβος παραμένει ακίνητος ως προς το σύστημα αναφοράς της σανίδας. Το σύστημα σανίδα-κύβος επιταχύνεται προς τα δεξιά και τα δύο σώματα που το αποτελούν κινούνται με κοινή επιτάχυνση σταθερού μέτρου α, ως προς το σύστημα αναφοράς του εδάφους.

Σύμφωνα με το 2^o νόμο του Newton για τον κύβο, απαιτείται δύναμη ίδιας κατεύθυνσης (αιτία) με την επιτάχυνση (αποτέλεσμα).

Όπως φαίνεται από το σχήμα αυτή είναι η δύναμη της στατικής τριβής.

B$_2$. Σωστή απάντηση η (α).

<u>Ενδεικτική αιτιολόγηση</u>

Αμαξάκι Α:

$$K_A = \frac{1}{2}\, m(2\upsilon)^2 = 2m\upsilon^2$$

Αμαξάκι Β:

$$K_B = \frac{1}{2}\, 2m\upsilon^2 = m\upsilon^2$$

Άρα

$$K_A = 2K_B$$

Β1. Σωστή η απάντηση (β)

Ενδεικτική αιτιολόγηση

Σύμφωνα με τον 1ο νόμο του Newton στον οριζόντιο άξονα:

$\vec{\upsilon} = \sigma\tau\alpha\theta \Leftrightarrow \sum \vec{F}_x = 0 \Leftrightarrow \vec{F} + \vec{T} = 0 \Leftrightarrow \vec{F} = -\vec{T}$, όπου $\vec{T}$, η τριβή ολίσθησης.

Β2. Σωστή η απάντηση (γ)

Ενδεικτική αιτιολόγηση

Το κινητό έχει εξίσωση θέσης,

$$x = 5t + 8\,t^2 \text{ (S.I)},$$

δηλαδή της μορφής

$$x = x_0 + \upsilon_o t + \frac{1}{2}\alpha t^2, \text{ με } x_0 = 0,\ \upsilon_0 = +5\ m/s \text{ και } \alpha = +16\ m/s^2.$$

Τα υ_0 και α έχουν το ίδιο πρόσημο, οπότε το κινητό εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με εξίσωση ταχύτητας,

$$\upsilon = \upsilon_o + \alpha t = 5 + 16t\ (S.I).$$

Άρα για $t = 2$ s η ταχύτητα έχει μέτρο $37\ m/s$.

Β$_1$. Σωστή η απάντηση (β).

Ενδεικτική αιτιολόγηση

Αφού οι μεταλλικές σφαίρες εκτελούν ελεύθερη πτώση, κινούνται με την ίδια επιτάχυνση η οποία είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας $\vec{g}$.

Εφόσον οι μεταλλικές σφαίρες αφήνονται από το ίδιο ύψος h, ο χρόνος πτώσης είναι ίδιος και υπολογίζεται από την εξίσωση κίνησης:

$$h = \frac{1}{2} g \cdot t^2 \quad \text{ή} \quad t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Άρα φτάνουν στο έδαφος με ταχύτητες ίδιου μέτρου:

$$\upsilon = g \cdot t = g \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Β$_2$. Σωστή η απάντηση (γ).

Ενδεικτική αιτιολόγηση

Το εμβαδό που περικλείεται από τη γραφική παράσταση ταχύτητας-χρόνου ($\upsilon = f(t)$) και τους άξονες ταχύτητας και χρόνου είναι αριθμητικά ίσο με το διάστημα που διάνυσε το αυτοκίνητο. Οπότε:

$$S = \frac{20 \cdot 40}{2} = 400\ m$$

Η μέση ταχύτητα του σώματος υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\upsilon_\mu = \frac{S}{\Delta t} = \frac{400}{40} = 10 m/s$$

Β1.

Α) Σωστή απάντηση είναι η (α)

Β) Όταν ένα σώμα κινείται από μία θέση 1 σε μία θέση 2, η διαφορά των δυναμικών ενεργειών του σώματος ($U_1 - U_2$) μεταξύ των θέσεων 1 και 2 ισούται με το έργο του βάρους του σώματος.

Θεωρούμε επίπεδο αναφοράς για τη δυναμική ενέργεια το έδαφος.

Και οι δύο σφαίρες στο ύψος h έχουν δυναμική ενέργεια

$$U_1 = \mathrm{m \cdot g \cdot h},$$

ενώ όταν φθάνουν στο έδαφος έχουν δυναμική ενέργεια

$$U_2 = 0.$$

Και για τις δύο σφαίρες :

$$W_{\mathrm{B1}} = W_{\mathrm{B2}} = m \cdot g \cdot h - 0 = m \cdot g \cdot h.$$

Β2.

Α) Σωστή απάντηση είναι η (γ)

Β) Σύμφωνα με το $2^{\text{ο}}$ Νόμο του Νεύτωνα, επειδή η μάζα m του κιβωτίου είναι σταθερή, το διάγραμμα της μεταβολής του μέτρου της επιτάχυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο θα είναι της ίδιας μορφής με αυτό του μέτρου της δύναμης.

Στο χρονικό διάστημα $0 - t_1$ το μέτρο της επιτάχυνσης είναι σταθερό και η κίνηση του κιβωτίου είναι ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη.

Στο χρονικό διάστημα $t_1 - t_2$ το μέτρο της επιτάχυνσης μειώνεται οπότε η κίνηση του κιβωτίου είναι ευθύγραμμη επιταχυνόμενη.

Τη χρονική στιγμή t_2 η δύναμη μηδενίζεται, οπότε, σύμφωνα με τον $1^{\text{ο}}$ Νόμο του Νεύτωνα, το κιβώτιο συνεχίζει να κινείται με σταθερή ταχύτητα.

Β1.

Σωστή απάντηση είναι η (β)

Ενδεικτική Αιτιολόγηση

Εφόσον η ταχύτητα αυξάνεται ανάλογα με το χρόνο, το κιβώτιο θα επιταχύνεται με σταθερή επιτάχυνση.

Από τον 2^{ο} Νόμο του Νεύτωνα, αφού η τιμή της επιτάχυνσης είναι σταθερή, θα είναι και η τιμή της δύναμης σταθερή. Άρα το διάγραμμα της τιμής της δύναμης σε συνάρτηση με το χρόνο θα είναι μία ευθεία παράλληλη στον άξονα του χρόνου.

Β2.

Σωστή απάντηση είναι η (α)

Ενδεικτική Αιτιολόγηση

Σύμφωνα με τις εξισώσεις της ελεύθερης πτώσης:

$$h = \frac{1}{2} g \cdot t_{ολικο}^2$$

από όπου προκύπτει ότι:

$$t_{ολικο} = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Στο ύψος h το σφαιρίδιο έχει δυναμική ενέργεια $U = m{\cdot}g{\cdot}h$, κινητική ενέργεια $K = 0$ και μηχανική ενέργεια:

$$E = U + K = m{\cdot}g{\cdot}h$$

Έστω ότι σε ύψος h' από το έδαφος η δυναμική ενέργεια του σφαιριδίου έχει γίνει ίση με την κινητική του.

Η δυναμική του ενέργεια θα είναι : $U' = m{\cdot}g{\cdot}h'$,

η κινητική του ενέργεια : $K' = U'$

και η μηχανική ενέργεια: $E' = K' + U' = 2U' = 2m{\cdot}g{\cdot}h'$.

Από την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας προκύπτει :

$$E' = E \quad ή \quad 2m{\cdot}g{\cdot}h' = m{\cdot}g{\cdot}h \qquad και$$

$$τελικά\ h' = \frac{h}{2}.$$

Όπως παραπάνω βρίσκουμε ότι $t_E = \sqrt{\frac{2h'}{g}} = \sqrt{\frac{h}{g}}$

Οπότε

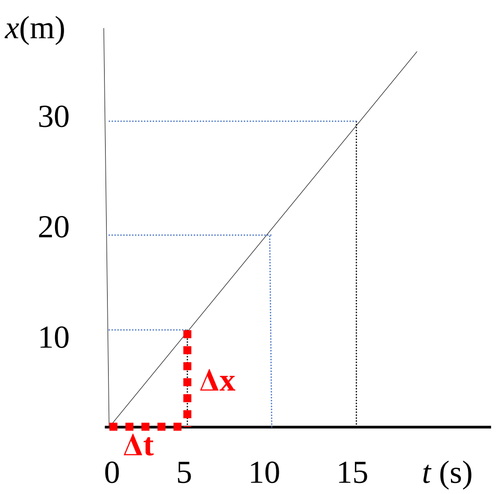
$$\frac{t_{ολικο}}{t_E} = \sqrt{2}$$

Β1.

Α)

Χρονική στιγμή t(s)	Ταχύτητα υ(m/s)	Θέση x(m)
5	**2**	**10**
10	**2**	20
15	**2**	**30**

Β)



Ενδεικτική Αιτιολόγηση

Η κλίση της ευθείας είναι ίση με την ταχύτητα του κινητού.

$$\text{Κλίση} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{10\ m}{5\ s} \quad \delta\eta\lambda. \quad \boxed{\upsilon = 2\ \frac{m}{s}}$$

Β2.

Α) Σωστή απάντηση είναι η (α).

Ενδεικτική Αιτιολόγηση

Β) Το έργο του βάρους ισούται με τη διαφορά της δυναμικής ενέργειας $U_1 – U_2$ που έχει ένα σώμα μεταξύ δύο θέσεων 1και 2, όταν αυτό μετακινείται από τη θέση 1 στη θέση 2.

Θεωρούμε ως επίπεδο αναφοράς για τη δυναμική ενέργεια το οριζόντιο επίπεδο.

Και για τα τρία κιβώτια

$$U_1 = m \cdot g \cdot h \text{ και } U_2 = 0$$

$$\text{Συνεπώς } W_A = W_B = W_\Gamma = m \cdot g \cdot h$$

Β1.

Α) και Β)

Στο σώμα Σ_1 ασκούνται οι δυνάμεις:

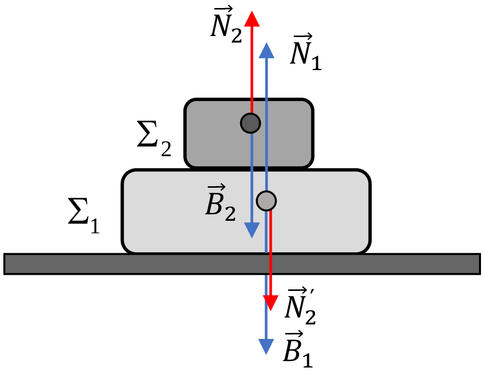
i) Από απόσταση: το βάρος $\vec{B}_1$ από τη Γη,

ii) Από επαφή: η δύναμη $\vec{N}_1$ από το δάπεδο (αντίδραση) και η $\vec{N}_2'$ από το Σ_2.

Στο σώμα Σ_2 ασκούνται οι δυνάμεις:

i) Από απόσταση: το βάρος $\vec{B}_2$ από τη Γη,

ii) Από επαφή: η δύναμη $\vec{N}_2$ από το Σ_1.



Γ) Ζεύγος Δράσης-Αντίδρασης αποτελούν οι δυνάμεις: $\vec{N}_2$ (ασκείται στο Σ_2 από το Σ_1) - $\vec{N}_2'$ (ασκείται στο Σ_1 από το Σ_2)

Β2.

Α) Σωστή απάντηση είναι η (α)

Β) Ενδεικτική Αιτιολόγηση

Εφόσον το κινητό εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση σύμφωνα με τον 2^o ν. του Νεύτωνα η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται σε αυτό θα έχει σταθερό μέτρο και κατεύθυνση αντίθετη της μετατόπισης: $\Sigma F = m \cdot a$

Εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας λαμβάνοντας υπόψη ότι το έργο της συνισταμένης δύναμης είναι καταναλισκόμενο:

$K_{\tau\varepsilon\lambda}$ - $K_{\alpha\rho\chi} = \Sigma W$ ή $½\, m\upsilon^2 - ½\, m\upsilon_0^2 = -F\, \Delta x$ ή $½\, m\upsilon^2 - ½\, m\upsilon_0^2 = -m\, \alpha\, \Delta x$ ή

$$\upsilon^2 = \upsilon_0^2 - 2a \cdot \Delta x$$

Εναλλακτικά

Από τις εξισώσεις της ευθύγραμμης ομαλά επιβραδυνόμενης κίνησης:

$$\upsilon = \upsilon_0 - \alpha \cdot t \quad (1) \text{ και } \Delta x = \upsilon_0 t - ½\, \alpha \cdot t^2 \quad (2)$$

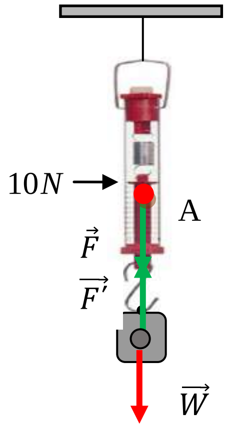
Από τις (1) και (2) απαλοίφοντας το χρόνο καταλήγουμε στη σχέση:

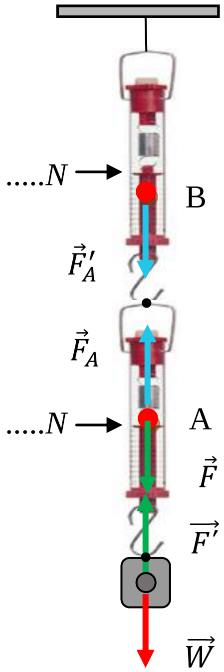
$$\upsilon^2 = \upsilon_0^2 - 2a \cdot \Delta x$$

Β1.

Α) Σωστή απάντηση είναι η (γ)

Β) Σχήμα 1 Σχήμα 2





Σχήμα 1:

Στο σώμα ασκούνται δυο δυνάμεις: η $\vec{F'}$ από το ελατήριο και το βάρος $\vec{W}$ από τη γη.
Το σώμα ισορροπεί συνεπώς από τον 1^{ο} ν. του Νεύτωνα

$$F' = W \qquad (1)$$

Στο ελατήριο Α ασκείται η δύναμη $\vec{F}$ από το σώμα η οποία είναι ανάλογη της επιμήκυνσης του ελατηρίου (νόμος Hooke).

Από τον 3^{ο} ν. του Νεύτωνα $\vec{F'}$ - $\vec{F}$ αποτελούν το ζεύγος (Δράση-Αντίδραση) και συνεπώς

$$F' = F = 10N \qquad (2)$$

Από (1) και (2) $F=W=10N$ (3)

Σχήμα 2:

Στο ελατήριο Α ασκούνται δυο δυνάμεις η δύναμη $\vec{F}$ από το σώμα και η $\vec{F}_A$ από το ελατήριο Α, από την εκφώνηση στο ελατήριο δεν ασκείται η δύναμη του βάρους.
Εφαρμόζοντας τον 1^{ο} ν. του Νεύτωνα για το ελατήριο Α λαμβάνουμε:

$$F_A=F=10N \qquad (4)$$

Ελατήριο Β ασκείται η δύναμη $\vec{F}_A'$ από το ελατήριο Α, από τον 3^{ο} ν. του Νεύτωνα $\vec{F}_A$ - $\vec{F}_A'$ αποτελούν το ζεύγος (Δράση-Αντίδραση) και συνεπώς

$$F_A = F_A' \qquad (5)$$

Από τις (4) και (5) συμπεραίνω ότι

$$F = F_A = F_A' = 10\ N$$

Συνεπώς και το δεύτερο ελατήριο το οποίο αποκτά την ίδια επιμήκυνση με το πρώτο.

Β2.

Α) Σωστή απάντηση είναι η (β)

Ενδεικτική Αιτιολόγηση-

Β) Η εξίσωση της ταχύτητας στην ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση είναι $\upsilon = \upsilon_0 + \alpha \cdot t$.
Αν θέσουμε

$$\upsilon = 3\upsilon_0 \text{ τότε } 3\upsilon_0 = \upsilon_0 + \alpha \cdot t$$

από όπου προκύπτει ότι

$$t = \frac{2\upsilon_0}{\alpha}$$

Αν στην εξίσωση του διαστήματος

$$s = \upsilon_0 \cdot t + \frac{1}{2}\alpha \cdot t^2$$

αντικαταστήσουμε την παραπάνω σχέση για το χρόνο έχουμε

$$s = \upsilon_0 \cdot \left(\frac{2\upsilon_0}{\alpha}\right) + \frac{1}{2}\alpha \cdot \left(\frac{2\upsilon_0}{\alpha}\right)^2$$

και τελικά

$$s = \frac{4\upsilon_o^2}{a}.$$

Β1.

Α) Σωστή απάντηση είναι η (γ)

Β) <u>Ενδεικτική Αιτιολόγηση</u>

Η σφαίρα εκτελεί ελεύθερη πτώση, άρα το ύψος και ο χρόνος πτώσης συνδέονται με τη σχέση:

$$h = \tfrac{1}{2}\, g'\cdot t^2,$$

όπου g' η επιτάχυνση της βαρύτητας κοντά στην επιφάνεια του πλανήτη.

Από αυτήν προκύπτει ότι

$$g' = 2h/t^2 = \frac{1}{3}\ \mathrm{m/s^2}$$

Β2.

Α) Σωστή απάντηση είναι η (α)

Β) <u>Ενδεικτική Αιτιολόγηση</u>

Χρονικό διάστημα $0 – t_1$: Κίνηση ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη με

$$\alpha = F/m \qquad \text{και} \qquad \upsilon = \alpha\cdot t = (F/m)\cdot t_1 > 0$$

Χρονικό διάστημα $t_1 – t_2$: Κίνηση ευθύγραμμη ομαλή με

$$\upsilon = (F/m)\cdot t_1.$$

Χρονικό διάστημα $t_2 – t_3$: Κίνηση ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη με

$$\alpha' = F'/m.$$

Επειδή

$$F' = F/2 \text{ θα είναι } \alpha' = F/(2m)$$

Η ταχύτητα σε αυτό το χρονικό διάστημα θα είναι

$$\upsilon' = \upsilon – \alpha'\, t \text{ ή } \upsilon' = (F/m)t_1 - (F'/m)\,(t_3 - t_2)$$

$$\text{ή} \quad \upsilon' = (F/m)\cdot t_1 - (F/2m)\cdot (t_3 - t_2).$$

$$\text{Αλλά } t_1 = t_3 - t_2 = 1\text{s}.$$

$$\text{Άρα } \upsilon' = (F/2m)\cdot t_1 > 0.$$

Β1.

Α) Σωστή απάντηση είναι η (γ)

Β) Ενδεικτική Αιτιολόγηση-

Η κίνηση είναι ΕΟ επιβραδυνόμενη αφού η ταχύτητα μειώνεται γραμμικά με το χρόνο.

Το μέτρο της κλίσης του διαγράμματος είναι $\left|\frac{\Delta\upsilon}{\Delta t}\right|$ = 4 m/s^2.
Άρα η επιτάχυνση είναι α = – 4 m/s^2.
Το εμβαδό του τριγώνου που σχηματίζεται από την ευθεία του διαγράμματος και τους άξονες εκφράζει αριθμητικά τη μετατόπιση του κινητού κατά το διάστημα 0 – 5 s.
Επομένως Δx = 50 m.

Εναλλακτικά, για τον υπολογισμό της μετατόπισης μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι εξισώσεις της ΕΟ επιβραδυνόμενης κίνησης:

$\upsilon = \upsilon_0 - |\alpha|\, t$ (1) και

$\Delta x = \upsilon_0\, \mathrm{t} - |\alpha|\, t^2$ (2).

Θέτοντας υ=0 και απαλείφοντας τον χρόνο βρίσκουμε

$$\Delta x = \frac{\upsilon_0{}^2}{2|\alpha|} = 50 \text{ m.}$$

Β2.

Α) Σωστή απάντηση είναι η (β).

Β) Ενδεικτική Αιτιολόγηση-

Στην αρχική θέση της η σφαίρα έχει:

δυναμική ενέργεια $U_{\alpha\rho\chi} = mgh$ = 120 J, ενώ η αρχική κινητική ενέργεια είναι $K_{\alpha\rho\chi} = 0$.

Στην θέση που απέχει $h - h/3 = 2h/3$ έδαφος έχει δυναμική ενέργεια $U = 2mgh/3$ = 80 J.

Εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας μεταξύ των δύο θέσεων της σφαίρας λαμβάνουμε:

$K + U = K_{\alpha\rho\chi} + U_{\alpha\rho\chi}$, δηλ. $K = 40$ J.

Εναλλακτικά

Μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας

$K - K_{\alpha\rho\chi} = W_B = mgh/3$ από όπου προκύπτει $K = K_{\alpha\rho\chi} + mgh/3 = 40$ J

Β1.

Α) Σωστή απάντηση είναι η (β)

Β) Ενδεικτική Αιτιολόγηση-

Όταν βρεθούν στην ίδια θέση τα δύο κινητά, θα ισχύει

$$x_A = x_B,$$

οπότε

$$6t = 2t^2 \text{ ή}$$
$$2t^2 - 6t = 0 \text{ ή}$$
$$2t\,(t-3) = 0$$

απ΄ όπου προκύπτει

$$t = 0 \text{ και } t = 3$$

Οπότε, μετά την εκτός από την αρχική θέση στην οποία βρίσκονται τα κινητά τη χρονική στιγμή $t = 0$, θα συναντηθούν ξανά τη χρονική στιγμή $t_1 = 3$ s.

Β2.

Α) Σωστή απάντηση είναι η (β).

Β) Ενδεικτική Αιτιολόγηση-

Στην αρχική θέση της η σφαίρα έχει δυναμική ενέργεια

$$U_{αρχ} = mgh = 120 \text{ J},$$

ενώ η αρχική κινητική ενέργεια είναι $K_{αρχ} = 0$.

Στην θέση που απέχει $h - h/3 = 2h/3$ έδαφος έχει δυναμική ενέργεια

$$U = 2mgh/3 = 80 \text{ J}.$$

Εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας μεταξύ των δύο θέσεων της σφαίρας:

$$K + U = K_{αρχ} + U_{αρχ}, \text{ λαμβάνουμε } K = 40 \text{ J}.$$

Εναλλακτικά

Μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας

$K - K_{αρχ} = W_B = mgh/3$ από όπου προκύπτει $K = K_{αρχ} + mgh/3 = 40$ J

ΘΕΜΑ Β

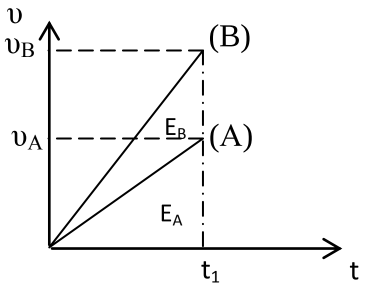
Β$_1$

Ενδεικτική απάντηση

Α) Σωστή απάντηση είναι η **γ**.

Β) Αιτιολόγηση

Η μετατόπιση Δx_A και Δx_B των κινητών Α και Β ισούται αλγεβρικά με τα εμβαδά των χωρίων που περικλείονται μεταξύ της γραφικής παράστασης της ταχύτητας υ – t και του άξονα των χρόνων.



$\Delta x_A = E_A$ ή με βάση το σχήμα $E_A = \frac{1}{2} \cdot \upsilon_A \cdot t_1$ (1)

$\Delta x_B = E_B$ ή με βάση το σχήμα $E_B = \frac{1}{2} \cdot \upsilon_B \cdot t_1$ (2)

Από το διάγραμμα έχουμε: $\upsilon_A < \upsilon_B$ (3)

Σύμφωνα με τις (1), (2) και (3) είναι $E_A < E_B$, άρα $\Delta x_A < \Delta x_B$

Β$_2$.

Ενδεικτική απάντηση

Α) Σωστή απάντηση είναι η **β**.

Β) Αιτιολόγηση

Η συνισταμένη των δυνάμεων $\vec{F_1}$ και $\vec{F_2}$ έχει μέτρο $F_{ολ} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = 5$ N

Από τον 2^ο νόμο του Νεύτωνα $F_{ολ} = m \cdot α$ προκύπτει η επιτάχυνση $α = 2{,}5$ m/s^2

B_1

Ενδεικτική απάντηση
Α) Σωστή απάντηση είναι η **β**.

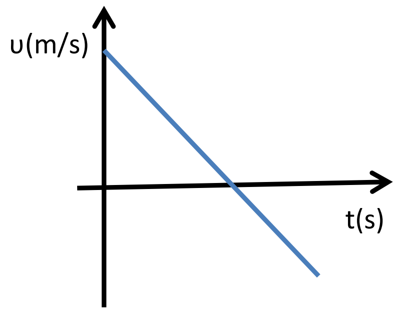
Β) <u>Αιτιολόγηση</u>
Τη χρονική στιγμή t_1 το αυτοκίνητο απέχει από το σηματοδότη απόσταση x_A, ενώ το ποδήλατο απέχει απόσταση x_Π.
Οι εξισώσεις μετατόπισης της ευθύγραμμης ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης είναι:

$\Delta x_A = \frac{1}{2} \bullet \alpha_A \bullet t_1^2$, $\Delta x_\Pi = \frac{1}{2} \bullet \alpha_\Pi \bullet t_1^2$ και $\Delta x_A = 4 \bullet \Delta x_\Pi$
άρα
$\frac{1}{2} \bullet \alpha_A \bullet t_1^2 = \frac{1}{2} \bullet \alpha_\Pi \bullet t_1^2$
Προκύπτει :
$\alpha_A = 4 \bullet \alpha_\Pi$

B_2
Ενδεικτική απάντηση
Α) Σωστή απάντηση είναι η **γ**.

Β) <u>Αιτιολόγηση</u>
Η χρονική εξίσωση της ταχύτητας $\upsilon = 5 \bullet t$ έχει την ίδια μορφή με $\upsilon = \alpha \bullet t$ της ευθύγραμμης ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης
Άρα $\alpha = 5\ m/s^2$ = σταθερή
Αφού η επιτάχυνση είναι σταθερή και η μάζα του σώματος είναι επίσης σταθερή, επομένως και η τιμή της συνισταμένης των δυνάμεων, σύμφωνα με τον 2^o νόμο του Νεύτωνα $F = m \bullet \alpha$, είναι επίσης σταθερή.

Β1.



Ενδεικτική απάντηση

Α) Σωστή απάντηση είναι η **α**.

Β) <u>Αιτιολόγηση</u>

Το διάστημα που εξαρτάται από τη διαδρομή που ακολουθεί το κινητό, είναι πάντα θετικός αριθμός. Άρα όταν το σώμα κινείται το διάστημα πάντα αυξάνεται, αφού δεν εξαρτάται από τη φορά της κίνησης.

Β2.

Ενδεικτική απάντηση

Α) Σωστή απάντηση είναι η **β**.

Β) <u>Αιτιολόγηση</u>

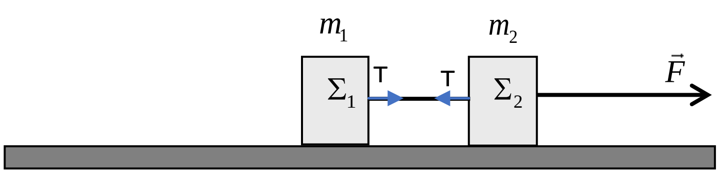
Ισχύει $m_1 = m_2 = m$

Για κάθε κιβώτιο:

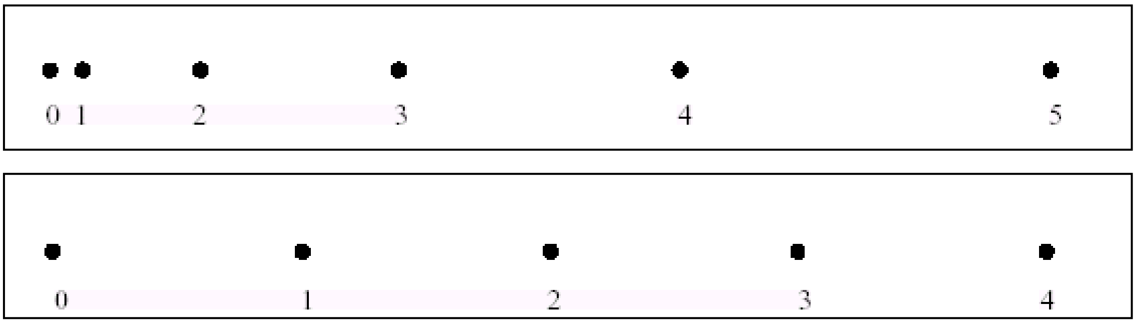
$\Sigma F_{\Sigma 1} = T = m_1 \bullet a = m \bullet a$ (1)

$\Sigma F_{\Sigma 2} = F - T = m_2 \bullet a = m \bullet a$ (2)

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει : F – T = T άρα F = 2T.



B₁.



Ενδεικτική απάντηση

Α) Σωστή απάντηση είναι η **γ**.

Β) <u>Αιτιολόγηση</u>

Το χρονικό διάστημα μεταξύ δύο διαδοχικών κουκίδων από 2s μέχρι 3s είναι $\Delta t=1s$

Από τη μέτρηση της μετατόπισης μεταξύ των κουκίδων 2 και 3 σε κάθε χαρτοταινία διαπιστώνουμε ότι η $\Delta x_2 > \Delta x_1$.

Από τη σχέση της μέσης ταχύτητας $\upsilon = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ προκύπτει $\upsilon_2 > \upsilon_1$.

B₂.

Ενδεικτική απάντηση

Α) Σωστή απάντηση είναι η **γ**.

Β) <u>Αιτιολόγηση</u>

Το έργο για την άνοδο $W_{B(άνοδος)} = - B \cdot h$

Το έργο για την κάθοδο $W_{B(κάθοδος)} = + B \cdot h$

Συνολικά το έργο : $W_B = W_{B(άνοδος)} + W_{B(κάθοδος)} = 0$

Το έργο του βάρους για τη συνολική μετατόπιση είναι μηδέν.

B$_1$.

A) Σωστή απάντηση είναι η **β**.

B) <u>Αιτιολόγηση</u>

Καθώς το κέρμα ανεβαίνει, το βάρος έχει κατεύθυνση αντίθετη της μετατόπισης. Άρα για οποιαδήποτε μετατόπιση h, ανεβαίνοντας είναι

$$W(\text{ανόδου}) = -B \cdot h$$

Καθώς το κέρμα κατεβαίνει το βάρος έχει την ίδια κατεύθυνση με αυτή της κίνησης. Άρα

$$W(\text{καθόδου}) = +B \cdot h$$

B$_2$.

Ενδεικτική απάντηση

A) Σωστή απάντηση είναι η **γ**.

B) <u>Αιτιολόγηση</u>

Η μεταλλική σφαίρα αφήνεται να πέσει ελεύθερα από ύψος h. Δηλαδή εκτελεί ελεύθερη πτώση.

Η ταχύτητα της μεταλλικής σφαίρας ακριβώς πριν ακουμπήσει το έδαφος είναι:

$$\upsilon_{\tau\varepsilon\lambda} = g \cdot \Delta t \quad (1)$$

Το ύψος που διένυσε είναι:

$$h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot \Delta t^2 \quad (2)$$

Με την αντικατάσταση του Δt της σχέσης (1) στη (2) προκύπτει:

$$h = \frac{\upsilon_{\tau\varepsilon\lambda}^2}{2\,g} \qquad (3)$$

Εφόσον η $\upsilon_{\tau\varepsilon\lambda} = \upsilon$ ισχύει

$$h = \frac{\upsilon^2}{2\,g} \qquad (4)$$

Όταν η σφαίρα ακριβώς πριν ακουμπήσει στο έδαφος έχει διπλάσια ταχύτητα 2υ, τότε το ύψος γίνεται με την αντικατάσταση της σχέσης (4)

$$h' = \frac{(2\upsilon)^2}{2\,g} = 4\,h$$

Εναλλακτικός τρόπος λύσης:

Από την Α. Δ. Μ. Ε. για την πτώση της σφαίρας από ύψος h και ταχύτητα υ ακριβώς πριν ακουμπήσει στο έδαφος, έχουμε:

$$K_{\alpha\rho\chi} + U_{\alpha\rho\chi} = K_{\tau\varepsilon\lambda} + U_{\tau\varepsilon\lambda}$$

$$0 + mgh = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \upsilon + 0$$

Προκύπτει

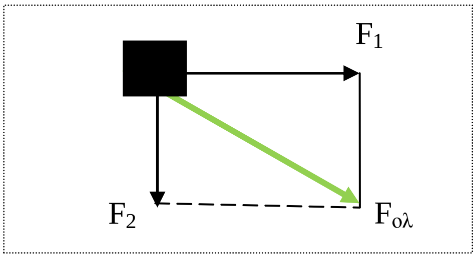
$$h = \frac{\upsilon^2}{2\,g}$$

Το νέο ύψος h’ για ταχύτητα 2υ, ακριβώς πριν ακουμπήσει στο έδαφος είναι:

$$h' = \frac{(2\upsilon)^2}{2\,g} = 4\,h$$

B$_1$.

Ενδεικτική απάντηση
A) Σωστή απάντηση είναι η **α**.



B) <u>Αιτιολόγηση</u>
Οι δυνάμεις F_1 και F_2 είναι κάθετες μεταξύ τους.

$$F_{ολ} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$$

Η συνισταμένη έχει μέτρο

$$F_{ολ} = 5 \text{ N}$$

Από το $2^ο$ νόμο του Νεύτωνα ισχύει:

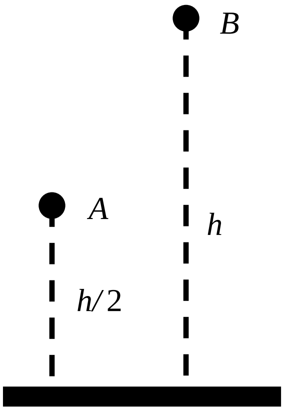
$$F_{ολ} = m \cdot a$$

Άρα η επιτάχυνση είναι

$$α = 2,5 \frac{m}{s^2}$$

B$_2$.

Ενδεικτική απάντηση
A) Σωστή απάντηση είναι η γ.



B) <u>Αιτιολόγηση</u>
Για τη σφαίρα Α είναι:

$$\frac{h}{2} = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_A^2 \text{ ή } \quad h = g \cdot t_A^2 \quad (1)$$

Για τη σφαίρα Β είναι:

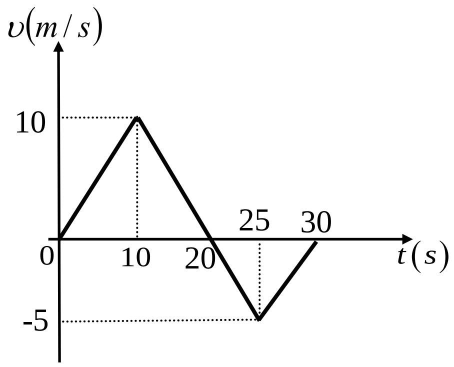
$$h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_B^2 \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$$g \cdot t_A^2 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_B^2$$

Συνεπώς

$$t_B = \sqrt{2} \cdot t_A$$



B$_1$.
A) Σωστή απάντηση είναι η **γ**.

B) <u>Αιτιολόγηση</u>
Η μετατόπιση της μπίλιας πάνω στον άξονα x΄x είναι:
$\Delta x_{0\to30} = \Delta x_{0\to20} + \Delta x_{20\to30}$ (1)
Από τη γραφική παράσταση υπολογίζεται το εμβαδόν των τριγώνων
$\Delta x_{0\to20} = E_{\mu\beta1} = \frac{1}{2} \bullet 20 \bullet (+10)\ m = 100\ m$
$\Delta x_{20\to30} = E_{\mu\beta2} = \frac{1}{2} \bullet 10 \bullet (-5)\ m = -25\ m$
Από τη σχέση (1) προκύπτει:
$\Delta x_{0\to30} = 75\ m$ και άρα $x_{30}=75m$

B2.
Ενδεικτική απάντηση
A) Σωστή απάντηση είναι η **α**.

B) <u>Αιτιολόγηση</u>
Η μεταλλική σφαίρα εκτελεί ελεύθερη πτώση και κινείται από το σημείο Α στο σημείο Β.
Από το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας και έργου (Θ. Μ. Κ. Ε.) ισχύει:

$$K_B - K_A = W_B$$

$$\frac{1}{2} \bullet m \bullet (2\upsilon)^2 - \frac{1}{2} \bullet m \bullet \upsilon^2 = W_B \qquad \text{Άρα}$$

$$\Delta U = -W_B = -3K$$

Ή εναλλακτικά
Για την κίνηση της μεταλλικής σφαίρας ισχύει η διατήρηση της μηχανικής ενέργειας (στη σφαίρα ασκείται μόνο η δύναμη του βάρους):

$$\Delta E_{ΜΗΧΑΝΙΚΗ}=0 \quad ή \quad \Delta(K+U)=0 \quad ή \quad \Delta U=-\Delta K \quad (1)$$

$$\Delta K = K_{ΤΕΛ} - K_{ΑΡΧ} \ \ ή \ \ \Delta K = \frac{1}{2}\, m\cdot(2\upsilon)^2 - \frac{1}{2}\, m\cdot\upsilon^2 \ \ ή \ \ \Delta K = 3K_{ΑΡΧ} \qquad (2)$$

Από (1) και (2) καταλήγουμε: $\Delta U=-3K_{ΑΡΧ}$ ή $\Delta U=-3K$

Β₁.

Α) Σωστή απάντηση είναι η **β**.

Β) <u>Ενδεικτική Αιτιολόγηση</u>
Για την ελεύθερη πτώση που εκτελεί η πέτρα Β ισχύει:

$$h_B = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_B^2 \quad (1)$$

$$\text{Ισχύει } t_A = 2t_B$$

Για την ελεύθερη πτώση που εκτελεί η πέτρα Α ισχύει:

$$h_A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_A^2 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot (2t_B)^2 \quad (2)$$

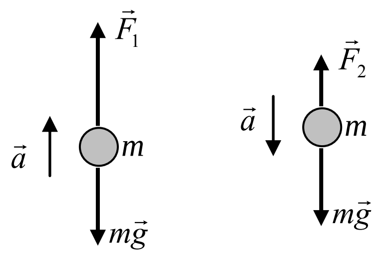
Από το συνδυασμό με τη σχέση (1) και (2) προκύπτει:

$$h_A = 4h_B$$

Β₂.

Α) Σωστή απάντηση είναι η **α**.

Β) <u>Ενδεικτική Αιτιολόγηση</u>
Όταν η μεταλλική σφαίρα κινείται προς τα πάνω, με εφαρμογή του 2ου ν. του Νεύτωνα προκύπτει:



$$\Sigma F_1 = m \cdot \alpha$$

$$F_1 - m \cdot g = m \cdot \alpha \quad (1)$$

Όταν η μεταλλική σφαίρα κινείται προς τα κάτω, με εφαρμογή του 2ου ν. του Νεύτωνα προκύπτει:

$$\Sigma F_2 = m \cdot \alpha$$

$$m \cdot g - F_2 = m \cdot \alpha \quad (2)$$

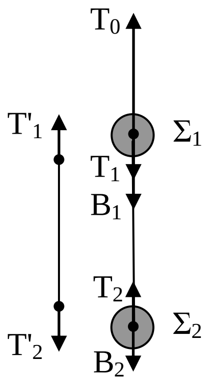
Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει:

$$F_1 - m \cdot g = m \cdot g - F_2$$

Τελικά προκύπτει

$$F_1 + F_2 = 2 \cdot m \cdot g$$

Β1.



Α) Οι δυνάμεις που ασκούνται στη σφαίρα Σ_2 είναι:

το βάρος της B_2, και η τάση του νήματος T_2.

Οι δυνάμεις που ασκούνται στη σφαίρα Σ_1 είναι:

το βάρος της B_1, και οι τάσεις των νημάτων T_1 και T_0.

Ενδεικτική Αιτιολόγηση

Β) Για τη σφαίρα Σ_2 ισχύει

$$\Sigma F_2=0 \text{ ή } T_2=B_2 \text{ (1).}$$

Για τη σφαίρα Σ_1 ισχύει

$$\Sigma F_1=0 \text{ ή } T_0=B_1+T_1 \text{ (2).}$$

Αν T'_1 και T'_2 οι δυνάμεις που ασκούν οι σφαίρες στο νήμα που τις ενώνει ισχύει με βάση τον 3ο νόμο του Νεύτωνα

$$T'_1=T_1 \text{ (3) και } T'_2=T_2 \text{ (4).}$$

Το νήμα είναι αβαρές και τεντωμένο, επομένως $T'_1=T'_2$ και με την βοήθεια των σχέσεων (3) και (4),

$$T_1=T_2 \text{ (5).}$$

$$\text{Τελικά } T_2=T_1=B_2 \text{ και } T_0=B_1+B_2.$$

Β2. Σωστή η απάντηση **(γ)**

Ενδεικτική Αιτιολόγηση

Το αυτοκίνητο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση.

Γενικά από τις εξισώσεις κίνησης, απαλείφοντας τον χρόνο έχουμε:

$$\upsilon^2 = \upsilon_0^2 - 2 \cdot \alpha \cdot d.$$

Η τελική ταχύτητα είναι μηδέν και λύνοντας ως προς d λαμβάνουμε:

$$d = \frac{\upsilon_0^2}{2\alpha} \text{ (1).}$$

Εφαρμόζοντας τη σχέση (1) για αρχικές ταχύτητες $\upsilon_0=\upsilon_1$ και $\upsilon_0=\upsilon_2$ έχουμε

$$d_1 = \frac{\upsilon_1^2}{2\alpha} \text{ και } d_2 = \frac{\upsilon_2^2}{2\alpha}.$$

Διαιρώντας κατά μέλη και λαμβάνοντας υπόψη ότι $\upsilon_2 = 2\upsilon_1$ έχουμε $d_2 = 4d_1$

B1. Σωστή η απάντηση **(β)**

Ενδεικτική Αιτιολόγηση

Κατά την ελεύθερη πτώση ισχύει η Αρχή διατήρησης της Μηχανικής ενέργειας (E_{MHX}=σταθερή) :

$E_{MHX} = K + U$ ή $K = E_{MHX} - U$ ή $K = E_{MHX} - mgy$.

Η γραφική παράσταση της τελευταίας σχέσης είναι μια ευθεία με αρνητική κλίση ($-mg$).

B2. Σωστή η απάντηση **(β)**

Ενδεικτική Αιτιολόγηση

Εφαρμόζοντας το 2ο νόμο του Νεύτωνα (λαμβάνοντας θετική τη φορά κίνησης της σφαίρας) έχουμε:

$\Sigma F = ma$ ή $F - mg = m2g$ ή $F = 3mg$ και τελικά $B = \frac{F}{3}$

Β1. Σωστή η απάντηση **(γ)**

Ενδεικτική Αιτιολόγηση

Σύμφωνα με το διάγραμμα στο χρονικό διάστημα (2→ 3s) η ταχύτητα είναι σταθερή, επομένως σύμφωνα με τον 1ο νόμο του Νεύτωνα η συνισταμένη δύναμη που ασκείται στο αυτοκίνητο είναι μηδέν.

Β2. Σωστή η απάντηση **(β)**

Ενδεικτική Αιτιολόγηση

Εφαρμόζοντας το 2ο νόμο του Νεύτωνα και στις δύο περιπτώσεις (λαμβάνοντας θετική τη φορά κίνησης του κιβωτίου) έχουμε:

Περίπτωση Ι: $\Sigma F_I = ma$ ή $F - T = ma_1$

Περίπτωση ΙΙ: $\Sigma F_{II} = ma$ ή $2F - T = ma_2$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις πιο πάνω σχέσεις έχουμε $F = ma_2 - ma_1$ ή $F = 4$ N.

Β1. Σωστή η απάντηση **(α)**

Ενδεικτική Αιτιολόγηση

Σε όλη τη διάρκεια της κίνησης του, δηλαδή στο χρονικό διάστημα $0 \rightarrow t_2$, το αυτοκίνητο εκτελεί επιταχυνόμενη κίνηση, επομένως η ταχύτητά του συνεχώς αυξάνεται.

Β2. Σωστή η απάντηση **(β)**

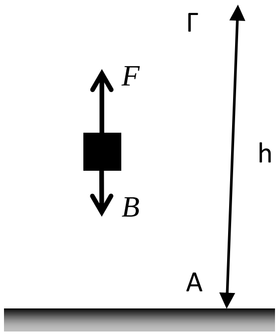
Ενδεικτική Αιτιολόγηση

Εφαρμόζοντας το 2ο νόμο του Νεύτωνα και στις δύο περιπτώσεις (λαμβάνοντας θετική τη φορά κίνησης του κιβωτίου) έχουμε:

Περίπτωση Ι: $\Sigma F_I = ma$ ή $F_1 = ma$

Περίπτωση ΙΙ: $\Sigma F_{II} = ma$ ή $F_1 - \frac{F_1}{3} = ma'$ ή $\frac{2F_1}{3} = ma'$

Διαιρώντας κατά μέλη τις πιο πάνω σχέσεις έχουμε τελικά $a' = \frac{2\alpha}{3}$



Β1. Σωστή η απάντηση **(γ)**

Ενδεικτική Αιτιολόγηση

Κατά την άνοδο, στο σώμα ασκούνται η δύναμη $\vec{F}$ και το βάρος $\vec{B}$.

Εφαρμόζοντας το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας από την αρχική θέση Α έως τη θέση Γ που απέχει h από το έδαφος έχουμε:

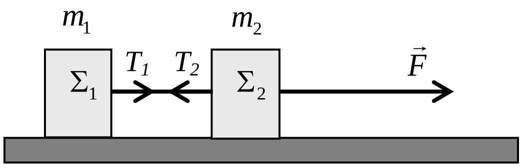
$$\Delta K = \Sigma W \quad \text{ή}$$

$$\Delta K = W_F + W_B \quad \text{ή}$$

$$\Delta K = F \cdot h - m \cdot g \cdot h \quad \text{ή} \quad \Delta K = 50\ \text{J}.$$

Β2. Σωστή η απάντηση **(β)**

Ενδεικτική Αιτιολόγηση



Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στα δύο σώματα κατά την οριζόντια διεύθυνση.

Εφαρμόζοντας το 2ο νόμο του Νεύτωνα ($m_1 = m_2 = m$) έχουμε:

Σώμα 1: $\Sigma F_1 = ma$ ή $T_1 = ma$ (1)

Σώμα 2: $\Sigma F_2 = ma$ ή $F - T_2 = ma$ (2)

Προσθέτοντας κατά μέλη τις πιο πάνω σχέσεις και δεδομένου ότι $\alpha\pi\acute{o}$ 3ο νόμο του Νεύτωνα $T_1 = T_2 = T$ (το νήμα που συνδέει τα δύο σώματα είναι αβαρές και τεντωμένο) έχουμε:

$$F = 2ma \quad \text{ή} \quad \frac{F}{2} = ma \quad (3)$$

Από τις σχέσεις (1) και (3) έχουμε τελικά

$$T = \frac{F}{2}.$$

Β1. Σωστή η απάντηση **(α)**

Ενδεικτική Αιτιολόγηση

Η σφαίρα και στις δύο περιπτώσεις εκτελεί ελεύθερη πτώση, επομένως

στη Γη

$$h = \frac{1}{2} g_{\Gamma} t_{\Gamma}^2$$

στον πλανήτη Α

$$h = \frac{1}{2} g_A t_A^2$$

Από τις παραπάνω σχέσεις έχουμε

$$g_{\Gamma} t_{\Gamma}^2 = g_A t_A^2 \quad ή$$

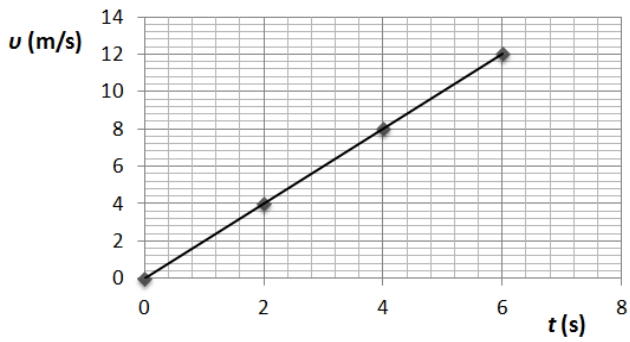
$$g_{\Gamma} t_{\Gamma}^2 = g_A (3t_{\Gamma})^2$$

$$ή \ g_{\Gamma} = 9 g_A.$$

Β2. Α) Το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση.

Χρονική στιγμή t (s)	Επιτάχυνση a (m/s^2)	Ταχύτητα υ (m/s)	Θέση x (m)
0	2	**0**	**0**
2	2	**4**	**4**
4	2	**8**	**16**
6	2	**12**	**36**

Β) Η γραφική παράσταση της τιμής της ταχύτητας του σώματος σε συνάρτηση με το χρόνο για το χρονικό διάστημα 0 s → 6 s δίδεται το διπλανό διάγραμμα.



Γ) Η κλίση της ευθείας στο παραπάνω διάγραμμα ισούται με

$\frac{\Delta\upsilon}{\Delta t}$ ή $\frac{\Delta\upsilon}{\Delta t} = 2\frac{m}{s^2}$ δηλαδή με την επιτάχυνση του σώματος.

Β1. Σωστή η απάντηση **(β)**

Ενδεικτική Αιτιολόγηση

Το έργο του βάρους κάθε σφαίρας ισούται με

$$W_1 = m_1 g h_1 \text{ και}$$
$$W_2 = m_2 g h_2.$$

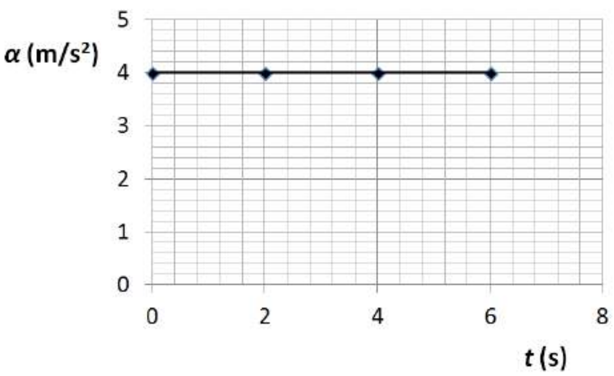
Αλλά

$$W_1 = m_1 g h_1$$
$$\text{ή } W_1 = \frac{m_2}{2} g 2h_2 \text{ ή}$$
$$W_1 = m_2 g h_2 \text{ και τελικά}$$
$$\boxed{W_1 = W_2}$$

Β2. Α) Το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση.

Χρονική στιγμή t (s)	Επιτάχυνση a (m/s^2)	Ταχύτητα υ (m/s)
0	**4**	**0**
2	**4**	**8**
4	**4**	**16**
6	**4**	**24**

Β) Η γραφική παράσταση της επιτάχυνσης του σώματος σε συνάρτηση με το χρόνο για το χρονικό διάστημα 0 s → 6 s δίδεται το διπλανό διάγραμμα.



Γ) Το εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ του οριζόντιου άξονα t και της γραμμής που παριστάνει την επιτάχυνση για το χρονικό διάστημα από 0 → 6 s ισούται με

$$E = 4\frac{m}{s^2} \cdot 6s = 24\frac{m}{s},$$

εκφράζει δηλαδή τη μεταβολή της ταχύτητας ($\Delta\upsilon$) για το χρονικό διάστημα από 0 → 6 s.

Β1. Σωστή η απάντηση **(β)**

Ενδεικτική Αιτιολόγηση

Το έργο του βάρους για μια μικρή μετατόπιση του αλεξιπτωτιστή είναι

$$\Delta W = mg\Delta\psi$$

και ο ρυθμός παραγωγής έργου του βάρους του αλεξιπτωτιστή είναι

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = m \cdot g \cdot \frac{\Delta\psi}{\Delta t} \text{ ή}$$

$$P = m \cdot g \cdot \upsilon \qquad (1)$$

Οι ταχύτητες που απέκτησαν οι αλεξιπτωτιστές μέχρι τη στιγμή που άνοιξαν τα αλεξίπτωτά τους είναι

$$\upsilon_1 = gt_1 \text{ και } \upsilon_2 = gt_2 \text{ ή}$$

$$\upsilon_2 = g2t_1 \text{ ή } \upsilon_2 = 2\upsilon_1 \; (2)$$

Από την (1) $P_2 = mg\upsilon_2 \overset{(2)}{\Rightarrow} P_2 = mg2\upsilon_1$ και τελικά

$$P_2 = 2P_1$$

Β2. Σωστή η απάντηση **(α)**

Ενδεικτική Αιτιολόγηση

Η δύναμη το χρονικό διάστημα 0 s → 1 s είναι σταθερή και το κιβώτιο αρχικά είναι ακίνητο επομένως εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση.

Η ταχύτητα του κιβωτίου τη χρονική στιγμή t = 1 s είναι

$$\upsilon_1 = a\Delta t \text{ ή } \upsilon_1 = \frac{F}{m}\Delta t$$

ταχύτητα του κιβωτίου το χρονικό διάστημα 1 s → 2 s είναι σταθερή, άρα τη χρονική στιγμή

t = 2 s η ταχύτητα του είναι $\upsilon_2 = \upsilon_1$.

Η δύναμη το χρονικό διάστημα 2 s → 3 s είναι σταθερή, με φορά αντίθετη της ταχύτητας, επομένως το κιβώτιο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση.

Η ταχύτητα του κιβωτίου

τη χρονική στιγμή t = 3 s είναι $\upsilon_3 = \upsilon_2 - |\alpha|\Delta t$

$$\text{ή } \upsilon_3 = \frac{F}{m}\Delta t - \frac{F}{m}\Delta t \qquad \text{και τελικά}$$

$$\upsilon_3 = 0\frac{m}{s}.$$

<u>ΘΕΜΑ Β</u>

Β1. Σωστή η απάντηση *(β)*

<u>Ενδεικτική Αιτιολόγηση</u>

Το σώμα εκτελεί ΕΟΜ κίνηση συνεπώς το μέτρο της επιτάχυνσης είναι σταθερό, δηλ. α=σταθ.

Από τον 2^o νόμο του Νεύτωνα: $F = m \cdot a$ συμπεραίνουμε ότι και το μέτρο της δύναμης θα είναι σταθερό δηλ. F= σταθερό.

Συνεπώς σωστή απάντηση η (β)

Β2. Σωστή η απάντηση *(γ)*

<u>Ενδεικτική Αιτιολόγηση</u>

Υπολογισμός τα ταχύτητας του κιβωτίου τη χρονική στιγμή t=3s.

Η κίνηση του κιβωτίου διακρίνεται σε τρία στάδια:

<u>1^o στάδιο: 0-1s</u>

F_1=σταθ. σύμφωνα με τον 2^o ν. Νεύτωνα $\alpha_1 = \frac{F_1}{m}$ =σταθ. δηλ. το κιβώτιο εκτελεί ΕΟΜ κίνηση.

Συνεπώς η ταχύτητα του τη χρονική στιγμή t_1 δίδεται από τη σχέση: $\upsilon_1 = \frac{F_1}{m} \cdot \Delta t_1$ (1)

<u>2^o στάδιο: 1s -2s</u>

F_2=0N σύμφωνα με τον 1^o ν. του Νεύτωνα το κιβώτιο εκτελεί ΕΟΚ. Συνεπώς η ταχύτητα παραμένει σταθερή και τη χρονική στιγμή θα δίδεται από τη σχέση: $\upsilon_2 = \upsilon_1 = \frac{F_1}{m} \cdot \Delta t_1$ (2)

<u>3^o στάδιο: 2s -3s</u>

F_3=σταθερ. σύμφωνα με τον 2^o ν. του Νεύτωνα $\alpha_3 = \frac{F_3}{m}$ το κιβώτιο εκτελεί ΕΟΜ κίνηση επιβραδυνόμενη με αρχική ταχύτητα υ_2. Συνεπώς

$$\upsilon_3 = \upsilon_2 + \frac{F_3}{m}\Delta t_3 \quad \text{και αντικαθιστώντας από τη (2)}$$

$$\upsilon_3 = \frac{F_1}{m} \cdot \Delta t_1 + \frac{F_3}{m} \cdot \Delta t_3 \text{ ή } \boxed{\upsilon_3 = \frac{F_1 \cdot \Delta t_1 + F_3 \cdot \Delta t_3}{m}} \quad (3)$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές από το διάγραμμα λαμβάνουμε: $\upsilon_3 = -10\frac{m}{s}$ $\delta\eta\lambda. \upsilon_3 < 0$

Συνεπώς σωστό το γ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Σωστή η απάντηση *(α)*

Ενδεικτική Αιτιολόγηση

Στον αλεξιπτωτιστή ασκούνται δυο δυνάμεις: το βάρος του w και η αντίσταση του αέρα F_A.

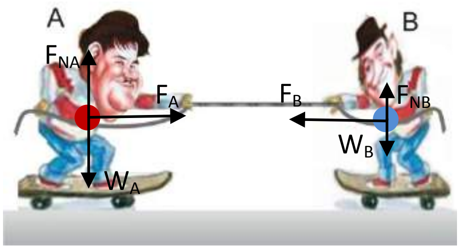
Κατά την κίνηση του αλεξιπτωτιστή το έργο του βάρους είναι παραγόμενο ενώ της αντίστασης του αέρα καταναλισκόμενο.

Εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής κινητικής ενέργειας έργου για την κίνηση του αθλητή:

$\Delta K = W_B + W_{F_A}$ ή $K - 0 = W_B + W_{F_A}$ ή $K = W_B + W_{F_A}$ ή με $W_{F_A} < 0$ επειδή το έργο της F_A καταναλισκόμενο συνεπώς $\boxed{K < W_B}$

Συνεπώς σωστή απάντηση η (α)

Β2. Σωστή η απάντηση *(γ)*



Ενδεικτική Αιτιολόγηση

Στον (Α) ασκούνται οι δυνάμεις:

Από επαφή: η κάθετη δύναμη από το δάπεδο (F_{NA}),

η δύναμη F_A από το σκοινί

Από απόσταση: η δύναμη του βάρους (W_A)

Ισχύει: $F_{NA}= W_A$ και από 2^0 νόμο του Νεύτωνα για τον (Α) $\boxed{\alpha_A = \frac{F_A}{m_A}}$ (1)

Στον (Β) ασκούνται οι δυνάμεις:

Από επαφή: η κάθετη δύναμη από το δάπεδο (F_{NB}), η δύναμη F_B από το σκοινί

Από απόσταση: η δύναμη του βάρους (W_B)

Ισχύει: $F_{NB}= W_B$ και από 2^0 νόμο του Νεύτωνα για τον (Β) $\boxed{\alpha_B = \frac{F_B}{m_B}}$ (2)

Επειδή το σκοινί δεν έχει μάζα ισχύει: $F_A=F_B=F$ (3)

επομένως από (1) και (2) (3) και τη σχέση $m_A=2\cdot m_B$ προκύπτει: $\boxed{\alpha_B = 2\cdot\alpha_A}$

Συνεπώς σωστό το γ

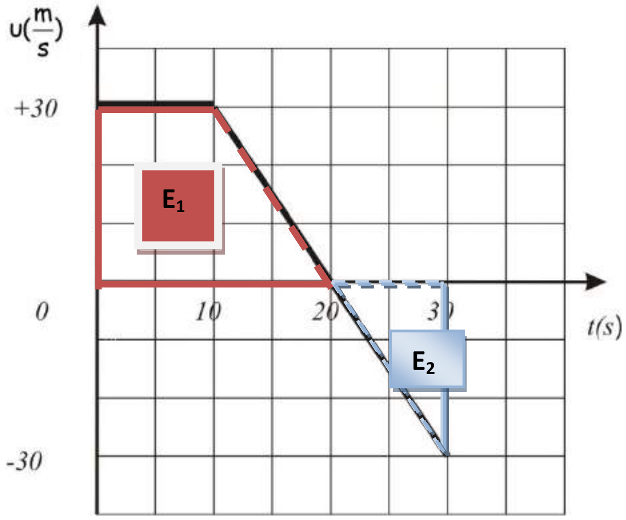
ΘΕΜΑ Β

Β1. Σωστή η απάντηση *(Β)*

Ενδεικτική Αιτιολόγηση

Το έργο του βάρους είναι ανεξάρτητο της διαδρομής που ακολουθεί το σώμα. Εφόσον η αρχική και η τελική θέση είναι ίδιες το έργο του βάρους θα είναι μηδέν

Συνεπώς σωστή απάντηση η (β)



Β2. Σωστή η απάντηση *(α)*

Ενδεικτική Αιτιολόγηση

Η μετατόπιση προκύπτει από το εμβαδόν που περικλείεται από τη γραμμή της γραφικής παράστασης της ταχύτητας σε συνάρτηση με το χρόνο και τον άξονα του χρόνου. Συγκεκριμένα ισχύει:

$\Delta x = E_1 - E_2$

Από το τραπέζιο του σχήματος προκύπτει:

$$E_1 = \frac{10+20}{2} \cdot 30m \quad \boxed{\Delta x_1 = +450m} \quad (1)$$

Από το τραπέζιο του σχήματος προκύπτει:

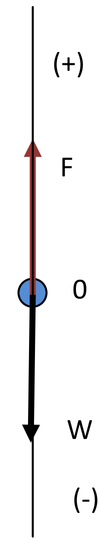
$$E_2 = \frac{10 \cdot 30}{2} m \qquad \boxed{\Delta x_2 = -150m} \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει: $\Delta x = +300m$

Συνεπώς σωστό το (α)

8029

ΘΕΜΑ Β



Β1. Σωστή η απάντηση *(β)*

Ενδεικτική Αιτιολόγηση

Στον πίθηκο ασκούνται οι δυνάμεις

Από επαφή: από το κλαδί η F

Από απόσταση το βάρος W

Ο πίθηκος ισορροπεί:

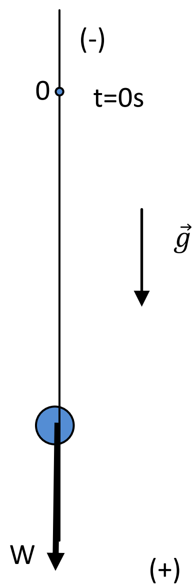
Από τον 1ο ν. του Νεύτωνα ισχύει: $\Sigma F = 0$ ή $F - W = 0$ ή $F = W$ ή $\boxed{F = m \cdot g}$

Με αριθμητική αντικατάσταση F=400N. Από τον 3ο ν. του Νεύτωνα ισχύει: F'=F όπου F' η δύναμη που ασκείται από τον πίθηκο στο κλαδί

Συνεπώς σωστή η απάντηση η*(β)*

Β2. Σωστή η απάντηση *(α)*

Ενδεικτική Αιτιολόγηση



Η σφαίρα εκτελεί ΕΟΜ κίνηση με επιτάχυνση $\vec{g}$.

Με θέση x=+10m, $\alpha = +10\frac{m}{s^2}$, t=2s και ζητούμενο την αρχική ταχύτητα

Από την εξίσωση κίνησης έχουμε: $x = \upsilon_0 \cdot t + \frac{1}{2} g \cdot t^2$

Αντικαθιστώντας τις αρχικές τιμές λαμβάνουμε:

$$+10m = \upsilon_0 \cdot 2s + \frac{1}{2} 10\frac{m}{s^2} \cdot (2s)^2 \boxed{\upsilon_0 = -5\ \frac{m}{s}} \quad (1)$$

Η σχέση (1) δείχνει ότι η αρχική ταχύτητα έχει φορά προς τα άνω, συνεπώς σωστή απάντηση είναι η (α)

ΘΕΜΑ Β

Β1. Σωστή η απάντηση *(β)*

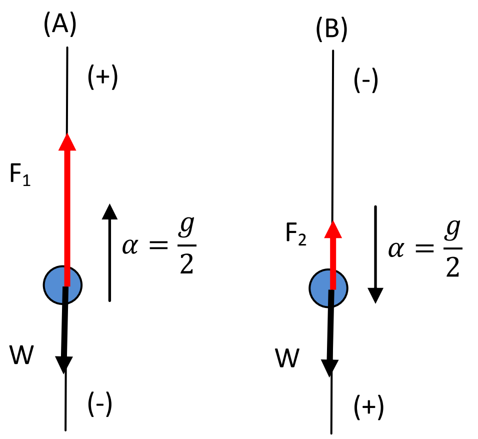
Ενδεικτική Αιτιολόγηση

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα μεταβολής κινητικής ενέργειας - έργου για την μπάλα:

$$\Delta K = W_{F_{o\lambda}} \text{ ή } K_{\tau\varepsilon\lambda\iota\kappa\acute{\eta}} - K_{\alpha\rho\chi\iota\kappa\acute{\eta}} = W_{F_{o\lambda}} \text{ ή } 4 \cdot K_{\alpha\rho\chi\iota\kappa\acute{\eta}} - K_{\alpha\rho\chi\iota\kappa\acute{\eta}} = W \text{ ή } \boxed{3 \cdot K_{\alpha\rho\chi\iota\kappa\acute{\eta}} = W}$$

Συνεπώς σωστή η απάντηση η *(β)*

Β2. Σωστή η απάντηση *(β)*



Ενδεικτική Αιτιολόγηση

Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στο κιβώτιο και εφαρμόζουμε τον 2^0 νόμο του Νεύτωνα με θετική φορά όπως αυτή που φαίνεται στα αντίστοιχα σχήματα:

Σχήμα (Α)

$$F_1 - W = m \cdot \frac{g}{2} \text{ ή } F_1 = \frac{W}{2} + W \text{ ή}$$

$$\boxed{F_1 = \frac{3 \cdot W}{2}} \quad (1)$$

Σχήμα (Β)

$$W - F_2 = m \cdot \frac{g}{2} \text{ ή } F_2 = W - \frac{W}{2} \text{ ή}$$

$$\boxed{F_2 = \frac{W}{2}} \quad (2)$$

Συγκρίνοντας την (1) και (2) συμπεραίνουμε: $\boxed{F_1 = 3 \cdot F_2}$

Συνεπώς σωστή απάντηση η (β)

ΘΕΜΑ Β

Β1.

Σημείο	Κινητική ενέργεια (J)	Δυναμική ενέργεια (J)	Μηχανική ενέργεια (J)
A	**20**	80	100
B	40	**60**	100
Γ	**90**	10	100

Ενδεικτική Αιτιολόγηση

Στο σώμα ασκείται μόνο η δύναμη του βάρους συνεπώς μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας (ΑΔΜΕ) για την κίνηση της μπάλας:

$$E_{MHXANIKH} = K + U \quad (1)$$

Κάνουμε τις αντίστοιχες αριθμητικές αντικαταστάσεις στην σχέση (1)

Σημείο Α: $100J = K_A + 80J$ $\boxed{K = 20J}$ (2)

Σημείο Β: Από την ΑΔΜΕ $E_{MHXANIKH,B} = E_{MHXANIKH,A}$ ή $\boxed{E_{MHXANIKH,B} = 100J}$

$100J = 40J + U_B$ $\boxed{U_B = 60J}$ (3)

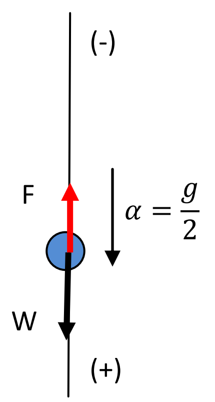
Σημείο Γ: Από την ΑΔΜΕ $E_{MHXANIKH,\Gamma} = E_{MHXANIKH,A}$ ή $\boxed{E_{MHXANIKH,\Gamma} = 100J}$

$100J = K_\Gamma + 10J$ $\boxed{K = 90J}$ (4)

Β2. Σωστή η απάντηση *(α)*

Ενδεικτική Αιτιολόγηση

Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στο κιβώτιο και εφαρμόζουμε τον 2^{ο} νόμο του Νεύτωνα με θετική φορά όπως αυτή που φαίνεται στο σχήμα:



$$W - F = m \cdot \frac{g}{2} \text{ ή } F = W - \frac{W}{2} \text{ ή}$$

$$\boxed{F = \frac{W}{2}}$$

Συνεπώς σωστή απάντηση η (α)

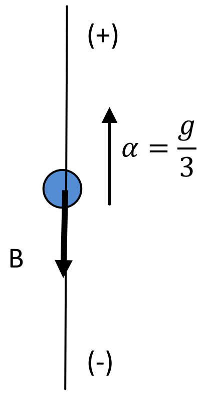
8032

ΘΕΜΑ Β

Β1. Σωστή η απάντηση *(β)*

Ενδεικτική Αιτιολόγηση

Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στο κιβώτιο και εφαρμόζουμε τον 2ο νόμο του Νεύτωνα με θετική φορά όπως αυτή που φαίνεται στο σχήμα:



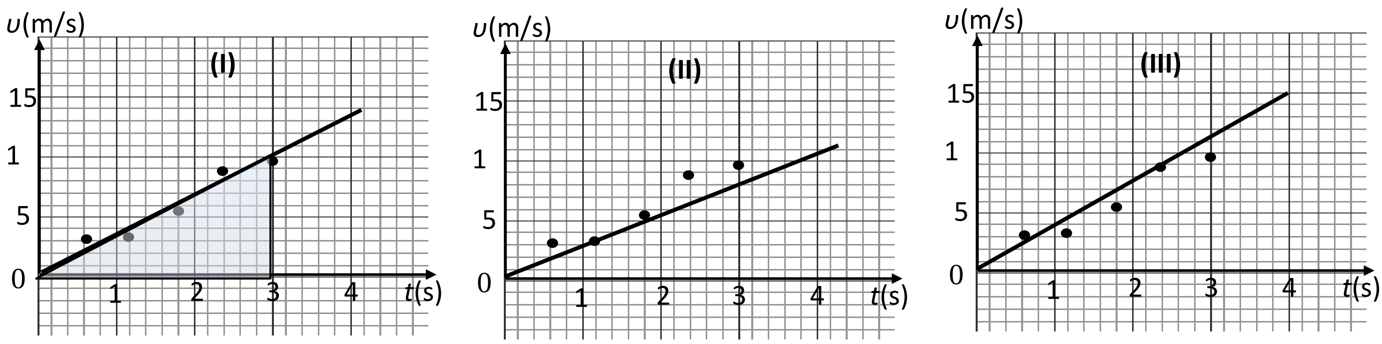
$$F - B = m \cdot \frac{g}{3} \quad \text{ή} \quad F = \frac{W}{3} + W \quad \text{ή}$$

$$\boxed{F = \frac{4 \cdot W}{3}} \quad (1)$$

Από την (1) προκύπτει ότι σωστή απάντηση είναι η (β)

Β2. Σωστή η απάντηση *(α)*

Ενδεικτική Αιτιολόγηση



Από τα τρία διαγράμματα στο (Ι) έχει χαραχθεί σωστά η ευθεία που παριστάνει τα πειραματικά δεδομένα διότι σε αυτή τα πειραματικά σημεία βρίσκονται εκατέρωθεν.

Η επιτάχυνση υπολογίζεται από την κλίση της παραπάνω ευθείας, δηλ. στο ορθογώνιο τρίγωνο του σχήματος (Ι) υπολογίζω την εφαπτόμενη της γωνίας Ο:

$$\alpha = \frac{1\frac{m}{s}}{3s} \qquad \text{ή} \qquad \boxed{\alpha = \frac{1}{3}\frac{m}{s^2}}$$

ΘΕΜΑ Β

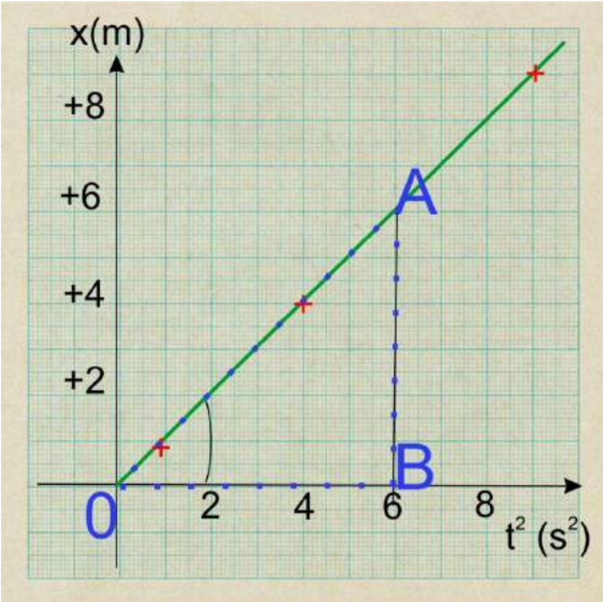
Β1. Σωστή η απάντηση *(β)*

Ενδεικτική Αιτιολόγηση

Σχεδιάζουμε γραφική παράσταση της θέσης σε συνάρτηση με το τετράγωνο του χρόνου.

Παρατηρούμε ότι τα σημεία βρίσκονται σέ μια ευθεία γραμμή που διέρχεται από την αρχή των αξόνων δηλ. η θέση συνδέεται με το χρόνο με μια εξίσωση της μορφής:

$x = \kappa \cdot t^2$ με κ την κλίση της ευθείας και στην περίπτωσή μας είναι η εφαπτόμενη της γωνίας Ο στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΒ:



$$\kappa = \frac{AB}{OB}$$

$$\kappa = \frac{6m}{6s^2}$$

$$\kappa = 1\frac{m}{s^2} \qquad (1)$$

Από το νόμο της μετατόπισης στην ΕΟΜ κίνηση και τη σχέση (1) προκύπτει για την επιτάχυνση της κίνησης:

$$\frac{\alpha}{2} = 1\frac{m}{s^2} \qquad \text{ή} \qquad \boxed{\alpha = 2\frac{m}{s^2}}$$

συνεπώς από τον 2ο νόμο του Νεύτωνα η συνισταμένη δύναμη θα είναι 2000N και από το νόμο της ταχύτητας στην ΕΟΜ κίνηση η ταχύτητα για t=2s χωρίς αρχική ταχύτητα προκύπτει:

$$\upsilon = 4\frac{m}{s}$$

Συνεπώς σωστή απάντηση η β

Β2. Σωστή η απάντηση *(γ)*

Οι δυο σφαίρες εκτελούν ελεύθερη πτώση συνεπώς με εφαρμογή του Θεωρήματος Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας για τη κίνησή τους θα ισχύει για την κινητική ενέργεια που φθάνουν στο έδαφος:

Σφαίρα Α: $K_1 = m \cdot g \cdot h_1 \qquad K_1 = m \cdot g \cdot 2h_2$

$$K_1 = 2 \cdot K_2$$

Επομένως σωστή η (γ)

Β1.

Ύψος από το έδαφος h (m)	Κινητική ενέργεια K (J)	Δυναμική ενέργεια U (J)	Ταχύτητα υ (m/s)
180	**0**	**3600**	**0**
100	**1600**	**2000**	**40**
0	**3600**	**0**	**60**

Ενδεικτική αιτιολόγηση

Κατά την ελεύθερη πτώση ισχύει η Αρχή διατήρησης της Μηχανικής ενέργειας:

$$E = K + U = \text{σταθερή} \;\; \text{κα ίση με}$$

$$U_{στο\ h=180m} = 3600\ \text{J} = K_{στο\ h=0m}$$

Επίσης από την εξίσωση κίνησης υπολογίζεται ο χρόνος πτώσης:

$$y = 180 - h = \frac{1}{2}\,gt^2 \text{ ή } t = \sqrt{\frac{2(180-h)}{g}},$$

και στη συνέχεια από την εξίσωση της ταχύτητας στην ελεύθερη πτώση, $\upsilon = gt$, συμπληρώνεται η τελευταία στήλη του πίνακα.

Η ταχύτητα εναλλακτικά μπορεί να υπολογισθεί και από τη σχέση (1):

$$K = \frac{1}{2}m \cdot \upsilon^2 \quad \text{ή} \quad \boxed{\upsilon = \sqrt{\frac{2K}{m}}} \qquad (1)$$

Β2. Σωστή η απάντηση (γ).

Ενδεικτική αιτιολόγηση

Το αυτοκίνητο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση χωρίς αρχική ταχύτητα και το διάστημα που διανύει υπολογίζεται από την εξίσωση:

$$S = \frac{1}{2}at^2, \text{ οπότε για } t_2 = 2t_1\ θα\ είναι\ S_2 = 4S_1$$

B$_1$. Σωστή η απάντηση (α).

<u>Ενδεικτική αιτιολόγηση</u>

Εφαρμόζοντας τον δεύτερο νόμο του Newton λαμβάνοντας ως θετική τη φορά της επιτάχυνσης:

Πριν την κατάργηση της

$$\overrightarrow{F_2} : F_1 - F_2 = m\,a\ (1),$$

Και μετά την κατάργηση της

$$\overrightarrow{F_2} : F_1 = 2\,m\,a \text{ ή λόγω της } (1),$$

$$F_1 = 2\,(F_1 - F_2) \text{ ή}$$

$$F_1 = 2F_2$$

B2. Σωστή η απάντηση (γ).

<u>Ενδεικτική αιτιολόγηση</u>

Το κινητό έχει εξίσωση κίνησης,

$$x = 10 + 5t \ \text{(S.I)},$$

δηλαδή της μορφής

$$x = x_0 + ut, \text{ με } x_0 = 10\ m \text{ και } u = +5\ m/s = \text{σταθερή}.$$

Άρα το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση.

8036

ΘΕΜΑ Β

Β$_1$. Σωστή η απάντηση (α).

Ενδεικτική αιτιολόγηση

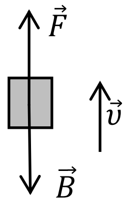
Η βούρτσα και ο κουβάς με την μπογιά εκτελούν ελεύθερη πτώση. Η δύναμη της βαρύτητας σε κάθε σώμα έχει μέτρο ανάλογο της μάζας του,

$$B = m \cdot g,$$

καθώς η επιτάχυνση της βαρύτητας $\vec{g}$ κατά την πτώση δεν αλλάζει.

Β2. Σωστή η απάντηση (γ).

Ενδεικτική αιτιολόγηση



Έστω $\vec{F}$ η δύναμη που ασκεί ο γερανός στο κιβώτιο και $\vec{B}$ το βάρος του. Εφόσον το κιβώτιο ανεβαίνει με σταθερή ταχύτητα ισχύει ο πρώτος νόμος του Newton:

$$\sum \vec{F} = 0 \text{ ή } \textit{για τα μέτρα των δυνάμεων ισχύει:}$$

$$F = B = m \cdot g \qquad (1)$$

Άρα για την ισχύ του γερανού ισχύει:

$$P = \frac{W_F}{\Delta t} = \frac{F \cdot \Delta y}{\Delta t} = \frac{m \cdot g \cdot \Delta y}{\Delta t} \quad \text{ή}$$

$$P = m \cdot g \cdot \upsilon \qquad (2),$$

Εφόσον ο δεύτερος γερανός ανυψώνει σώμα διπλάσιας μάζας με ίδια ταχύτητα, όπως προκύπτει από την (2) θα έχει διπλάσια ισχύ σε σχέση με τον πρώτο.

B$_1$. Σωστή η απάντηση (γ).

<u>Ενδεικτική αιτιολόγηση</u>

Το εμβαδό που περικλείεται από τη γραφική παράσταση ταχύτητας-χρόνου ($\upsilon = f(t)$) και του άξονα του χρόνου είναι αριθμητικά ίσο με το διάστημα που διήνυσε κάθε αυτοκίνητο. Οπότε:

Αυτοκίνητο Α: $S_A = \frac{(\upsilon_0+3\upsilon_0)t_1}{2} = \frac{4\upsilon_0 t_1}{2}$

Αυτοκίνητο Β:

$$S_B = \frac{\upsilon_0 t_1}{2}$$

Άρα, $S_A = 4\ S_B$

B$_2$. Σωστή η απάντηση (β).

<u>Ενδεικτική αιτιολόγηση</u>

Εφαρμόζοντας το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας:

i) από την αρχική θέση του κιβωτίου και για μετατόπιση Δx_1 :

$$K_{\tau\varepsilon\lambda}\text{-}K_{\alpha\rho\chi} = W_F \text{ ή}$$

$$K_1 - 0 = F\Delta x_1 \text{ ή}$$

$$\frac{1}{2}M\upsilon_1^2 = F\Delta x_1 (1) ,$$

ii) από την αρχική θέση του κιβωτίου και για μετατόπιση 4 Δx_1:

$$K_{\tau\varepsilon\lambda}\text{-}K_{\alpha\rho\chi} = W_F \text{ ή}$$

$$K_2 - 0 = F4\Delta x_1 \text{ ή}$$

$$\frac{1}{2}M\upsilon_2^2 = 4F\Delta x_1 \text{ και λόγω της (1),}$$

$$\frac{1}{2}M\upsilon_2^2 = 4\frac{1}{2}M\upsilon_1^2 \text{ ή}$$

$$\boxed{\upsilon_2 = 2\upsilon_1}$$

B$_1$. Σωστή η απάντηση (β).

Ενδεικτική αιτιολόγηση

Από το 2^o νόμο του Newton,

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

και τον ορισμό της επιτάχυνσης,

$$\vec{\alpha} = \frac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t},$$

προκύπτει ότι τα διανύσματα της συνισταμένης δύναμης της επιτάχυνσης και της μεταβολής της ταχύτητας είναι πάντοτε ομόρροπα.

B2. Σωστή η απάντηση (γ).

Ενδεικτική αιτιολόγηση

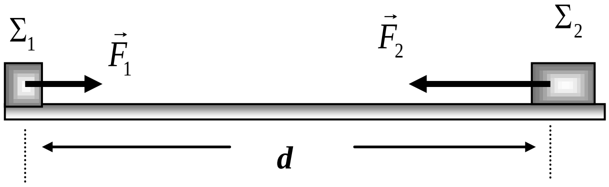
Το κιβώτιο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με επιτάχυνση μέτρου 2 m / s^2. Από το 2^o νόμο του Newton υπολογίζεται το μέτρο της δύναμης $\vec{F}$:

$$F = ma = 4N$$

Το έργο που παράγει η δύναμη $\vec{F}$ όταν το κιβώτιο έχει μετατοπιστεί κατά Δx = 4 m είναι:

$$W_F = F\Delta x \sigma \upsilon \nu 0 = 16\text{J}$$

ΘΕΜΑ Β



Β$_1$. Δύο μικροί κύβοι Σ_1 και Σ_2 έχουν μάζες m_1 και m_2 αντίστοιχα, για τις οποίες ισχύει $m_2 = 2\cdot m_1$, είναι αρχικά ακίνητοι πάνω σε λείο οριζόντιο δάπεδο και απέχουν απόσταση ***d***. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ ασκούμε ταυτόχρονα δυο οριζόντιες σταθερές δυνάμεις $\overrightarrow{F_1}$ στο κύβο Σ_1 και $\overrightarrow{F_2}$ στο κύβο Σ_2, με αποτέλεσμα αυτοί να κινηθούν πάνω στην ίδια ευθεία και σε αντίθετες κατευθύνσεις.

Α) Να επιλέξετε τη σωστή πρόταση.

Αν οι κύβοι συναντώνται στο μέσο της μεταξύ τους απόστασης, τότε για τα μέτρα των δυνάμεων $\overrightarrow{F_1}$ και $\overrightarrow{F_2}$ θα ισχύει:

α) $F_1 = 2\cdot F_2$ **β)** $F_1 = F_2$ **γ)** $F_2 = 2\cdot F_1$

Μονάδες 4

Β) Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Β$_2$. Ένα αυτοκίνητο κινείται ευθύγραμμα ομαλά. Ένα ακίνητο περιπολικό, μόλις περνά το αυτοκίνητο από μπροστά του, αρχίζει να το καταδιώκει με σταθερή επιτάχυνση.

Α) Να επιλέξετε τη σωστή πρόταση.

Τη στιγμή που το περιπολικό φθάνει το αυτοκίνητο:

α) η ταχύτητα του περιπολικού είναι ίση με την ταχύτητα του αυτοκινήτου

β) η ταχύτητα του περιπολικού είναι διπλάσια από την ταχύτητα του αυτοκινήτου

γ) η ταχύτητα του αυτοκινήτου είναι τριπλάσια από την ταχύτητα του περιπολικού.

Μονάδες 4

Β) Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Β1. Σωστή απάντηση η (γ).

Ενδεικτική αιτιολόγηση

Σύμφωνα με το 2^{o} νόμο του Newton για το κιβώτιο:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \quad \text{ή}$$

$$\vec{a} = \frac{\sum \vec{F}}{m}$$

Για τη χρονική διάρκεια $0 \rightarrow t_1$ η συνισταμένη δύναμη $\vec{F}$ έχει σταθερό μέτρο συνεπώς και η επιτάχυνση θα είναι σταθερού μέτρου και το κιβώτιο θα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση.

Για τη χρονική διάρκεια $t_1 \rightarrow t_2$ η συνισταμένη δύναμη $\vec{F}$ είναι θετική και το μέτρο της μειώνεται έως τη χρονική στιγμή t_2 που μηδενίζεται.

Συνεπώς και η επιτάχυνση θα είναι θετική και το μέτρο της μειώνεται έως τη χρονική στιγμή t_2 που μηδενίζεται.

Το κιβώτιο θα εκτελεί ευθύγραμμη επιταχυνόμενη κίνηση οπότε η ταχύτητα του θα αυξάνεται συνεχώς έως τη χρονική στιγμή t_2.

Β2. Σωστή απάντηση η (α).

Ενδεικτική αιτιολόγηση

Κατά την αλληλεπίδραση (σύγκρουση) ισχύει ο $3^{ος}$ νόμος του Newton:

$$\overrightarrow{F_{M,\mu}} = -\overrightarrow{F_{\mu,M}},$$

όπου $\overrightarrow{F_{M,\mu}}$ είναι η δύναμη που ασκεί ο Μάριος στη μαμά του και $\overrightarrow{F_{\mu,M}}$ η δύναμη που ασκεί η μαμά στον Μάριο.

Οι δυνάμεις έχουν ίσα μέτρα και προκαλούν αντίστοιχες επιβραδύνσεις σύμφωνα με τον 2^{o} νόμο του Newton:

$$F_{M,\mu} = F_{\mu,M} \text{ ή } m_\mu a_\mu = m_M a_M \text{ ή } \frac{m_\mu}{m_M} = \frac{a_M}{a_\mu}$$

Εφόσον, $m_\mu > m_M$ $τότε$ $a_\mu < a_M$

B₁. Σωστή η απάντηση (β).

Ενδεικτική αιτιολόγηση

Κατά την ελεύθερη πτώση ισχύει η Αρχή διατήρησης της Μηχανικής ενέργειας:

$$E = K + U \ = σταθερή = m \cdot g \cdot h \ (1)$$

και $U = m \cdot g \cdot y \ με \ 0 \leq y \leq h \ όπου$ y το ύψος από το έδαφος.

Σύμφωνα με την (1) για την κινητική ενέργεια

$$K = E - U = m \cdot g \cdot h - m \cdot g \cdot y \ με \ 0 \leq y \leq h$$

B₂. Σωστή η απάντηση (γ).

Ενδεικτική αιτιολόγηση

Η στατική τριβή είναι μεταβλητή δύναμη και η μέγιστη τιμή της είναι η οριακή τριβή.

Το σώμα ξεκινά να κινείται όταν η εξωτερική δύναμη $\vec{F}$ γίνει οριακά μεγαλύτερη από την οριακή τριβή.

Η τριβή ολίσθησης σύμφωνα με τα πειραματικά δεδομένα είναι σταθερή και έχει μέτρο μικρότερο από την οριακή τριβή.

B1.
Σωστή απάντηση η (β)

Ενδεικτική Αιτιολόγηση

Εφαρμόζοντας θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας και έργου

$$\Delta K = W_F + W_T \quad (1)$$

επειδή το κιβώτιο κινείται με σταθερή ταχύτητα θα είναι

$$\Delta K = 0 \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) λαμβάνουμε:

$$W_F + W_T = 0 \quad ή \quad W_T = - W_F$$

B2.

t (s)	x (m)	$\upsilon(\frac{m}{s})$	$\alpha(\frac{m}{s^2})$
0	0	**-2m/s**	**$+6m/s^2$**
1	+1	**+4m/s**	
2	+8	**+10m/s**	

Ενδεικτική Αιτιολόγηση

Οι εξισώσεις της ευθύγραμμης ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης είναι

$$\upsilon = \upsilon_0 + \alpha t \quad (1)$$

$$x = x_0 + \upsilon_0 t + ½\, \alpha t^2 \quad (2)$$

Αν θέσουμε $t = 0$, επειδή $x = 0$, θα είναι $x_0 = 0$. Επομένως η εξίσωση (2) γίνεται

$$x = \upsilon_0 t + ½\, \alpha t^2 \quad (3).$$

Αν στις (1) και (3) θέσουμε

t =1, x =1 και t =2, x = 8,

από το σύστημα που προκύπτει βρίσκουμε

υ_o = -2m/s, υ_1 = 4m/s, υ_2 = 10m/s και α = 6m/s^2.

Β1.
Σωστή απάντηση η (β)

<u>Ενδεικτική Αιτιολόγηση</u>

Σύμφωνα με τον 2ο Νόμο του Νεύτωνα

$$\vec{\alpha} = \frac{\vec{F}}{m}.$$

Επομένως η επιτάχυνση θα μεταβάλλεται όπως η δύναμη.

Β2.
Σωστή απάντηση η (α).

<u>Ενδεικτική Αιτιολόγηση</u>

Στην περίπτωση (Ι) η μετατόπιση του σώματος στο χρονικό διάστημα Δt είναι

$$\Delta x_{(I)} = \tfrac{1}{2}\, \alpha\, (\Delta t)^2.$$

Στην περίπτωση (ΙΙ) η μετατόπιση στο ίδιο χρονικό διάστημα θα είναι

$$\Delta x_{(II)} = \tfrac{1}{2}\, \alpha'(\Delta t)^2.$$

Από το 2ο Νόμο του Νεύτωνα:

$$\alpha = \frac{F_1}{m} \text{ και } \alpha' = \frac{F_1 + F_2}{m},$$

$$\text{οπότε } \alpha < \alpha' \text{ άρα και } \Delta x_{(I)} < \Delta x_{(II)}. \ (1)$$

$$\text{Αλλά } W_{F1(I)} = F_1\, \Delta x_{(I)} \text{ και } W_{F1(II)}) = F_1\, \Delta x_{(II)} \ (2)$$

Από (1) και (2) συμπεραίνουμε:

$$W_{F1(I)} < W_{F1(II)})$$

Β1.
Σωστή απάντηση η (γ).

Ενδεικτική Αιτιολόγηση

Από τον $2^{ο}$ Νόμο του Νεύτωνα γνωρίζουμε ότι $F = m\,α$. Επομένως στο χρονικό διάστημα 0 s → t_1 επειδή $F > 0$ και F = σταθερή θα είναι $α > 0$ και $α$ = σταθερή. Δηλαδή η κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη συνεπώς το μέτρο της ταχύτητας και άρα και η κινητική ενέργεια αυξάνονται.
Τη χρονική στιγμή t_1 η ταχύτητα $υ_1$ δίνεται από τη σχέση:

$$υ_1 = \frac{2F}{m} \cdot t_1 \qquad (1)$$

Στο χρονικό διάστημα $t_1 \to t_2$ επειδή $F = 0$ η κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλή συνεπώς το μέτρο της ταχύτητας και άρα και η κινητική ενέργεια παραμένουν σταθερά.
Η ταχύτητα $υ_2$ τη χρονική στιγμή t_2 δίνεται από τη σχέση:

$$υ_2 = υ_1 = \frac{2F}{m} \cdot t_1 \qquad (2)$$

Στο χρονικό διάστημα $t_2 \to t_3$ επειδή $F < 0$ και F = σταθερή θα είναι $α < 0$ και $α$ = σταθερή. Δηλαδή η κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη συνεπώς το μέτρο της ταχύτητας και άρα και η κινητική ενέργεια μειώνονται.
Τη χρονική στιγμή t_3 το σώμα έχει ταχύτητα $υ_3$ που υπολογίζεται από τη σχέση:

$$υ_3 = υ_2 \cdot t_1 - \frac{F}{m} \cdot t_1 \qquad (3)$$

Συνδυάζοντας την (2) και τη (3) λαμβάνουμε:

$$υ_3 = \frac{F}{m} \cdot t_1 \neq 0$$

Μετά τη χρονική στιγμή t_3 είναι ευθύγραμμη ομαλή με την ταχύτητα $υ_3$ που έχει αποκτήσει το σώμα τη χρονική στιγμή αυτή.

Β2.
Σωστή απάντηση η (β).

Ενδεικτική Αιτιολόγηση

Από τις εξισώσεις της ευθύγραμμης ομαλά επιβραδυνόμενης κίνησης

$$υ = υ_0 - αt \text{ και } S = υ_0 t - ½\, αt^2,$$

αν θέσουμε $υ = 0$ βρίσκουμε ότι ο χρόνος που απαιτείται μέχρι να σταματήσει το σώμα είναι

$$t_1 = \frac{υ_0}{α} \quad (1)$$

και το αντίστοιχο διάστημα

$$S_1 = \frac{υ_0^2}{2α}.$$

Αν η αρχική ταχύτητα είναι $2υ_0$ οι αντίστοιχες σχέσεις γίνονται

$t_2 = \frac{2υ_0}{α}$ και $S_2 = \frac{4υ_0^2}{2α}$ Οπότε από (1) προκύπτει: $t_2 = 2 \cdot t_1$.

Β1.
Σωστή απάντηση η (α).

Ενδεικτική αιτιολόγηση

Εφαρμόζοντας το θεώρημα μεταβολής της Κινητικής Ενέργειας-Έργου για κάθε σώμα, έχουμε

$$\Delta K_1 = W_F \text{ ή } -K_1 = -FS_1$$
$$\Delta K_2 = W_F \text{ ή } -K_2 = -F\,S_2.$$

Από τις σχέσεις αυτές προκύπτει

$$S_1 = S_2.$$

Β2.
Σωστή απάντηση: «Ναι» μόνο στο σώμα Β.

Ενδεικτική αιτιολόγηση

Τα σώματα Α, Γ και Δ εκτελούν ευθύγραμμη ομαλή κίνηση, γιατί:
Για το Α και το Δ η μετατόπιση αυξάνεται γραμμικά με το χρόνο.
Για το Γ παρατηρούμε ότι η επιτάχυνση είναι μηδέν.
Επομένως σύμφωνα με τον 1^o Νόμο του Νεύτωνα δεν δρά επάνω τους δύναμη.

Για το σώμα Β η ταχύτητα αυξάνεται γραμμικά με το χρόνο και η εξίσωσή της είναι της μορφής $\upsilon = \upsilon_0 + at$.
Άρα το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση και σύμφωνα με το 2^o Νόμο του Νεύτωνα δρα επάνω του σταθερή δύναμη.

ΣΩΜΑ	Απαιτείται δράση δύναμης για να αιτιολογηθεί η κίνηση του σώματος. (ναι/όχι)
Α	**ΟΧΙ**
Β	**ΝΑΙ**
Γ	**ΟΧΙ**
Δ	**ΟΧΙ**

Β1.
Σωστή απάντηση η (γ)

Ενδεικτική αιτιολόγηση

Αρχικά ο κύβος έχει επιτάχυνση

$$\alpha = \frac{F}{m} = \frac{\Delta\upsilon}{\Delta t} = 0{,}5 \text{ m/s}^2.$$

Όταν διπλασιαστεί το μέτρο της δύναμης θα έχουμε

$$\alpha' = \frac{2F}{m} = 2\alpha = 1 \text{ m/s}^2.$$

$$\text{Οπότε } \frac{\Delta\upsilon}{\Delta t} = \alpha' \text{ και } \Delta t = 2 \text{ s}.$$

Β2.
Σωστή απάντηση η (α)

Ενδεικτική αιτιολόγηση

Το αυτοκίνητο 2 εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση.
Άρα τη χρονική στιγμή $t = 0$ s δεν είναι δυνατόν να έχει μηδενική ταχύτητα.

Β1.

Ενδεικτική απάντηση

Α) Σωστή απάντηση είναι η **β**.

Β) <u>Ενδεικτική αιτιολόγηση</u>

Οι δυνάμεις είναι αντίθετες σύμφωνα με τον 1^0 Ν. Νεύτωνα διότι το νήμα είναι αβαρές.

Β2.

Ενδεικτική απάντηση

Α) Σωστή απάντηση είναι η **α**.

Β) <u>Ενδεικτική αιτιολόγηση</u>

Το σφυρί εκτελεί ελεύθερη πτώση.
Έστω h_1 τη μετατόπιση του σφυριού μετά από χρόνο t_1
$h_1 = \frac{1}{2}gt_1^2$ για t_1=1s τότε $h_1 = \frac{1}{2}g$ (1)
Θεωρούμε h_2 τη μετατόπιση του σφυριού μετά από χρόνο $t_2=2t_1$ (2)
$h_2 = \frac{1}{2}gt_2^2$
Από την αντικατάσταση της σχέσης(2) και της (1) προκύπτει
$h_2 = \frac{1}{2}g(2^2t_1^2) = 4(\frac{1}{2}gt_1^2) = 4h_1$
Άρα θα είναι 4 ορόφους πιο κάτω.

B1.

A) Σωστή απάντηση είναι η **β**.

Β) Ενδεικτική αιτιολόγηση

Στην ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση ισχύει:

$\upsilon = \alpha t$, $x = \frac{1}{2}at^2$ άρα $t = \sqrt{2\frac{x}{a}}$ και $\upsilon = \sqrt{2xa}$ (1)

Επίσης, ισχύει $\Sigma F = m\alpha$ και με την αντικατάσταση στη σχέση (1) ισχύει $\upsilon^2 = 2x\frac{\Sigma F}{m}$

Για το Α αυτοκίνητο ισχύει $\upsilon_A{}^2 = 2\, x_A \frac{\Sigma F}{m_A}$

Για το Β αυτοκίνητο ισχύει $\upsilon_B{}^2 = 2\, x_B \frac{\Sigma F}{m_B}$

Για $x_A = x_{B=d}$

$\frac{\upsilon_A^2}{\upsilon_B^2} = \frac{m_B}{m_A} = \frac{1000Kg}{4000Kg} = \frac{1}{4}$ άρα $2\upsilon_A = \upsilon_B$

B2.

A) Σωστή απάντηση είναι η **α**.

Β) Ενδεικτική αιτιολόγηση

Το σωστό τρόπο υπολογισμού τον έχει σκεφτεί ο μαθητής Α διότι ο μαθητής Β δε γνωρίζει αν εκτός από τη δύναμη F = 8 N ασκείται στο αμαξάκι και κάποια άλλη δύναμη (όπως π.χ. η τριβή), με αποτέλεσμα η συνισταμένη δύναμη να είναι διαφορετική από 8 Ν.

$\alpha = \frac{\Delta\upsilon}{\Delta t} = \frac{(15-10)^{m}/_{s}}{(2-1)s} = 5\ {}^{m}/_{s^2}$

Β₁.

Α) Σωστή απάντηση είναι η **α**.

Β) <u>Ενδεικτική αιτιολόγηση</u>

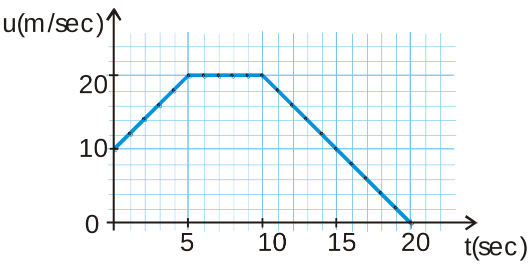
Στα δύο σώματα ασκείται η ίδια δύναμη F, για το ίδιο χρονικό διάστημα Δt.
Για το σώμα Α, η μεταβολή της ταχύτητας είναι $\Delta\upsilon_A = \upsilon$ (1)
Για το σώμα Β, η μεταβολή της ταχύτητας είναι $\Delta\upsilon_B = \upsilon - \upsilon_1$ (2)
Από τη σύγκριση των σχέσεων (1) και (2) προκύπτει: $\Delta\upsilon_A > \Delta\upsilon_B$
Για για το ίδιο χρονικό διάστημα Δt ισχύει:
$\frac{\Delta\upsilon_A}{\Delta t} > \frac{\Delta\upsilon_B}{\Delta t}$ δηλαδή $\alpha_A > \alpha_B$ και εφόσον $\Sigma F_A = \Sigma F_B$ συνεπάγεται $\frac{\Sigma F}{m_A} > \frac{\Sigma F}{m_B}$
Δηλαδή $m_A < m_B$
Συνεπώς σωστή είναι η πρόταση α).

Β₂.
Α) Ο παραπάνω συλλογισμός είναι **Λάθος**.
Β) <u>Ενδεικτική αιτιολόγηση</u>

Από τη γραφική παράσταση, για t = 0 s μέχρι και t = 5 s παρατηρούμε ότι η ταχύτητα είναι $\upsilon_{αρχ} = 0$ m/s και $\upsilon_{τελ} = 10$ m/s:

$\alpha_{0\text{-}5} = \frac{|\Delta\upsilon|}{|\Delta t|} = \frac{(10-0)m/s}{(5-0)s} = \frac{10}{5} = 2\ m/s^2$

Από τη γραφική παράσταση, για t = 10 s μέχρι και t = 20 s παρατηρούμε ότι η ταχύτητα είναι $\upsilon_{αρχ} = 10$ m/s και $\upsilon_{τελ} = 20$ m/s:



$\alpha_{10\text{-}20} = \frac{|\Delta\upsilon|}{|\Delta t|} = \frac{|(20-0)|m/s}{(20-10)s} = \frac{20}{10} = 2\ m/s^2$

Παρατηρούμε ότι οι ισχύει $|\alpha_{0\text{-}5}| = |\alpha_{10\text{-}20}|$
Ο συλλογισμός του μαθητή είναι λάθος διότι πρέπει να υπολογίζουμε τη μεταβολή της ταχύτητας σε κάθε χρονικό διάστημα Δt .

B1.

A) Σωστές είναι 10, 8, 4, 0.

B) <u>Ενδεικτική αιτιολόγηση</u>

Στο σώμα ασκούνται η κατακόρυφη δύναμη F, το βάρος Β και η κάθετη αντίδραση Ν από το δάπεδο. Όσο η δύναμη F έχει μέτρο F ≤ B, (B = 10 N), καθώς το μέτρο της F θα αυξάνεται, το σώμα δεν θα κινείται, οπότε αλλάζει το μέτρο της δύναμης N, ώστε να ισχύει ΣF=0.

Επειδή ΣF=0

F + N – B = 0 ή N = B – F ή N = 10 – F

Βάσει της τελευταίας σχέσης συμπληρώνουμε τη δεύτερη στήλη του πίνακα.

F	N
0	**10**
2	**8**
6	**4**
10	**0**

B2.

A) Σωστή απάντηση είναι η **Όχι**.

B) <u>Ενδεικτική αιτιολόγηση</u>

Δίδεται ότι το σώμα φτάνει στο έδαφος με ταχύτητα 5 m/s.

Από το θεώρημα της διατήρησης της μηχανικής ενέργειας ισχύει:

$E_{τελ} – E_{αρχ} = 0$

$(K_{τελ}+U_{τελ}) – (K_{αρχ}+U_{αρχ}) = 0$

$$\left(\frac{1}{2}mv^2 + 0\right) - (0 + mgh) = 0$$

$υ = \sqrt{2gh} = 10$ m/s

Παρατηρούμε ότι δεν ισχύει το θεώρημα της διατήρησης της μηχανικής ενέργειας διότι η ταχύτητα που φτάνει στο έδαφος είναι 5 m/s.

Ενδεικτική Λύση

Δ1) Η τριβή ολίσθησης υπολογίζεται από τη μαθηματική σχέση:

$$T = \mu\, m\, g \quad ή \quad T = 10\ \text{N}$$

Δ2) Το έργο της δύναμης F υπολογίζεται από τον τύπο:

$$W_F = F\, \Delta x_1 \qquad (1)$$

Θα πρέπει να υπολογίσουμε τη μετατόπιση του σώματος για το χρόνο που ασκείται η δύναμη F.

Από το 2ο νόμο του Νεύτωνα

$$\Sigma F = F - T = m\alpha$$

προκύπτει ότι το σώμα θα κινηθεί προς την κατεύθυνση της F με επιτάχυνση $\alpha_1 = 10\ \text{m / s}^2$.

Συνεπώς η μετατόπιση του σώματος θα είναι:

$$\Delta x_1 = \frac{1}{2}at^2 = 45\ \text{m}$$

Άρα από την (1) προκύπτει ότι το έργο της F θα είναι

$$W_F = 1350\ \text{J}.$$

Δ3) Όταν παύει να ασκείται η δύναμη F ($t_1 = 3$ s, $\upsilon_o = \alpha_1\, t_1 = 30$ m / s) το σώμα εκτελεί μια ευθύγραμμη επιβραδυνόμενη κίνηση, υπό την επίδραση της τριβής ολίσθησης. Ο 2ος νόμος του Νεύτωνα μας δίνει τη νέα επιτάχυνση $\alpha_2 = 5\ \text{m / s}^2$, που έχει αντίθετη φορά από την ταχύτητα του σώματος.

$$\upsilon = \upsilon_o - \alpha_2 \Delta t$$

Το σώμα θα κινηθεί για Δt=6s μέχρι να σταματήσει. Συνολικός χρόνος κίνησης 9 s.

Δ4) Η μετατόπιση του σώματος για το διάστημα που το σώμα κάνει επιβραδυνόμενη κίνηση θα είναι:

$$\Delta x_2 = \upsilon o \cdot \Delta t - \frac{1}{2}\alpha_2 \cdot \Delta t^2 \quad ή \quad \Delta x_2 = 90\ \text{m}.$$

Άρα η συνολική μετατόπιση του σώματος είναι:

$$\Delta x_{o\lambda} = \Delta x_1 + \Delta x_2 \quad ή \quad \Delta x_{o\lambda} = 135\ \text{m}.$$

Ενδεικτική Λύση

Δ1) Το κιβώτιο Α εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση και από τον 1ο νόμο του Νεύτωνα έχουμε :

$$\Sigma F = 0.$$

Άρα η δύναμη F είναι ίση κατά μέτρο με την τριβή ολίσθησης που εμφανίζεται μεταξύ κιβωτίου και δρόμου.

$$T = \mu\, m\, g.$$

Οπότε και F = 2N

Δ2) Το κιβώτιο για το χρονικό διάστημα από $t = 0\ s$ μέχρι t_1 = 5 s κινείται με σταθερή ταχύτητα, οπότε μετατοπίζεται κατά Δx_1 =50 m. Άρα το έργο της δύναμης F υπολογίζεται από τον τύπο:

$$W_F = F\, \Delta x_1$$

και υπολογίζεται

$$W_F = 100\text{ J}.$$

Δ3) Όταν παύσει να ασκείται η δύναμη F, το κιβώτιο θα κινηθεί ευθύγραμμα υπό την επίδραση της τριβής ολίσθησης, μέχρι να ακινητοποιηθεί.

Με βάση το 2ο νόμο του Νεύτωνα ΣF=mα, η επιβράδυνση που θα έχει το σώμα τότε θα είναι

$$a = 2\text{ m/s}^2 .$$

Η εξίσωση της ταχύτητας για την επιβραδυνόμενη αυτή κίνηση θα είναι:

$$\upsilon = \upsilon o - \alpha t.$$

και τελικά ο χρόνος κίνησης για το διάστημα από t_1 μέχρι να ακινητοποιηθεί υπολογίζεται σε 5s.

Άρα κάνει δύο κινήσεις:

1Η ΚΊΝΗΣΗ: αρχικά Ε.Ο.Κ. για 5s (όπου μετατοπίζεται κατά 50 m) και

2Η ΚΊΝΗΣΗ: στη συνέχεια επιβραδυνόμενη κίνηση για άλλα 5s.

Η μετατόπιση σε αυτό το χρόνο προκύπτει:

$$\Delta x_2 = \upsilon_o\, t - \frac{1}{2} a t^2 = 25\text{ m}.$$

Άρα η συνολική μετατόπιση για όσο κινείται το κιβώτιο είναι: 75 m.

Δ4) Το έργο της τριβής

$$W_T = -T\, \Delta x_2$$

για αυτά τα 25 μέτρα μέχρι να σταματήσει να κινείται θα είναι: W_T = -50J.

Ενδεικτική Λύση

Δ1) Το κιβώτιο Α εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση.

Από τον 1ο νόμο του Νεύτωνα έχουμε:

$$\Sigma F_A = 0.$$

Το δεύτερο κιβώτιο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση.

Από το 2ο νόμο του Νεύτωνα το μέτρο της συνισταμένης δύναμης είναι

$$\Sigma F_B = m a_B \quad \text{ή} \quad \Sigma F_B = 20\ \text{N}$$

με φορά της ΣF_B αντίθετη της αρχικής ταχύτητας υ_0.

Δ2) Συνθήκη συνάντησης : $x_A = x_B$ (1)

$$x_A = \upsilon_A t \quad (2) \qquad \text{και}$$

$$x_B = \upsilon_0 t - \frac{1}{2}\alpha_B t^2 \quad (3)$$

Από την (1), (2) και (3) λαμβάνουμε

$$\upsilon_A t = \upsilon_0 t - \frac{1}{2}\alpha_B t^2$$

και επιλύοντας την εξίσωση ως προς t τελικά λαμβάνουμε:

$$t = 20\ s.$$

Δ3) Η φορά κίνησης του κιβωτίου Α διατηρείται σταθερή.

Η φορά κίνησης του κιβωτίου Β αντιστρέφεται την χρονική στιγμή t_{stop} που η ταχύτητα του μηδενίζεται. Από την εξίσωση ταχύτητας για το Β:

$$\upsilon_B = \upsilon_0 - \alpha t$$

προκύπτει ότι

$$t_{stop} = 15\ \text{s} \ .$$

Συνεπώς τα μέτρα των ταχυτήτων του Α και του Β γίνονται ίσα δυο χρονικές στιγμές όταν:

Α) $\overrightarrow{\upsilon_A}$ και $\overrightarrow{\upsilon_B}$ έχουν ίδια φορά δηλ. $\upsilon_A = \upsilon_B \Rightarrow \upsilon_A = \upsilon_o - \alpha_B t_1$ ή $t_1 = 10\ s$

Β) $\overrightarrow{\upsilon_A}$ και $\overrightarrow{\upsilon_B}$ έχουν αντίθετη φορά δηλ.$-\upsilon_A = \upsilon_B \Rightarrow -\upsilon_A = \upsilon_o - \alpha t_2$ ή $t_2 = 20\ s$

Δ4) Η ταχύτητα του κιβωτίου Α είναι σταθερή οπότε και η κινητική του ενέργεια είναι σταθερή, άρα

$$\Delta K_A = 0\ \text{J}$$

Για το κιβώτιο Β έχουμε

$$\Delta K_B = K_{\tau\epsilon\lambda\iota\kappa\eta} - K_{\alpha\rho\chi\iota\kappa\eta} \qquad \text{ή} \qquad \Delta K_B = \frac{1}{2}m_B\upsilon_A^2 - \frac{1}{2}m_B\upsilon_0^2$$

και τελικά

$$\Delta K_B = -4000\ \text{J}$$

<u>Ενδεικτική Λύση</u>

Δ1) Χρονικό διάστημα 0→2 s:

η ταχύτητα τη χρονική στιγμή t = 0 s έχει τιμή 4 m /s και στη συνέχεια αυξάνει, καθώς εκτελεί μια ευθύγραμμα ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση.

Χρονικό διάστημα 2→6 s :

η ταχύτητα παραμένει σταθερή σε μια ευθύγραμμη ομαλή κίνηση.

Και το χρονικό διάστημα 6→8 s:

το σώμα εκτελεί μια ευθύγραμμα ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση.

Δ2) Κατά τη διάρκεια των πρώτων 2 s της κίνησης η επιτάχυνση είναι σταθερή και η ταχύτητα υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\upsilon = \upsilon_0 + a\,t \quad (1)$$

Με βάση το διάγραμμα και τη σχέση (1) προκύπτει ότι α = 2 m / s^2 .

Σύμφωνα με τον 2^o νόμο του Νεύτωνα: ΣF = 20 N.

Δ3) Μετά το 6^o s το σώμα κινείται με ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση οπότε η επιβράδυνση του σώματος υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\upsilon = \upsilon_6 - a'\,\Delta t$$

Για το χρονικό διάστημα 6→8 s προκύπτει ότι:

a' = 4 m / s^2

και είναι αντίθετης κατεύθυνσης από την ταχύτητα.

Άρα η ταχύτητα του σώματος τη χρονική στιγμή t_2 = 6,5 s θα είναι 6 m / s

$$\text{Άρα η } K_2 = \frac{1}{2}\,m\,\upsilon_2^2 = 180\text{ J}$$

Δ4) Η μέση ταχύτητα μιας μεταβαλλόμενης κίνησης προκύπτει από το πηλίκο της συνολικής μετατόπισης του σώματος, προς το χρονικό διάστημα που κινήθηκε.

Το χρονικό διάστημα (σύμφωνα με το διάγραμμα) είναι 8 s.

Και η συνολική μετατόπιση προκύπτει από το εμβαδό που περικλείει η γραφική παράσταση της μεταβαλλόμενης κίνησης.

Το εμβαδό αυτό μπορεί να υπολογιστεί για τρία επιμέρους σχήματα στα χρονικά διαστήματα 0→2 s, 2→6 s και 6→8 s.

$$\text{Άρα} \quad \upsilon_\mu = \frac{(Εμβαδό\ τραπεζίου)+(Εμβαδό\ παραλληλογράμου)+(Εμβαδό\ Τριγώνου)}{8\,s}$$

$$\upsilon_\mu = 6{,}5\text{ m / s}$$

Ενδεικτική Λύση

Δ1) Η τριβή ολίσθησης υπολογίζεται από τη σχέση:

$$T = \mu\, m\, g \quad ή \quad T = 0{,}4\ \mathrm{N}$$

Δ2) Σύμφωνα με το 2^{o} νόμο του Νεύτωνα η επιτάχυνση με την οποία κινείται το σώμα είναι

$$α = 2\ \mathrm{m / s^2}$$

με φορά αντίθετη προς τη φορά της κίνησης.

Συνεπώς ο χρόνος μέχρι να σταματήσει θα υπολογιστεί από την πιο κάτω σχέση, αφού πρώτα μετατρέψουμε την ταχύτητα σε m / s:

$$\upsilon = \upsilon_o - a\, t \ \ => t = \ 10\ \mathrm{s}$$

Δ3) Το σώμα κάνει ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση, οπότε η μετατόπιση του σώματος θα είναι:

$$\Delta x = \ \upsilon_o t - \frac{1}{2} a t^2 \quad ή \quad \Delta x \ = 100\ \mathrm{m}$$

Δ4) Το έργο της τριβής για αυτά τα 100 μέτρα μέχρι να σταματήσει να κινείται θα είναι:

$$W_T = -T\, \Delta x \quad ή \quad W_T = -\ 40\ \mathrm{J}$$

Ενδεικτική Λύση

Δ1) α) χρονικό διάστημα $0 \to 5$ s,
Σταθερή δύναμη άρα και σταθερή επιτάχυνση, οπότε έχουμε μια ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση. Επιτάχυνση με θετική τιμή, άρα ευθύγραμμα ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση.

β) χρονικό διάστημα $5 \to 10$ s,
Μηδενική δύναμη, άρα μηδενική επιτάχυνση, άρα σταθερή ταχύτητα.
Το σώμα κάνει ευθύγραμμη ομαλή κίνηση.
γ) χρονικό διάστημα $10 \to 15$ s,
Παρόμοια με το (α) αλλά με αρνητική επιτάχυνση, άρα ευθύγραμμα ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση.

Δ2) Με βάση το 2^o νόμο του Νεύτωνα

$$\Sigma F = m\alpha$$

η επιτάχυνση του σώματος για το χρονικό διάστημα $0 \to 5$ s είναι

$$\alpha_1 = 10 \text{ m / s}^2.$$

Άρα η ταχύτητα τη χρονική στιγμή $t_1 = 5$ s θα είναι

$$\upsilon = a_1 \cdot t_1 \quad \text{ή} \quad \upsilon = 50 \text{ m / s}$$

Δ3) Το χρονικό διάστημα $0 \to 10\ s$ το σώμα κάνει δύο κινήσεις, άρα το συνολικό διάστημα που θα διανύσει θα είναι το άθροισμα των μετατοπίσεων κατά τη διάρκεια των δύο κινήσεων.

$$x = \frac{1}{2}at_1^2 + \upsilon t_2 \quad \text{ή} \quad x = 375\ m$$

Δ4) Το έργο της συνισταμένης δύναμης θα είναι θετικό για χρονικό διάστημα $0 \to 5$ s, μηδενικό για το χρονικό διάστημα $5 \to 10$ s και αρνητικό για το χρονικό διάστημα $10 \to 15$ s.
Τα επιμέρους έργα θα υπολογιστούν από τη σχέση

$$W_{\Sigma F} = \Sigma F\ \Delta x$$

για κάθε μετατόπιση.

$$\Delta x_1 = \frac{1}{2}\alpha 1 t_1^2 \quad \text{ή} \quad \Delta x_1 = 125\ m$$

$$\Delta x_3 = \upsilon \Delta t_3 - \frac{1}{2}a'\Delta t_3^2 \quad \mu\varepsilon\ \ a' = 5\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \qquad \text{Οπότε:} \quad \boxed{\Delta x_3 = 187{,}5\ m}$$

$$W_{o\lambda} = W_1 + W_3 \quad \text{ή} \quad \boxed{W_{o\lambda} = 312{,}5\ J}$$

Ενδεικτική Λύση

Δ1) Αρχικά η πέτρα έχει κινητική και δυναμική ενέργεια

$$E_{MHX} = \frac{1}{2}\, m\, \upsilon_A^2 + m\, g\, H \quad ή \quad E_{MHX} = 15\, J$$

Δ2) Η πέτρα έχει στο σημείο Α αρχικό ύψος 10 m και θα συνεχίσει να ανεβαίνει κατά h μέχρι να μηδενιστεί η ταχύτητα του.
Ο χρόνος κίνησης και το ύψος h θα υπολογιστούν από τις σχέσεις (1) και (2) :

$$\upsilon = \upsilon_A - g\, t \qquad (1) \quad με\ \upsilon=0$$

$$h = \upsilon_A\, t - \frac{1}{2}\, g\, t^2 \qquad (2)$$

Το ανώτερο ύψος που φτάνει η πέτρα θα ισούται με το άθροισα

H + h = 15 m.

Στο ανώτερο σημείο θα έχει δυναμική ενέργεια 15 J.

Δ3) Η μηχανική ενέργεια παραμένει σταθερή σε όλη τη διάρκεια της κίνησης του σώματος[1], μέχρι να πέσει στη θάλασσα.
Όταν λοιπόν η κινητική και η δυναμική ενέργεια της πέτρας είναι ίσες και το άθροισμά τους ισούται με τη μηχανική ενέργεια, προκύπτει ότι κάθε μια ενέργεια θα έχει τιμή δηλαδή
K=U και $E_{MHX} = \mathrm{K} + \mathrm{U}$ συνεπώς $K = U = \frac{E_{MHX}}{2}$ ή $K = U = \frac{15}{2}\, J$ ή $K = U = 7{,}5\ \mathrm{J}$ (3)

Συνεπώς από τον τύπο της δυναμικής ενέργειας: $U = m\, g\, h$ και τη σχέση (3) προκύπτει το ύψος h΄ = 7,5 m από την επιφάνεια της θάλασσας, όπου οι δυναμική ενέργεια είναι ίση με την κινητική.

Δ4) Ο χρόνος ανόδου, από (1) υπολογίστηκε σε 1 s.
Ο χρόνος καθόδου (ελεύθερη πτώση) για ύψος 15 m υπολογίζεται σε $\sqrt{3}$ s από την πιο κάτω σχέση:

$$h = \frac{1}{2}\, g\, t_2^2$$

Συνεπώς η πέτρα κινήθηκε συνολικά για (1+ $\sqrt{3}$) s.

---

[1] (η πέτρα κινείται μόνο υπό την επίδραση του βάρους)

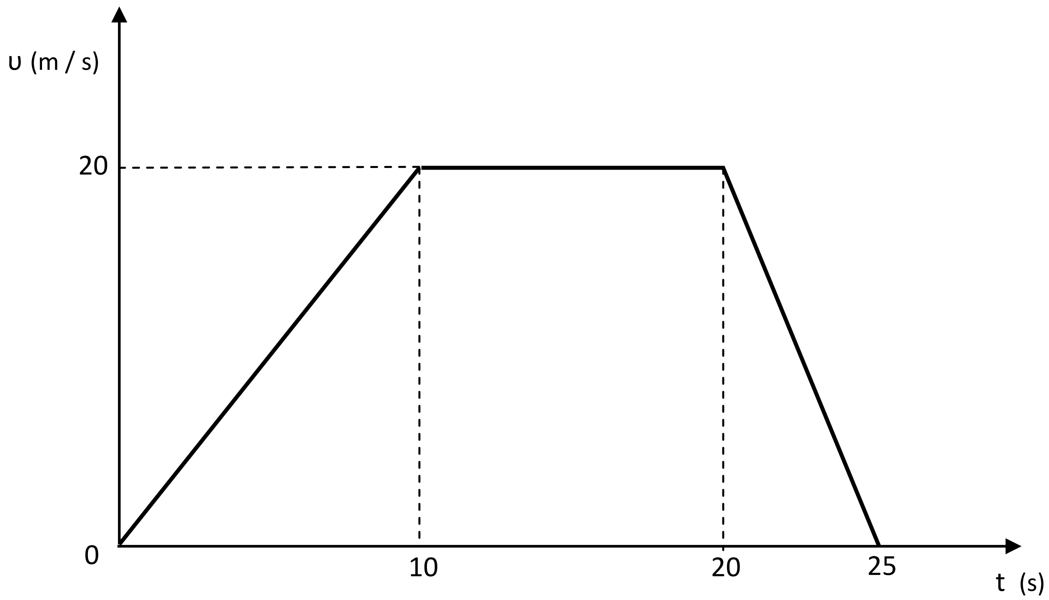
Ενδεικτική Λύση

Δ1) Το χρονικό διάστημα Δt_1 το αυτοκίνητο μετατοπίζεται κατά:

$$S_1 = \Delta x_1 = \frac{1}{2}\, a\, \Delta t_1^2 \text{ ή } \quad S_1 = 100\, m$$

Δ2) Το χρονικό διάστημα Δt_2 κινείται με σταθερή ταχύτητα $\upsilon = \alpha\, \Delta t_1$ ή $\upsilon = 20\, m / s$ και το χρονικό διάστημα Δt_3 θα κινηθεί μέχρι να ακινητοποιηθεί.

Οπότε η γραφική παράσταση της ταχύτητας ως προς το χρόνο κίνησης θα είναι ως εξής:



Δ3) Το χρονικό διάστημα Δt_2 μετατοπίζεται κατά:

$$\Delta x_2 = \upsilon\, \Delta t_2 \text{ ή } \Delta x_2 = 200\, m$$

Και το χρονικό διάστημα Δt_3 θα κινηθεί μέχρι να ακινητοποιηθεί με επιβράδυνση

$$a' = \frac{\upsilon}{\Delta t_3} \quad \text{ή} \quad a' = 4\, \frac{m}{s^2}$$

και μετατοπίζεται κατά: $\Delta x_3 = \upsilon\, \Delta t_3 - \frac{1}{2}\, a'^{\,\Delta t_3^2}$ ή $\Delta x_3 = 50\, m$

Άρα

$$\upsilon_\mu = \frac{\Delta \chi_1 + \Delta \chi_2 + \Delta \chi_3}{\Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3} \quad \text{ή} \quad \upsilon_\mu = 14\, \frac{m}{s}$$

Δ4) Με βάση το Θεώρημα Μεταβολής της Κινητικής Ενέργειας - Έργου από την αρχή της κίνησης του αυτοκινήτου μέχρι το τέλος της, προκύπτει ότι το συνολικό έργο της συνισταμένης δύναμης για όλη τη διάρκεια της κίνησης του είναι μηδενικό.

Ενδεικτική Λύση

Δ1) Το σώμα κάνει ευθύγραμμα ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, οπότε υπολογίζουμε την μετατόπιση από τη σχέση:

$$\Delta x = \upsilon_o t_1 + \frac{1}{2}\, a\, t_1^2 \quad \text{ή} \quad \Delta x \ = \ 75\, m$$

Δ2) Αν ασκούνταν μόνο η δύναμη F = 20 N στο σώμα τότε σύμφωνα με το 2^o νόμο του Νεύτωνα θα είχε επιτάχυνση 5 m /s^2 .

Η επιτάχυνση όμως του σώματος είναι μικρότερη, άρα θα ασκείται και η δύναμη της τριβής η οποία πάλι από το 2^o νόμο του Νεύτωνα υπολογίζεται σε 4 N.

Δ3) Η χρονική στιγμή όπου το σώμα έχει διανύσει πλέον 25 m υπολογίζεται από την σχέση:

$$\Delta x_2 = \upsilon_o t_2 + \frac{1}{2}\, a\, t_2^2$$

Ο χρόνος υπολογίζεται σε 2,5 s

Εκείνη τη χρονική στιγμή έχει ταχύτητα:

$$\upsilon = \upsilon_o + a\, t_2 \qquad \text{ή} \qquad \upsilon = 15 \ \ \mathrm{m / s}$$

Δ4) Μετά τη χρονική στιγμή t_2 το σώμα κάνει ευθύγραμμα ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση (υπό την επίδραση της τριβής), με επιτάχυνση 1 m /s^2 αντίθετη στη φορά της κίνησης. Με βάση τους τύπους της επιβραδυνόμενης κίνησης

$$0 \ = \upsilon - a'\, t_3$$

$$\Delta x' = \ \upsilon\, t_3 - \frac{1}{2}\, a'\, t_3^2$$

βρίσκουμε τη μετατόπιση

$$\Delta x' = 112{,}5 \text{ m}$$

Ενδεικτική Λύση

Δ1) Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας υπολογίζεται ως εξής:

$$\Delta K = K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} \quad \text{ή} \quad \Delta K = \frac{1}{2}\, m\,[(2\upsilon)^2 - \upsilon^2] \quad \text{ή} \quad \Delta K = = 150000\, J$$

Δ2) Το αυτοκίνητο κάνει ευθύγραμμα ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση για 10 s, οπότε:

$$2\upsilon = \upsilon + a\, t_1 \;\; => \alpha = 1 \;\; \mathrm{m\,/\,s^2}$$

Και από το 2^o νόμο του Νεύτωνα προκύπτει ότι η συνισταμένη δύναμη ισούται με 1000 N

Δ3) Το αυτοκίνητο για το χρονικό διάστημα των 10 s μετατοπίστηκε κατά:

$$\Delta x = \upsilon\, t_1 + \frac{1}{2}\, a\, t_1^2 \quad ή \quad \Delta x = 150\, m$$

Συνεπώς η μέση ταχύτητα προκύπτει από το πηλίκο: μήκος διαδρομής προς το χρονικό διάστημα και ισούται με: *15 m / s*

Δ4) Διπλασιάζεται πάλι η ταχύτητα, τώρα όμως σε μετατόπιση

$$\Delta x' = \frac{150}{2} \quad \text{ή} \quad \Delta x' = 75\, m.$$

Μέσω του Θεωρήματος Μεταβολής της Κινητικής Ενέργειας-Έργου υπολογίζεται το έργο και η τιμή της νέας συνισταμένης δύναμης που θα ασκηθεί στο αυτοκίνητο.

$$\Delta K = \Sigma F' \cdot \Delta x' => \Sigma F' = 2000\, N$$

Ενδεικτική Λύση

Δ1) Το σώμα ολισθαίνει προς τα δεξιά ενώ ασκείται πάνω του η δύναμη της τριβής με φορά προς τα αριστερά.

Από το 2^o νόμο του Νεύτωνα προκύπτει ότι η επιτάχυνση με την οποία κινείται το σώμα είναι:

$$\mu\, m\, g = m\, a \Rightarrow a = 5\ \frac{m}{s^2},$$

με φορά αντίθετη προς την ταχύτητα του σώματος.

Δ2) Το σώμα κινείται ευθύγραμμα με την επιβράδυνση που υπολογίσαμε στο προηγούμενο ερώτημα. Μετά από χρόνο t_1 η ταχύτητα θα είναι:

$$\upsilon = \upsilon_o - a\, t_1 \quad \text{ή} \quad \upsilon = 10\ m/s$$

Δ3) Με βάση τον προηγούμενο τύπο θέτοντας $\upsilon=0$ μπορούμε να υπολογίσουμε ότι το σώμα θα ακινητοποιηθεί μετά από *4 s* από τη χρονική στιγμή t_o.

Ενώ η ταχύτητα του σώματος τη χρονική στιγμή *t = 3 s* είναι *5 m / s*.

Συνεπώς αναζητούμε τη μετατόπιση του σώματος το χρονικό διάστημα μεταξύ $3^{ου}$ και $4^{ου}$ s.

Ένας από τους τρόπους που μπορούμε να υπολογίσουμε αυτή τη μετατόπιση είναι το Θεώρημα Μεταβολής της Κινητικής Ενέργειας-Έργου για το πιο πάνω χρονικό διάστημα.

$$\Delta K = K_4 - K_3 \quad \text{ή} \quad \Delta K = -T\, \Delta x_{3-4} \Rightarrow \Delta x_{3-4} = 2{,}5\ \text{m}$$

Δ4) Πάλι με βάση το Θεώρημα Μεταβολής της Κινητικής Ενέργειας-Έργου , συνολικά για όλη την κίνηση, προκύπτει:

$$\Delta K = K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} \quad \text{ή} \quad \Delta K = W_T \quad \text{ή} \quad W_T = -400\, J$$

Ενδεικτική Λύση

Δ1) Το σώμα ξεκινά να κινείται, ενώ στον οριζόντιο άξονα του ασκούνται δύο δυνάμεις:

η δύναμη F και η τριβή.

Η συνισταμένη δύναμη

$$\Sigma F = F - T \quad ή \quad \Sigma F = 30\ N.$$

Σύμφωνα με το 2^{ο} νόμο του Νεύτωνα η επιτάχυνση

$$\alpha = 6\ \frac{m}{s^2}$$

Δ2) Μετά από χρόνο 2 s η ταχύτητα του σώματος θα είναι:

$$\upsilon = a \cdot t_1 \quad ή \quad \upsilon = 12\ \frac{m}{s}$$

Συνεπώς η κινητική ενέργεια εκείνη τη χρονική στιγμή θα είναι

$$K = 360\ J$$

Δ3) Η μετατόπιση του σώματος για το χρονικό διάστημα των *2 s* ισούται με:

$$\Delta x = \frac{1}{2}\, a \cdot t_1^2 \quad ή \quad \Delta x = 12\ m.$$

Και από τον ορισμό του έργου:

$$W_F = F \cdot \Delta x \quad ή \quad W_F = 600\ J$$

Δ4) Η ισχύς που προσφέρθηκε στο σώμα υπολογίζεται ως το πηλίκο του έργου που προσφέρεται προς το χρονικό διάστημα που προσφέρεται:

$$P = \frac{W_F}{t} \quad ή \quad P = 300\ W$$

Ενδεικτική Λύση

Δ1) Για την ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση ισχύει:

$$\alpha = \frac{\Delta\upsilon}{\Delta t} = \frac{0-20}{5} = -4m/s^2,\text{ άρα το μέτρο της επιβράδυνσης είναι } 4m/s^2.$$

Δ2) Από την εξίσωση του διαστήματος στην ευθύγραμμη ομαλή κίνηση υπολογίζουμε τη χρονική διάρκεια παρατήρησης Δt_1 αυτής της κίνησης από το μαθητή:

$$S_1 = \upsilon \cdot \Delta t_1 \quad \text{ή} \quad \Delta t_1 = 5s,$$

Οπότε το σώμα ξεκινά να επιβραδύνεται την χρονική στιγμή t_1 με:

$$\Delta t_1 = (t_1 - 0) = t_1 = 5s$$

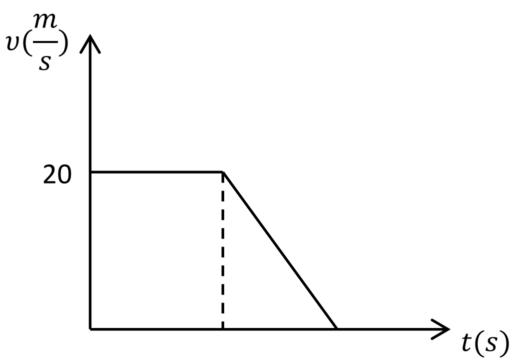
και σταματά την χρονική στιγμή t_2 με:

$$\Delta t = (t_2 - t_1) \text{ ή } t_2 = 10\ s.$$

Για τα μέτρα των ταχυτήτων ισχύει:

$$\upsilon = 10\frac{m}{s} \quad \gamma\iota\alpha \quad 0 \le t \le 5s \quad \kappa\alpha\iota \quad \upsilon = 10 - 4t \quad \gamma\iota\alpha \quad 5s < t \le 10s,$$

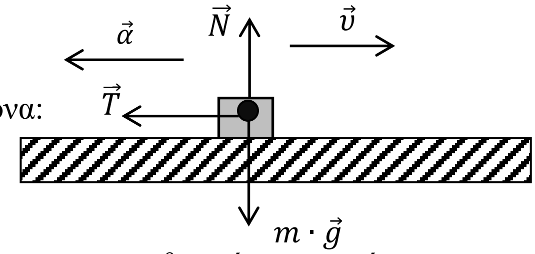
Από τα οποία προκύπτει η ζητούμενη γραφική παράσταση:



Δ3) Το εμβαδό που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης $\upsilon = f(t)$ και του άξονα των χρόνων είναι αριθμητικά ίσο με το συνολικό διάστημα που διανύει το κινητό:

$$S_{o\lambda} = \frac{(5+10)\cdot 20}{2} = 150m$$

Και η μέση ταχύτητα του σώματος: $\upsilon_\mu = \frac{S_{o\lambda}}{t_{o\lambda}} = 15m/s.$



Δ4) Εφαρμόζουμε τον 1ο νόμο του Newton στον κατακόρυφο άξονα:

$$\sum \vec{F} = 0 \text{ ή } N = mg = 100N$$

Και τον 2ο νόμο του Newton στον οριζόντιο άξονα λαμβάνοντας ως θετική τη φορά της επιτάχυνσης:

$$T = m \cdot a \quad \text{ή} \quad T = 40N.$$

$$\text{Άρα} \quad T = \mu \cdot N \quad \text{ή} \quad \mu = 0{,}4.$$

Ενδεικτική Λύση

Δ1)

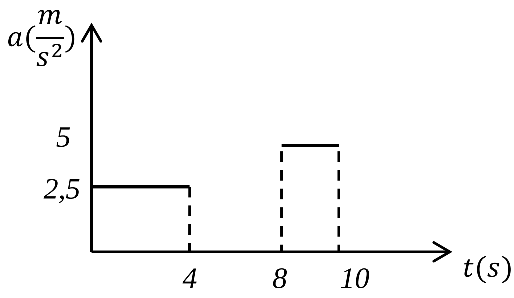
0 s – 4 s: $\alpha_1 = \frac{\Delta\upsilon}{\Delta t} = \frac{10-0}{4-0} = 2{,}5 m/s^2$

8 s – 10 s: $\alpha_2 = \frac{\Delta\upsilon}{\Delta t} = \frac{20-10}{10-8} = 5 m/s^2$

Δ2)

Ισχύει 4 s – 8 s: $\alpha_3 = \frac{\Delta\upsilon}{\Delta t} = \frac{10-10}{8-4} = 0$

Και με την βοήθεια των υπολογισμών που έγιναν στο ερώτημα Δ1 κατασκευάζουμε τη γραφική παράσταση $\alpha = f(t)$:



Δ3) Το εμβαδό που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης $\upsilon = f(t)$ και του άξονα των χρόνων είναι αριθμητικά ίσο με το διάστημα που διανύει το κινητό:

0 s – 4 s: $S_1 = \frac{4\cdot 10}{2} = 20m$

4 s – 8 s: $S_2 = 4 \cdot 10 = 40m$

8 s – 10 s: $S_3 = \frac{(20+10)\cdot 2}{2} = 30m$

Και η μέση ταχύτητα του σώματος: $\upsilon_\mu = \frac{S_{o\lambda}}{t_{o\lambda}} = \frac{S_1+S_2+S_3}{t_{o\lambda}} = \frac{90}{10} = 9m/s$

Δ4) Για $0 \leq t \leq 4s$ ισχύει $\upsilon = \alpha \cdot t = 2{,}5 \cdot t$.

Άρα την χρονική στιγμή $t_1 = 2$ s η τιμή της ταχύτητας του σώματος είναι

$\upsilon_1 = 5m/s$

και η κινητική του ενέργεια :

$K_1 = \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 = 12{,}5m$, όπου m η μάζα του σώματος.

Για $8s \leq t \leq 10s$ ισχύει $\upsilon = \upsilon_0 + \alpha \cdot \Delta t = 10 + 5 \cdot (t-8)$.

Άρα την χρονική στιγμή $t_2 = 9$ s η τιμή της ταχύτητας του σώματος είναι

$\upsilon_2 = 15m/s$ και η κινητική του ενέργεια :

$K_2 = \frac{1}{2}m\upsilon_2^2 = 112{,}5m$..

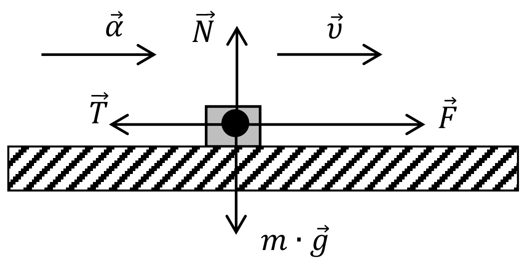
Άρα ο λόγος των κινητικών ενεργειών είναι ίσος με: $\frac{K_1}{K_2} = \frac{1}{9}$

<u>Ενδεικτική Λύση</u>

Δ1) 0 s – 4 s: $\alpha_1 = \frac{\Delta\upsilon}{\Delta t} = \frac{2-0}{4-0} = 0{,}5 m/s^2$ και κατεύθυνση ίδια με αυτήν της ταχύτητας του κιβωτίου.

Δ2) 0 s – 4 s: Εφαρμόζουμε τον 1ο νόμο του Newton στον κατακόρυφο άξονα:

$\sum F_{\psi} = 0 \quad$ ή $\quad N = mg = 200N$



Και τον 2ο νόμο του Newton στον οριζόντιο άξονα λαμβάνοντας ως θετική τη φορά της επιτάχυνσης:

$$F - T = m \cdot a \quad \text{ή} \quad T = 40N.$$

$$\text{Άρα } T = \mu \cdot N \quad \text{ή} \quad \mu = 0{,}2.$$

Δ3) Από 0→ t_1, το κιβώτιο με τα βιβλία εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση και με χρήση της αντίστοιχης εξίσωσης υπολογίζεται η μετατόπιση του:

$$\Delta x_1 = \frac{1}{2} a_1 t_1^2 = 4m$$

Και το έργο της $\vec{F}$ για αυτήν την μετατόπιση:

$$W_F = F \Delta x_1 \sigma\upsilon\nu 0^0 = 200J$$

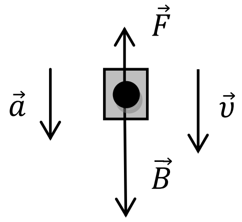
Δ4) Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μεταβολής της Κινητικής ενέργειας-Έργου (ΘΜΚΕ) από την χρονική στιγμή $t_o = 0$ και για την συνολική μετατόπιση του κιβωτίου $\Delta\overrightarrow{x_{o\lambda}}$:

$$K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = W_F + W_T \quad \text{ή} \quad 0 - 0 = 200 - T \cdot \Delta x_{o\lambda} \quad \text{ή} \quad \boxed{\Delta x_{o\lambda} = 5m}$$

11646

<u>Ενδεικτική Λύση</u>

Δ1) $\Delta K = K_B - K_A$ ή $\Delta K = \frac{1}{2}m\upsilon_B^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_A^2$ ή $\boxed{\Delta K = 300J}$ (1)



Δ2) Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μεταβολής της Κινητικής Ενέργειας – Έργου (ΘΜΚΕ) από το σημείο Α στο σημείο Β:

$$K_B - K_A = W_F + W_B$$

$$Από\ τη\ σχέση\ (1)\quad 300 = W_F + m \cdot g \cdot h \qquad ή \quad \boxed{W_F = -300J}\,(2).$$

Δ3) Από την σχέση υπολογισμού του έργου σταθερής δύναμης έχουμε:

$$W_F = F \cdot \Delta y_{AB} \cdot συν180^0 \qquad ή\ από\ τη\ σχέση\ (2) - 300 = -30 \cdot F\ ή\ \boxed{F = 10N}$$

Δ4) Εφαρμόζουμε το 2^{ο} νόμο του Newton λαμβάνοντας ως θετική τη φορά της επιτάχυνσης:

$$B - F = m \cdot a \quad ή \qquad \alpha = 5\frac{m}{s^2}$$

Και από τον ορισμό της, υπολογίζουμε την χρονική διάρκεια της μετάβασης του δέματος μεταξύ των σημείων (Α) και (Β):

$$\alpha = \frac{\Delta\upsilon}{\Delta t} \quad ή \qquad \Delta t = \frac{20 - 10}{5} \quad ή \qquad \boxed{\Delta t = 2s}$$

<u>Ενδεικτική λύση</u>

Δ1) 0 → 5 s: Ευθύγραμμη ομαλή επιταχυνόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα.
5 s → 15 s: Ευθύγραμμη ομαλή επιβραδυνόμενη κίνηση.

Δ2) Έστω $\overrightarrow{\alpha_1}$ η επιτάχυνση του κιβωτίου και S_1 το διάστημα που διανύει το κιβώτιο στη χρονική διάρκεια 0 → 5 s. Από το δεύτερο νόμο του Newton υπολογίζουμε το μέτρο της επιτάχυνσης:

$$\sum F = m \cdot a_1 \quad \text{ή} \qquad a_1 = 2\frac{m}{s^2}$$

Από την εξίσωση της επιτάχυνσης υπολογίζουμε την τιμή της ταχύτητας υ_1 τη χρονική στιγμή 5s*:*

$$\alpha_1 = \frac{\Delta\upsilon}{\Delta t} \quad \text{ή} \quad 2 = \frac{\upsilon_1 - 10}{5} \quad \text{ή} \quad \upsilon_1 = 20\frac{m}{s}$$

Το εμβαδό που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης *υ = f(t)* και του άξονα των χρόνων είναι αριθμητικά ίσο με τη μετατόπιση του κινητού:

$$0\text{ s} - 5\text{ s:} \qquad \Delta x_1 = \frac{(10+20)\cdot 5}{2} \quad \text{ή} \quad \Delta x_1 = 75m.$$

<u>Παρατήρηση:</u> Το διάστημα και η μετατόπιση έχουν την ίδια τιμή καθώς η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας είναι θετική και κατά την κίνηση το κιβώτιο δεν αλλάζει φορά.

Δ3) Έστω S_2 το διάστημα που διανύει το κιβώτιο στη χρονική διάρκεια 5s → 15 s. Σύμφωνα με το ερώτημα Δ2:

$$S_2 = \frac{10 \cdot 20}{2} \quad \text{ή} \quad S_2 = 100m$$

Και η μέση ταχύτητα του σώματος: $\upsilon_\mu = \frac{S_{o\lambda}}{t_{o\lambda}}$ ή $\upsilon_\mu = \frac{175}{15}$ ή $\boxed{\upsilon_\mu = \frac{35}{3}\frac{m}{s}}$.

Δ4) 5s → 15 s: Από την εξίσωση της επιτάχυνσης υπολογίζουμε την αλγεβρική τιμή της (α_2) και από το 2ο νόμο του Newton τη συνισταμένη δύναμη:

$$\alpha_2 = \frac{\Delta\upsilon}{\Delta t} \quad \text{ή} \quad \alpha_2 = \frac{0-20}{15-5} \quad \text{ή} \quad \alpha_2 = -2\,\frac{m}{s^2}$$

$$\sum F = m \cdot a_2 \quad \text{ή} \qquad \sum F = -40N$$

Το αρνητικό πρόσημο στις αλγεβρικές τιμές της επιτάχυνσης και της συνισταμένης δύναμης δηλώνει ότι τα αντίστοιχα διανύσματα είναι ομόρροπα μεταξύ τους και αντίρροπα με αυτό της ταχύτητας (θετική αλγεβρική τιμή).

Και τέλος για το $W_{\Sigma F}$ ισχύει:

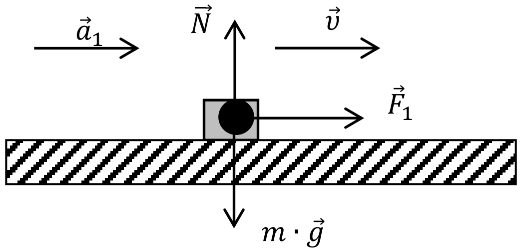
$$W_{\Sigma F} = \Sigma F \cdot \Delta x_2 \quad \text{ή} \quad \boxed{W_{\Sigma F} = -4000J}$$

Εναλλακτικά, εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μεταβολής της Κινητικής Ενέργειας – Έργου για την μετατόπιση του κινητού κατά την επιβραδυνόμενη κίνησή του:

$$K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = W_{\Sigma F} \quad \text{ή} \quad 0 - \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 = W_{\Sigma F} \quad \text{ή} \quad \boxed{W_{\Sigma F} = -4000J}.$$

Ενδεικτική Λύση

Δ1)



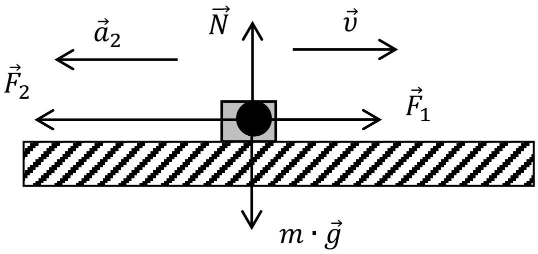
0 → 5 s: Το κιβώτιο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με επιτάχυνση μέτρου α_1. Εφαρμόζουμε τον 2ο νόμο του Newton στον οριζόντιο άξονα λαμβάνοντας ως θετική τη φορά της επιτάχυνσης:

$$\Sigma F = m \cdot \alpha_1 \;\; \text{ή} \;\; \alpha_1 = \frac{F_1}{m} \;\; \text{ή} \;\; \alpha_1 = 4\,\frac{m}{s^2}$$

Με τη βοήθεια της εξίσωσης της ταχύτητας υπολογίζουμε το μέτρο της ταχύτητας $\overrightarrow{\upsilon_1}$:

$$\upsilon_1 = \alpha_1 \cdot t_1 \;\; \text{ή} \;\; \boxed{\upsilon_1 = 20\,\frac{m}{s}}$$

Δ2)



5 s → 9 s: Το κιβώτιο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση με επιβράδυνση μέτρου α_2 και αρχική ταχύτητα $\overrightarrow{\upsilon_1}$:

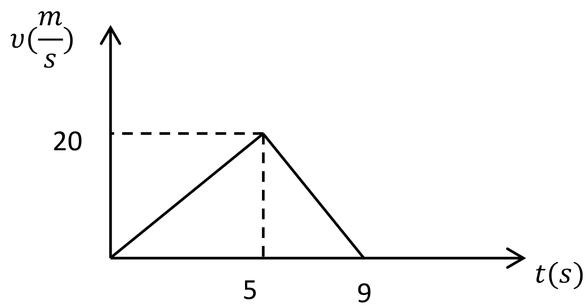
Με τη βοήθεια της εξίσωσης της ταχύτητας υπολογίζουμε το μέτρο της επιτάχυνσης $\overrightarrow{\alpha_2}$:

$$\upsilon = \upsilon_0 - \alpha \cdot \Delta t \;\; \text{ή} \;\; 0 = 20 - 4 \cdot \alpha_2 \;\; \text{ή} \;\; \alpha_2 = 5\,\frac{m}{s^2}$$

Εφαρμόζουμε τον 2ο νόμο του Newton στον οριζόντιο άξονα λαμβάνοντας ως θετική τη φορά της επιτάχυνσης:

$$\Sigma F = m \cdot a_2 \;\; \text{ή} \;\; F_2 - F_1 = m \cdot a_2 \;\; \text{ή} \;\; \boxed{F_2 = 45N}$$

Δ3) Το εμβαδό που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης $\upsilon = f(t)$ και του άξονα των χρόνων είναι αριθμητικά ίσο με το συνολικό διάστημα που διανύει το κινητό:



$$S_{o\lambda} = \frac{9 \cdot 20}{2} \quad \text{ή} \quad S_{o\lambda} = 90m$$

Και η μέση ταχύτητα του σώματος:

$$\upsilon_\mu = \frac{S_{o\lambda}}{t_{o\lambda}} \quad \text{ή} \quad \boxed{\upsilon_\mu = 10\frac{m}{s}}$$

Δ4) Από την εξίσωση της μετατόπισης στην ευθύγραμμη ομαλή επιβραδυνόμενη κίνηση υπολογίζουμε την μετατόπιση του κύβου στη χρονική διάρκεια 5 s → 9 s ($\Delta t = 4s$):

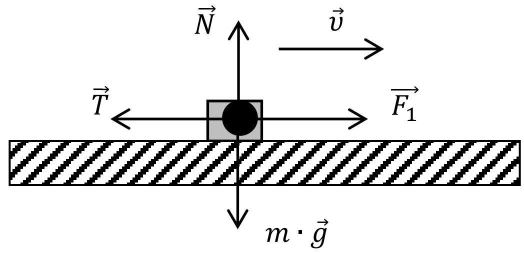
$$\Delta x = \upsilon_1 \cdot \Delta t - \frac{1}{2} \cdot a \cdot \Delta t^2 \quad \text{ή} \quad \Delta x = 40m$$

Και στη συνέχεια το έργο της δύναμης $\vec{F_2}$:

$$W_F = F_2 \cdot \Delta x \cdot \sigma\upsilon\nu 180^0 \quad \text{ή} \quad \boxed{W_F = -1800J}.$$

Ενδεικτική λύση

Δ1)



Θεωρούμε ότι τη χρονική στιγμή που το κιβώτιο θα ξεκινήσει οριακά να κινείται, θα ισορροπεί και στους δύο άξονες:

$$\Sigma\vec{F}_y = 0 \;\; ή \;\; N = m \cdot g \;\; ή \;\; N = 5000N$$

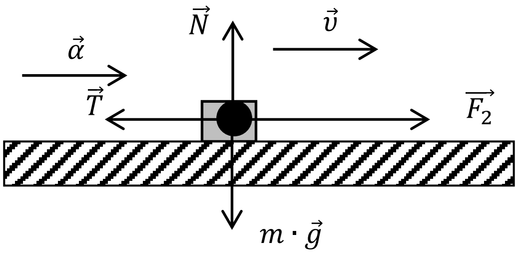
$$\Sigma\vec{F}_x = 0 \;\; ή \;\; F_1 = T$$

Και από το νόμο της τριβής:

$$T = \mu \cdot N \;\; ή \;\; T = 1000N$$

$$\text{Άρα, } F_1 = T = 1000N.$$

Δ2) Έστω $\overrightarrow{F_2}$, η δύναμη που έχει μέτρο 1500N.



Το κιβώτιο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με επιτάχυνση μέτρου α. Εφαρμόζουμε τον 2^{ο} νόμο του Newton στον οριζόντιο άξονα λαμβάνοντας ως θετική τη φορά της επιτάχυνσης:

$$\Sigma F = m \cdot \alpha \;\; ή \;\; F_2 - T = m \cdot \alpha \;\; ή \;\; \boxed{\alpha = 1\frac{m}{s^2}}$$

Δ3) Από την εξίσωση της μετατόπισης στην ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση υπολογίζουμε την χρονική διάρκεια Δt της κίνησης:

$$\Delta x = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \Delta t^2 \quad \text{ή} \quad \Delta t^2 = \frac{2 \cdot \Delta x}{a} \quad \text{ή} \quad \Delta t^2 = 64 \quad \text{ή} \quad \Delta t = 8s$$

Από την εξίσωση της ταχύτητας υπολογίζουμε το ζητούμενο:

$$\upsilon = \alpha \cdot \Delta t \quad \text{ή} \quad \boxed{\upsilon = 8\frac{m}{s}}$$

.

Δ4) Με τη βοήθεια του έργου της δύναμης υπολογίζουμε τη μετατόπιση του κιβωτίου:

$$W_F = F_2 \cdot \Delta x \cdot \sigma\upsilon\nu 0^0 \text{ ή } \Delta x = 2m$$

Και στη συνέχεια υπολογίζουμε το έργο της τριβής:

$$W_T = T \cdot \Delta x \cdot \sigma\upsilon\nu 180^0 \quad \text{ή} \quad W_T = -T \cdot \Delta x \quad \text{ή} \quad \boxed{W_T = -2000J}$$

Ενδεικτική Λύση

Δ1) Από το 2ο νόμο του Νεύτωνα το μέτρο της συνισταμένης δύναμης είναι

$$\Sigma F = ma \quad \text{ή} \quad F - B = ma \quad \text{ή} \quad 80 - 40 = 4\alpha$$

$$\text{και τελικά } \alpha = 10\,\frac{m}{s^2}.$$

Δ2) Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Μεταβολής της Κινητικής Ενέργειας – Έργου (ΘΜΚΕ) έχουμε:

$K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = W_F + W_B$ ή $\frac{1}{2}mv^2 - 0 = F \cdot h - B \cdot h$ και τελικά $\upsilon = 10\,\frac{m}{s}$.

Δ3) Ισχύει $F = 2B$.

Από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε:

$$\frac{1}{2}m\upsilon^2 - 0 = F \cdot h - B \cdot h \quad \text{ή} \quad K_{\tau\varepsilon\lambda} = 2B \cdot h - B \cdot h \text{ και τελικά } \boxed{K_{\tau\varepsilon\lambda} = U}.$$

Δ4) Τη χρονική στιγμή που καταργείται η δύναμη F το σώμα έχει ταχύτητα $\upsilon = 10\,\frac{m}{s}$ με φορά προς τα πάνω. Στη συνέχεια το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση με επιβράδυνση g

$$\Sigma F = m \cdot a \quad \text{ή} \quad m \cdot g = m \cdot a.$$

Από τις εξισώσεις κίνησης το κιβώτιο θα φτάσει σε ύψος

$$h' = \frac{\upsilon^2}{2g} \quad \text{ή} \quad h' = 5 \text{ m}.$$

Τελικά, το μέγιστο ύψος από το έδαφος στο οποίο φθάνει το κιβώτιο είναι

$$H = h' + h \qquad \text{ή} \qquad \boxed{H = 10\,m}$$

Ενδεικτική Λύση

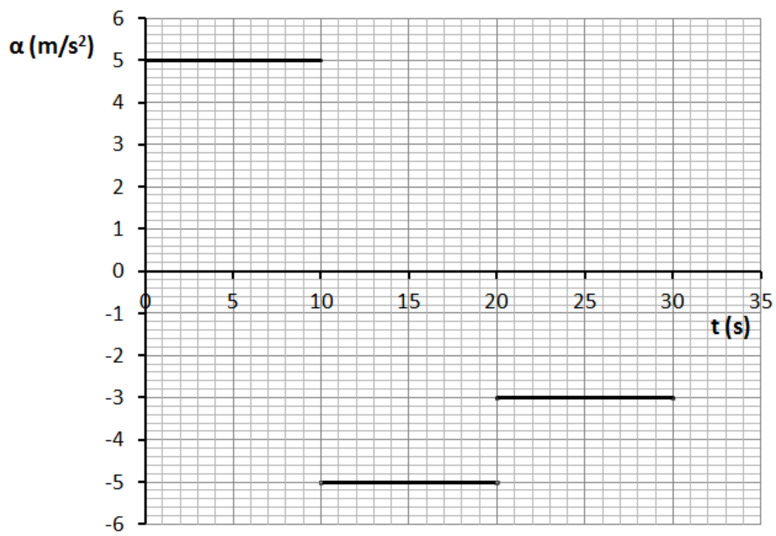
Δ1) Γενικά η κλίση της ευθείας στο διάγραμμα της ταχύτητας σε συνάρτηση με το χρόνο, δίνει την επιτάχυνση, οπότε:

Χρονικό διάστημα 0 s → 10 s: $\alpha_1 = \frac{\Delta\upsilon_1}{\Delta t_1}$ ή $\alpha_1 = \frac{+50\, m/s}{10\, s}$ και τελικά $\boxed{\alpha_1 = +5\,\frac{m}{s^2}}$

Χρονικό διάστημα 10 s → 20 s: $\alpha_2 = \frac{\Delta\upsilon_2}{\Delta t_2}$ ή $\alpha_2 = \frac{-50\, m/s}{10\, s}$ και τελικά $\boxed{\alpha_2 = -5\,\frac{m}{s^2}}$

Χρονικό διάστημα 10 s → 20 s: $\alpha_3 = \frac{\Delta\upsilon_3}{\Delta t_3}$ ή $\alpha_3 = \frac{-30\, m/s}{10\, s}$ και τελικά $\boxed{\alpha_3 = -3\,\frac{m}{s^2}}$

Δ2)



Δ3) Οι μετατοπίσεις του σώματος είναι:

Χρονικό διάστημα 0 s → 10 s: $\Delta x_1 = \frac{50\cdot 10}{2} = +250$ m

Χρονικό διάστημα 10 s → 20 s: $\Delta x_2 = \frac{50\cdot 10}{2} = +250$ m

Χρονικό διάστημα 10 s → 20 s: $\Delta x_3 = \frac{-30\cdot 10}{2} = -150$ m

Το ολικό διάστημα που διήνυσε το σώμα είναι $S = |\Delta x_1| + |\Delta x_2| + |\Delta x_3| = 650$ m,

και η μέση ταχύτητα του είναι:

$$\upsilon = \frac{S}{t_{o\lambda\iota\kappa o}} \text{ ή } \upsilon = \frac{650\text{ m}}{30\text{ s}} \text{ και τελικά } \boxed{\upsilon = \frac{65}{3}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}$$

Δ4) Για το έργο της συνισταμένης δύναμης έχουμε:

Χρονικό διάστημα 10 s → 20 s: $W_{\Sigma F_2} = \Sigma F_2 \cdot \Delta x_2 = m \cdot \alpha_2 \cdot \Delta x_2 = 2 \cdot (-5) \cdot (+250) = -2500$ J.

Χρονικό διάστημα 20 s → 30 s: $W_{\Sigma F_3} = \Sigma F_3 \cdot \Delta x_3 = m \cdot \alpha_3 \cdot \Delta x_3 = 2 \cdot (-3) \cdot (-150) = +900$ J.

Και το συνολικό έργο για το χρονικό διάστημα από 10 s → 30 s είναι:

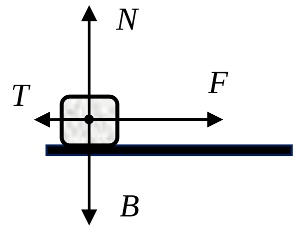
$$W = W_{\Sigma F_2} + W_{\Sigma F_3} \text{ ή } \boxed{W = -1600\text{ J}}.$$

Ενδεικτική Λύση

Δ1) Η επιτάχυνση του κιβωτίου είναι :

$$\alpha = \frac{\Delta \upsilon}{\Delta t} \text{ ή } \boxed{\alpha = 4\frac{m}{s^2}}$$

Δ2) Στο σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στο κιβώτιο από τη χρονική στιγμή $t_o = 0$ s έως τη χρονική στιγμή $t_1 = 5$ s. Από το 2ο νόμο του Νεύτωνα έχουμε:



$$\Sigma F_x = ma \text{ ή } F - T = ma \ (1)$$

$$\text{και } \Sigma F_y = 0 \quad \text{ή} \quad N = B \quad (2)$$

$$\text{Αλλά } T = \mu N \overset{(2)}{\Rightarrow} T = \mu B \text{ ή } T = \mu m g \ (3)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (1) και (3) έχουμε τελικά $\boxed{\mu = 0{,}2}$

Δ3) Από τη χρονική στιγμή $t_o = 0$ s έως τη χρονική στιγμή $t_1 = 5$ s το κιβώτιο μετατοπίστηκε κατά

$$\Delta x_1 = \frac{1}{2}\alpha\, t_1^2 \quad \text{ή} \quad \boxed{\Delta x_1 = +50 \text{ m}}$$

Το έργο της δύναμης $\vec{F}$ είναι:

$$W_F = F \cdot \Delta x_1 \text{ ή } W_F = 3000 \text{ J}$$

Δ4) Εφαρμόζοντας το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας από την αρχική θέση έως τη τελική θέση έχουμε:

$$K_{\tau\varepsilon\lambda\iota\kappa\eta} - K_{\alpha\rho\chi\iota\kappa\eta} = W_F - W_T \text{ ή } 0 - 0 = W_F - T \cdot \Delta x_{o\lambda\iota\kappa o} \text{ ή } \boxed{\Delta x_{o\lambda\iota\kappa o} = 150 \text{ m}}$$

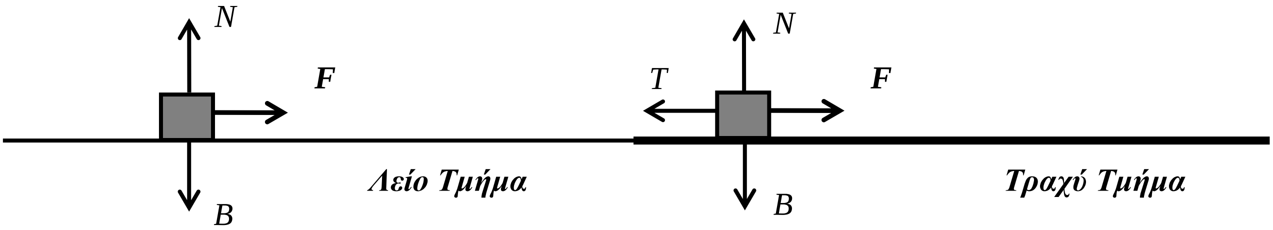
Ενδεικτική Λύση

Δ1) Στο λείο τμήμα, από το $2^ο$ νόμο του Νεύτωνα έχουμε

$$\Sigma F = ma \quad \text{ή} \quad F = ma \quad \text{και τελικά} \quad \alpha = 2\frac{m}{s^2}$$

Το διάστημα είναι ίσο με τη μετατόπιση του κιβωτίου:

$$S = \frac{1}{2}at^2 \quad \text{ή} \quad S = 25\ \text{m}$$



Δ2) Στο τραχύ τμήμα, από το 2ο νόμο του Νεύτωνα έχουμε

$$\Sigma F_x = ma \;\; ή \;\; F - T = 0 \quad (1)$$

$$\text{και} \;\; \Sigma F_y = 0 \quad ή \quad N = B \quad (2)$$

Αλλά

$$T = \mu N \overset{(2)}{\Rightarrow} T = \mu B \;\; ή \;\; T = \mu m g \quad (3)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (1) και (3) έχουμε τελικά

$$\mu = 0{,}2$$

Δ3) Το κιβώτιο στο τραχύ τμήμα της διαδρομής του κινείται με σταθερή ταχύτητα. Η ταχύτητα αυτή είναι ίση με την ταχύτητα στο τέλος της διαδρομής του στο λείο τμήμα, δηλαδή

$$\upsilon = \alpha \Delta t \;\; ή \;\; \upsilon = 10\frac{m}{s}$$

Κατά τη διάρκεια του $7^{ου}$ δευτερολέπτου της κίνησης, το κιβώτιο μετατοπίστηκε κατά

$$\Delta x = \upsilon \Delta t \;\; \text{ή} \;\; \Delta x = 10\ \text{m}\ (4)$$

και το έργο της δύναμης $\vec{\mathrm{F}}$ είναι:

$$W_F = F\Delta x \;\; \text{ή} \;\; W_F = 40\ \text{J}$$

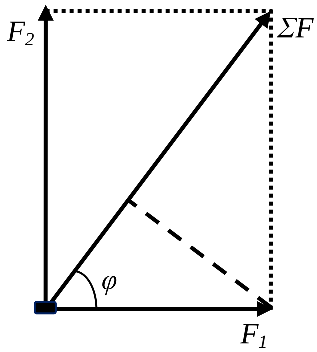
Δ4) Η θερμότητα που μεταφέρεται είναι αριθμητικά ίση με το έργο της τριβής.

$$Q = |W_T|.$$

Επειδή $\upsilon =$ σταθ και λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση (1) έχουμε τελικά

$$Q = W_F = 40 \text{ J}.$$

<u>Ενδεικτική Λύση</u>



Δ1) Το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση χωρίς αρχική ταχύτητα στην διεύθυνση της συνισταμένης δύναμης, επομένως

$$\upsilon_1 = a \cdot \Delta t_1 \text{ ή } \upsilon_1 = a \cdot t_1$$

και τελικά

$$\boxed{a = 2\frac{m}{s^2}}$$

Από το 2ο νόμο του Νεύτωνα έχουμε

$$\Sigma F = ma \quad \text{ή} \quad \boxed{\Sigma F = 10 \text{ N}}$$

Δ2) Έχουμε $\Sigma F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} \quad \kappa\alpha\iota\ F_1 = \frac{3}{4}F_2$

Επιλύοντας το σύστημα έχουμε τελικά:

$$F_1 = 6 \text{ N} \text{ και } F_2 = 8 \text{ N}$$

Δ3) Έχουμε $\Delta x_2 = \frac{1}{2}a \cdot (\Delta t_2)^2$ και τελικά $\boxed{\Delta t_2 = 2 \text{ s}}$

Άρα

$$\upsilon_2 = a \cdot \Delta t_2 \quad ή \quad \upsilon_2 = 4\frac{\text{m}}{\text{s}} \text{ και}$$

$$K = \frac{1}{2}m \cdot \upsilon_2^2 \qquad \text{ή} \qquad \boxed{K = 40 \text{ J}}$$

Δ4) Τη χρονική στιγμή $t_1 = 4$ s το σώμα έχει μετατοπισθεί κατά

$$\Delta x_1 = \frac{1}{2}a \cdot (\Delta t_1)^2 \quad \text{ή} \qquad \Delta x_1 = 16 \text{ m}$$

Το έργο της δύναμης F_1 είναι:

$$W_{F_1} = F_1 \cdot \Delta x_1 \cdot \text{συν}\,\varphi \text{ ή } W_{F_1} = 6 \cdot 16 \cdot 0{,}6 \text{ ή } \boxed{W_{F_1} = 57{,}6 \text{ J}}$$

<u>Ενδεικτική Λύση</u>

Δ1) Χρονικό διάστημα $0\,s \rightarrow 10\,s$: Ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με μηδενική αρχική ταχύτητα.

Χρονικό διάστημα $10\,s \rightarrow 20\,s$: Ευθύγραμμη ομαλή κίνηση.

Χρονικό διάστημα $10\,s \rightarrow 20\,s$: Ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα $40\,\frac{m}{s}$

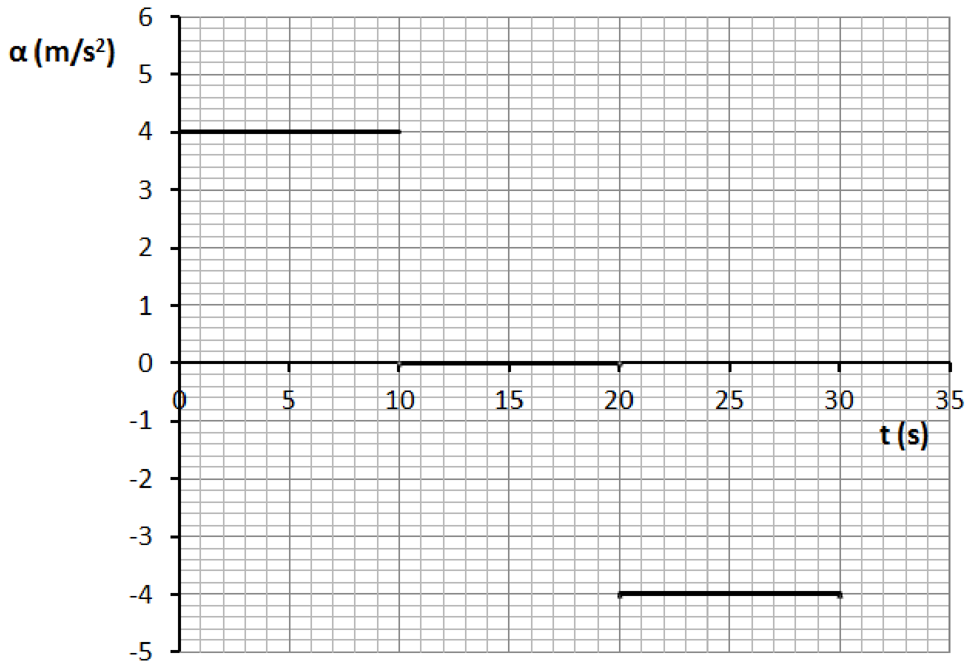
.

Δ2) Γενικά η κλίση της ευθείας στο διάγραμμα της ταχύτητας σε συνάρτηση με το χρόνο, δίνει την επιτάχυνση, οπότε:

Χρονικό διάστημα $0\,s \rightarrow 10\,s$: $\alpha_1 = \frac{\Delta\upsilon_1}{\Delta t_1}$ ή $\alpha_1 = \frac{+40\,{}^{m}/_{s}}{10\,s}$ και τελικά $\alpha_1 = +4\,\frac{m}{s^2}$

Χρονικό διάστημα $10\,s \rightarrow 20\,s$: $\alpha_2 = \frac{\Delta\upsilon_2}{\Delta t_2}$ ή $\alpha_2 = 0\,\frac{m}{s^2}$

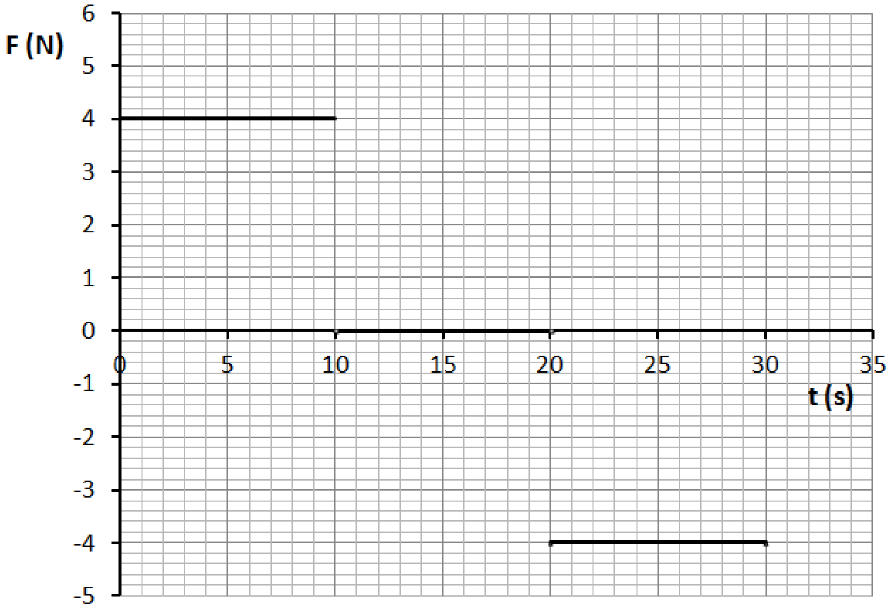
Χρονικό διάστημα $10\,s \rightarrow 20\,s$: $\alpha_3 = \frac{\Delta\upsilon_3}{\Delta t_3}$ ή $\alpha_3 = \frac{-40\,{}^{m}/_{s}}{10\,s}$ και τελικά $\alpha_3 = -4\,\frac{m}{s^2}$



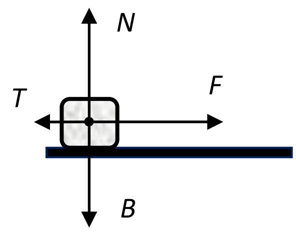
Δ3) Χρονικό διάστημα $0\,\mathrm{s} \to 10\,\mathrm{s}$: F-T= $m\alpha_1$ $ή$ $F_1 = 5$ N

Χρονικό διάστημα $10\,\mathrm{s} \to 20\,\mathrm{s}$: F-T = 0 N $ή$ $F_2 = 1$N

Χρονικό διάστημα $10\,\mathrm{s} \to 20\,\mathrm{s}$: F-T= $m\alpha_3$ $ή$ $F_1 = -3$ N



Δ4) Το εμβαδόν του τραπεζίου που περικλείεται μεταξύ της γραμμής που παριστά την ταχύτητα και των αξόνων *υ, t* είναι ίσο με τη μετατόπιση του οχήματος.



Επομένως: $\Delta x = \frac{30+10}{2} \cdot 40 \quad (SI) \quad ή \quad \boxed{\Delta x = 800\ \mathrm{m}}$

Στο σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα. Από το 2ο νόμο του Νεύτωνα έχουμε:

$$\text{και} \quad \Sigma F_y = 0 \quad ή \quad N = B \quad (1)$$

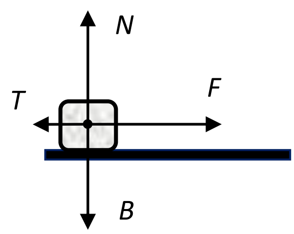
$$\text{Αλλά } T = \mu \cdot N \overset{(1)}{\Rightarrow} T = \mu \cdot B \;\; ή \;\; T = \mu \cdot m \cdot g \quad ή \quad \boxed{T = 1\ \mathrm{N}}$$

Το έργο της δύναμης T είναι:

$$W_T = T \cdot \Delta x \cdot \text{συν}\,\varphi \;\; ή \;\; W_T = 1 \cdot 800 \cdot (-1) \;\; ή \;\; \boxed{W_T = -800\ \mathrm{J}}$$

Ενδεικτική Λύση

Δ1) Στο σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα από τη χρονική στιγμή $t_o = 0$ s έως τη χρονική στιγμή $t_1 = 5$ s.



Από το 2ο νόμο του Νεύτωνα έχουμε:

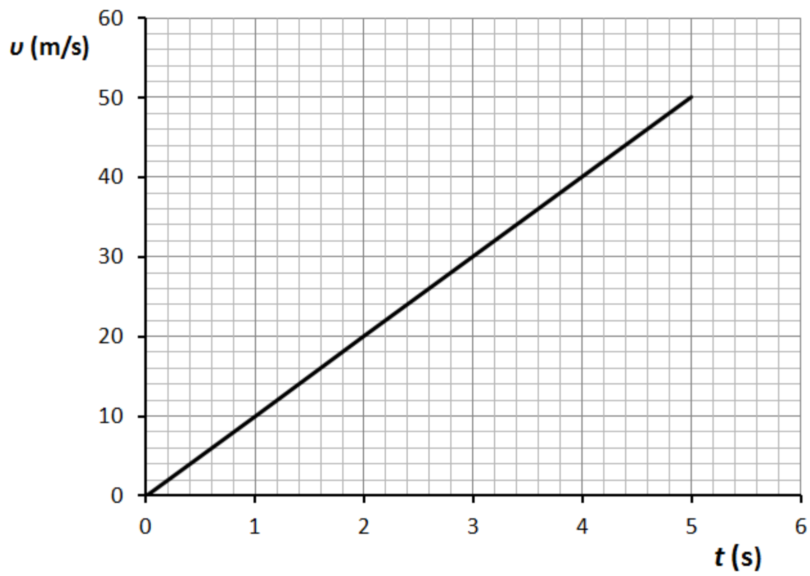
$$\Sigma F_x = ma \ \text{ή} \ F - T = ma \ (1)$$

$$\text{και} \ \Sigma F_y = 0 \ \ \text{ή} \ \ N = B \quad (2)$$

$$\text{Αλλά} \ T = \mu N \overset{(2)}{\Rightarrow} T = \mu B \ \text{ή} \ T = \mu mg \ \text{ή} \ T = 1 \text{ N} \ (3)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (1) και (3) έχουμε τελικά $\alpha = 10 \frac{m}{s^2}$

Δ2)



Δ3) Από το προηγούμενο διάγραμμα η μετατόπιση του σώματος είναι:

$$\Delta x = \frac{50 \cdot 5}{2} = 125 \text{ m.}$$

Το έργο της δύναμης $\vec{F}$ είναι:

$$W_F = F \cdot \Delta x = 625 \text{ J.}$$

Δ4) Ενέργεια από το σώμα μετατρέπεται σε θερμότητα μέσω του έργου της τριβής.

Επομένως

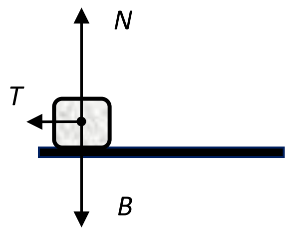
$$\frac{\Delta Q}{\Delta t}=\frac{|W_T|}{\Delta t} \quad \text{ή} \quad \frac{\Delta Q}{\Delta t}=\frac{|-1\cdot 125|}{5} \quad \text{ή} \quad \frac{\Delta Q}{\Delta t}=25\,\frac{J}{s}$$

Ενδεικτική Λύση

Δ1) Στο χρονικό διάστημα $t_1 \rightarrow t_2$ το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση, οπότε:

$$\upsilon = \upsilon_1 - |\alpha|\Delta t \;\; \Rightarrow 0 = \upsilon_1 - |\alpha|(t_2 - t_1) \text{ και τελικά } |\alpha| = 2{,}5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Δ2) Στο σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα από τη χρονική στιγμή $t_1 = 4$ s έως τη χρονική στιγμή $t_2 = 12$ s.



Από το 2ο νόμο του Νεύτωνα έχουμε για τα μέτρα των δυνάμεων έχουμε:

$$\Sigma F_x = m\alpha \text{ ή } T = m\alpha \text{ ή } T = 5\text{ N} \;\; (1)$$

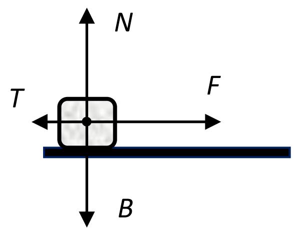
$$\text{και } \Sigma F_y = 0 \text{ ή } N = B \;\; (2)$$

Αλλά

$$T = \mu N \overset{(2)}{\Rightarrow} T = \mu B \;\; ή \;\; T = \mu m g \;\; (3)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (1) και (3) έχουμε τελικά $\mu = 0{,}25$

Δ3) Στο σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα από τη χρονική στιγμή $t = 0$ s έως τη χρονική στιγμή $t_1 = 4$ s.



Από το 2ο νόμο του Νεύτωνα έχουμε για τα μέτρα των δυνάμεων έχουμε:

$$\Sigma F_x = m\alpha' \text{ ή } F - T = m\alpha' \quad \text{όπου } \alpha' = \frac{\upsilon_1}{t_1} = 5\,\frac{m}{s^2}$$

και τελικά $F = T + m\alpha'$ ή λόγω της σχέσης (1) $F = 15$ N

Δ4) *α' τρόπος*

Έχουμε $\Delta x_1 = \frac{1}{2}\alpha' t_1^2$ ή $\Delta x_1 = 40$ m

Εφαρμόζοντας το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας για τη συνολική μετατόπιση του σώματος έχουμε:

$$K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = W_F + W_T \text{ ή } 0 - 0 = F \cdot \Delta x_1 + W_T \text{ ή } W_T = -600\text{ J}$$

β' τρόπος

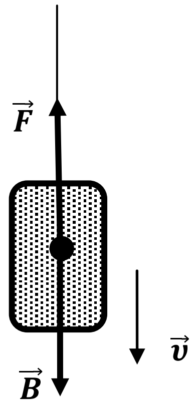
Η συνολική μετατόπιση του σώματος είναι $\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2$

$$\text{με } \Delta x_2 = \upsilon_1 \Delta t - \frac{1}{2}\alpha(\Delta t)^2 \text{ ή } \Delta x_2 = \upsilon_1(t_2 - t_1) - \frac{1}{2}\alpha(t_2 - t_1)^2 \text{ ή } \Delta x_2 = 80\text{ m}$$

$$W_T = -T \cdot \Delta x \text{ ή } W_T = -T \cdot (\Delta x_1 + \Delta x_2) \text{ και τελικά } W_T = -600\text{ J}$$

<u>Ενδεικτική Λύση</u>

Δ1) Το βάρος του θαλάμου είναι:



$$B = m \cdot g \text{ ή } B = 5000 \text{ N.}$$

Χρονικό διάστημα $0\,\text{s} \rightarrow 4\,\text{s}$:

$$\Sigma F_1 = B - F_1 \text{ ή } \boxed{\Sigma F_1 = 500 \text{ N}}$$

Ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με μηδενική αρχική ταχύτητα.

Χρονικό διάστημα $4\,\text{s} \rightarrow 8\,\text{s}$: $\Sigma F_2 = B - F_2$ ή $\boxed{\Sigma F_2 = 0 \text{ N}}$

Ευθύγραμμη ομαλή κίνηση.

Χρονικό διάστημα $8\,\text{s} \rightarrow 12\,\text{s}$: $\Sigma F_3 = B - F_3$ ή $\boxed{\Sigma F_3 = -500 \text{ N}}$

Ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση.

Από το 2ο νόμο του Νεύτωνα έχουμε:

Χρονικό διάστημα $0\,\text{s} \rightarrow 4\,\text{s}$: $\alpha_1 = \frac{\Sigma F_1}{m}$ ή $\boxed{\alpha_1 = +1\,\frac{m}{s^2}}$

Χρονικό διάστημα $4\,\text{s} \rightarrow 8\,\text{s}$: $\alpha_2 = \frac{\Sigma F_2}{m}$ ή $\boxed{\alpha_2 = 0\,\frac{m}{s^2}}$

Χρονικό διάστημα $8\,\text{s} \rightarrow 12\,\text{s}$: $\alpha_3 = \frac{\Sigma F_3}{m}$ ή $\boxed{\alpha_3 = -1\,\frac{m}{s^2}}$

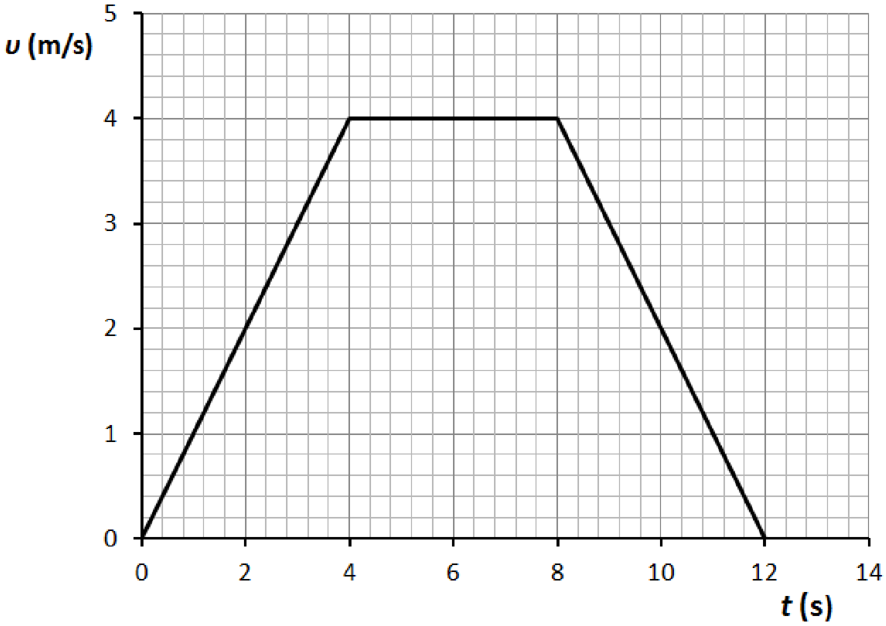
Δ2) Για τις ταχύτητες έχουμε

Χρονική στιγμή $t_1 = 4\,s$: $\upsilon_1 = \alpha_1 t$ ή $\boxed{\upsilon_1 = +4\,\frac{m}{s}}$

Χρονική στιγμή $t_2 = 8\,s$: $\boxed{\upsilon_2 = +4\,\frac{m}{s}}$

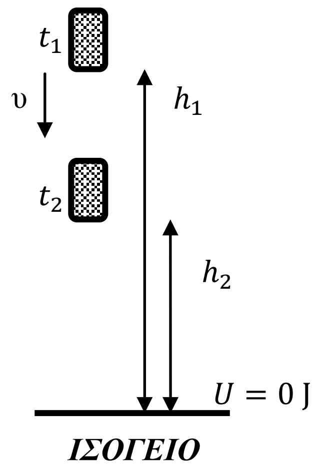
Χρονική στιγμή : $t_3 = 12\,s$: $\upsilon_3 = \upsilon_2 - |\alpha_3| \cdot t$ ή $\boxed{\upsilon_3 = 0\,\frac{m}{s}}$

Δ3)



Το ολικό μήκος της διαδρομής είναι ίσο με το εμβαδό του τραπεζίου :

Δx=E ή Δx = 32m.



Δ4) Η μετατόπιση του θαλάμου από τη χρονική στιγμή $t_1 = 4\,s$ έως τη χρονική στιγμή $t_2 = 8\,s$ είναι:

$$\Delta x_2 = \upsilon_2 \cdot (t_2 - t_1) \quad \text{ή} \quad \boxed{\Delta x_2 = +16\,\mathrm{m}}$$

και το έργο της δύναμης F_2 είναι:

$$W_{F_2} = F_2 \Delta x_2 \,\text{συν}\, \varphi \ \text{ ή } \ W_{F_2} = 5000 \cdot 16 \cdot (-1) \ \text{ ή } \ W_{F_2} = -80.000\,\mathrm{J}$$

Η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας του θαλάμου στο ίδιο χρονικό διάστημα είναι:

$$\Delta U = m \cdot g \cdot (h_2 - h_1) \ \text{ ή } \Delta U = \ 5000 \cdot (-16) = \text{ή} \ \boxed{\Delta U = -80.000\,\mathrm{J}}$$

Ενδεικτική Λύση

Δ1) Για τη ταχύτητα του αυτοκινήτου ισχύει

$$\upsilon = \upsilon_0 - \alpha \cdot \Delta t \Rightarrow 0 = \upsilon_0 - \alpha \cdot t_1 \Rightarrow \alpha = \frac{\upsilon_0}{t_1} \text{ και τελικά } \alpha = 5\frac{m}{s^2}$$

$$\left(\upsilon_0 = 72\frac{Km}{h} = 72\frac{1000\,m}{3600\,s} = 20\frac{m}{s}\right)$$

Δ2) Από τη σχέση $\upsilon = \upsilon_0 - \alpha \cdot \Delta t$ για $\Delta t = 2s$ έχουμε $\upsilon = 10\ \frac{m}{s}$ και

$$K = \frac{1}{2}m\upsilon^2 \text{ ή } K = 50.000 \text{ J}$$

Δ3) Από το 2ο νόμο του Νεύτωνα το μέτρο της συνισταμένης δύναμης είναι:

$$\Sigma F = m \cdot a \quad \text{ή} \quad F = 5.000 \text{ N}$$

Δ4) Εφαρμόζοντας το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας για τη συνολική μετατόπιση του σώματος και στις δύο περιπτώσεις έχουμε:

$$K_{\tau\varepsilon\lambda\iota\kappa\eta} - K_{\alpha\rho\chi\iota\kappa\eta} = \Sigma W_F \text{ ή } 0 - \frac{1}{2}m\upsilon^2 = F \cdot S \text{ (1)}$$

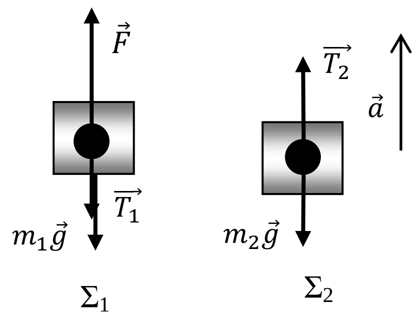
$$K'_{\tau\varepsilon\lambda\iota\kappa\eta} - K'_{\alpha\rho\chi\iota\kappa\eta} = \Sigma W_F \text{ ή } 0 - \frac{1}{2}m\upsilon'^2 = F \cdot S' \text{ (2)}$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις (1) και (2) έχουμε

$$\frac{\upsilon^2}{\upsilon'^2} = \frac{S}{S'} \text{ ή } \left(\frac{\upsilon}{\upsilon'}\right)^2 = \frac{S}{S'} \text{ ή } \left(\frac{72}{36}\right)^2 = \frac{S}{S'} \text{ και τελικά } S = 4S'$$

11669

<u>Ενδεικτική Λύση</u>



Δ1) Επειδή τα σώματα συνδέονται με μη εκτατό και τεντωμένο νήμα έχουν την ίδια επιτάχυνση $\vec{\alpha}$.
Εφαρμόζουμε το 2^o νόμο του Newton για κάθε σώμα ξεχωριστά θεωρώντας ως θετική τη φορά της επιτάχυνσης.

Σ_1: $F - m_1 \cdot g - T_1 = m_1 \cdot a$ (1)

Σ_2: $T_2 - m_2 \cdot g = m_2 \cdot a$ (2)

Δ2) Επειδή τα σώματα συνδέονται με αβαρές και τεντωμένο νήμα ισχύει:

$$T_1 = T_2 \ (\mu\acute{\varepsilon}\tau\rho\alpha).$$

Εφαρμόζουμε το 2^o νόμο του Newton για το σύστημα των δύο σωμάτων θεωρώντας ως θετική τη φορά της επιτάχυνσης:

$$F - m_1 \cdot g - T_1 + T_2 - m_2 \cdot g = (m_1 + m_2) \cdot a \quad ή \quad 90 - 40 - 20 = 6\alpha \quad ή \quad \boxed{\alpha = 5\frac{m}{s^2}}.$$

Δ3)

$$W_{o\lambda} = W_{w_1} + W_{w_2} \quad ή \quad W_{o\lambda} = -m_1 \cdot g \cdot h - m_2 \cdot g \cdot h \quad ή \quad \boxed{W_{o\lambda} = -600J}$$

Δ4) Το σύστημα των σωμάτων εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση. Από την εξίσωση της μετατόπισης υπολογίζουμε το χρόνο κίνησης για μετατόπιση, $\Delta y = h = 10m$:

$$\Delta y = \frac{1}{2}at^2 \quad ή \quad t = \sqrt{\frac{2 \cdot \Delta y}{a}} \quad ή \quad \boxed{t = 2s}$$

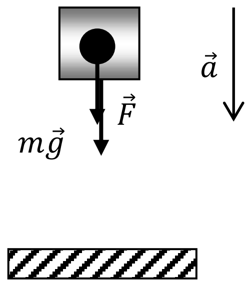
Και από την εξίσωση της ταχύτητας υπολογίζουμε το μέτρο της όταν τα σώματα έχουν μετατοπιστεί (ανυψωθεί) κατά 10 m:

$$\upsilon = \alpha \cdot t \quad ή \quad \upsilon = 10\frac{m}{s}.$$

Άρα, $K_{o\lambda} = K_1 + K_2$ ή $K_{o\lambda} = \frac{1}{2}m_1\upsilon^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon^2$ ή $\boxed{K_{o\lambda} = 300J}$.

11670

Ενδεικτική λύση



Δ1) Ο κύβος εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση χωρίς αρχική ταχύτητα. Η τιμή της επιτάχυνσης υπολογίζεται από την εξίσωση κίνησης για $t_1 = 2s$ και $\Delta y = h = 30m$:

$$\Delta y = \frac{1}{2}at_1^2 \qquad ή \qquad \boxed{\alpha = 15\frac{m}{s^2}},$$

και κατεύθυνση αυτή του σχήματος.

Δ2) Εφαρμόζουμε το 2^o νόμο του Newton για τον κύβο θεωρώντας ως θετική τη φορά της επιτάχυνσης.

$$F + m \cdot g = m \cdot a \quad ή \quad m = \frac{F}{a - g} \quad ή \quad \boxed{m = 4kg}.$$

Δ3) Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μεταβολής της Κινητικής Ενέργειας – Έργου (ΘΜΚΕ) για τη μετατόπιση του σώματος από το σημείο εκκίνησης έως το σημείο ακριβώς πριν έρθει σε επαφή με το έδαφος:

$$K_{τελ} - K_{αρχ} = W_B + W_F \quad ή \quad K_{τελ} - 0 = +m \cdot g \cdot h + F \cdot h \quad ή \quad \boxed{K_{τελ} = 1800J}$$

Δ4) Τη χρονική στιγμή που ο κύβος απέχει y =18 m από το έδαφος περικλείει δυναμική ενέργεια ως προς αυτό:

$$U = mgy \;\; ή \;\; U = 720J,$$

και έχει μετατοπιστεί ως προς τη θέση εκκίνησης κατά

$$\Delta y' = h - y \;\; ή \;\; \Delta y' = 12m.$$

Από την εξίσωση της μετατόπισης υπολογίζουμε το χρόνο κίνησης για μετατόπιση, $\Delta y' = 12m$:

$$\Delta y' = \frac{1}{2}at^2 \quad ή \quad t = \sqrt{\frac{2 \cdot \Delta y'}{a}} \quad ή \quad t = \sqrt{1{,}6}s$$

και από την εξίσωση της ταχύτητας υπολογίζουμε το μέτρο της:

$$\upsilon = \alpha \cdot t \quad ή \quad \upsilon = 15\sqrt{1{,}6}\frac{m}{s},$$

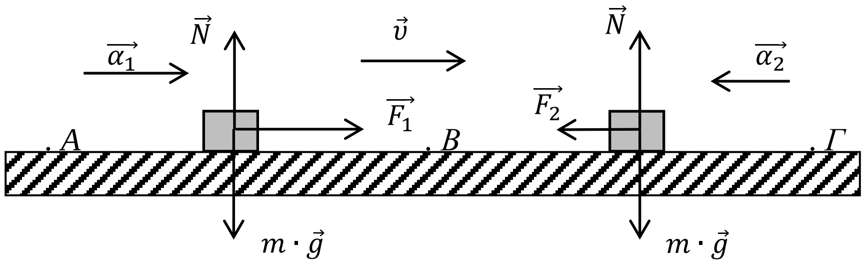
Στη συνέχεια για την κινητική ενέργεια του κύβου ισχύει,

$$K = \frac{1}{2}m\upsilon^2 \quad ή \quad K = 720J.$$

Άρα,

$$\boxed{\frac{K}{U} = 1}$$

Ενδεικτική λύση



Δ1) Έστω Α, Β και Γ οι θέσεις του κιβωτίου τις χρονικές στιγμές $t = 0$, t_1 και t_2 αντίστοιχα και $(AB) = \Delta x_1 = 16m.$

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μεταβολής της Κινητικής Ενέργειας – Έργου (ΘΜΚΕ) για τη μετατόπιση του κιβωτίου από το Α στο Β, :

$$K_{τελ} - K_{αρχ} = W_{F_1} \quad ή \quad \frac{1}{2}mv_B^2 - 0 = +F_1 \cdot \Delta x_1 \quad ή \quad \boxed{v_B = 8\frac{m}{s}}.$$

Δ2) 0→ t_1: Το κιβώτιο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση χωρίς αρχική ταχύτητα με επιτάχυνση μέτρου α_1, που υπολογίζεται από την εφαρμογή του $2^{ου}$ νόμου του Newton λαμβάνοντας ως θετική τη φορά της ταχύτητας :

$$\Sigma F = m \cdot a_1 \quad ή \quad \alpha_1 = \frac{F_1}{m} \quad ή \quad \alpha_1 = 2\frac{m}{s^2}.$$

Από την εξίσωση της επιτάχυνσης μπορεί να προσδιοριστεί η χρονική στιγμή t_1:

$$\alpha_1 = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad ή \quad \alpha_1 = \frac{v_B - 0}{t_1 - 0} \quad ή \quad t_1 = \frac{v_B}{\alpha_1} \quad ή \quad t_1 = 4s,$$

Οπότε για την εξίσωση της ταχύτητας ισχύει:

$$v = \alpha_1 \cdot t = 2 \cdot t \qquad (S.I), \qquad για\ 0 \le t \le 4s.$$

t_1→ t_2: Το κιβώτιο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα $\vec{v_B}$ και επιβράδυνση $\vec{\alpha_2}$, που η τιμή της υπολογίζεται από την εφαρμογή του $2^{ου}$ νόμου του Newton λαμβάνοντας ως θετική τη φορά της ταχύτητας :

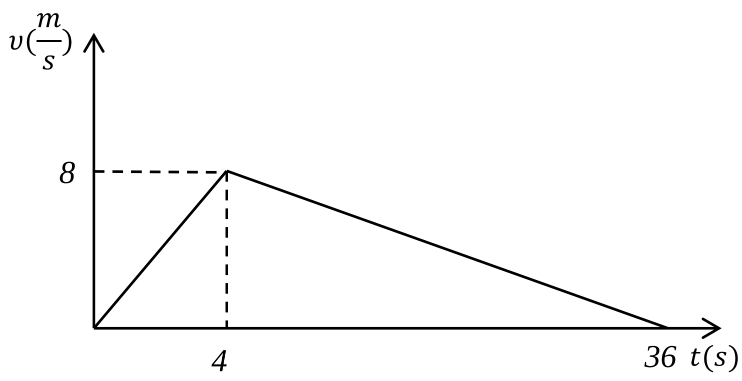
$$\Sigma F = m \cdot a_2 \quad ή \quad \alpha_2 = \frac{-F_2}{m} \quad ή \quad \alpha_2 = -0{,}25\frac{m}{s^2}.$$

Από την εξίσωση της επιβράδυνσης μπορεί να προσδιοριστεί η χρονική στιγμή t_2:

$$\alpha_2 = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad ή \quad \alpha_2 = \frac{0 - v_B}{t_2 - t_1} \quad ή \quad t_2 - t_1 = \frac{-v_B}{\alpha_2} = 32s \quad ή \quad t_2 = 36s$$

Οπότε για την εξίσωση της ταχύτητας ισχύει:

$$\upsilon = \upsilon_B + \alpha_2 \cdot t \quad ή \quad \upsilon = 8 - 0{,}25 \cdot t \qquad (S.I), \qquad για\ 4s \le t \le 36s.$$



Δ3) Το εμβαδό που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης *υ* = *f(t)* και του άξονα των χρόνων είναι αριθμητικά ίσο με την μετατόπιση του κινητού, άρα:

$$\Delta x_{ο\lambda} = \frac{36 \cdot 8}{2} \quad ή \quad \Delta x_{ο\lambda} = 144\ m.$$

Δ4) Από την εξίσωση μετατόπισης από $t_1 \longrightarrow t_2$, με $\Delta t = t_2 - t_1$ ή $\Delta t = 32s$, έχουμε:

$$\Delta x_2 = \upsilon_B \Delta t + \frac{1}{2} a_2 \Delta t^2 \quad ή \quad \Delta x_2 = 128\ m$$

και, $W_{F_2} = F_2 \cdot \Delta x_2 \cdot συν180^0$ ή $W_{F_2} = -F_2 \cdot \Delta x_2$ ή $\boxed{W_{F_2} = -1280J}$

Ενδεικτική λύση

Δ1) Στο χρονικό διάστημα 0 – 5 s η δύναμη είναι σταθερή, επομένως, σύμφωνα με τον 2^{ο} νόμο του Νεύτωνα $F = m \cdot \alpha$ και η επιτάχυνση α θα είναι σταθερή.

Η κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη.

Η επιτάχυνση θα έχει μέτρο:

$$\alpha = \frac{\Delta \upsilon}{\Delta t} = 2 \text{ m/s}^2.$$

Δ2) Από τον 2^{ο} νόμο του Νεύτωνα:

$$m = \frac{F}{m} = 4 \text{ kg}.$$

Δ3) 0-5 s: Κίνηση ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη.

Όταν t = 5 s η ταχύτητα είναι:

$$\upsilon_1 = 14 \text{ m/s}.$$

5-10 s: Ευθύγραμμη ομαλή κίνηση με:

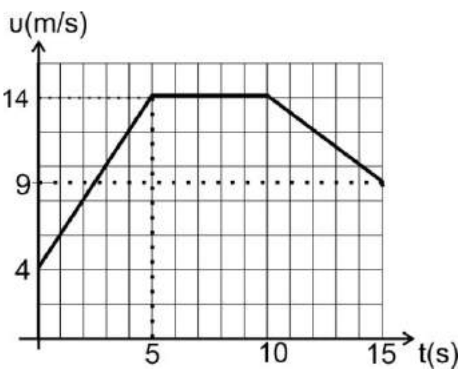
$$\upsilon_2 = \upsilon_1 = 14 \text{ m/s}.$$

10-15 s: Κίνηση ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη με:

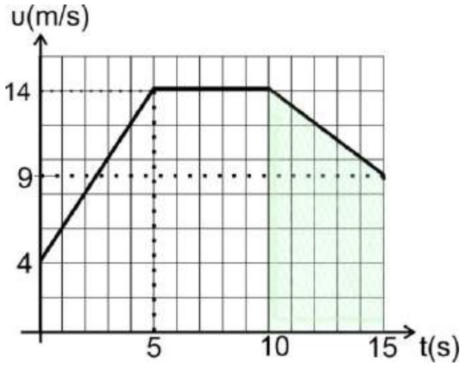
$$|\alpha'| = \frac{|F|}{m} = 1 \text{ m/s}^2.$$

Όταν t = 15 s η ταχύτητα είναι:

$$\upsilon_3 = \upsilon_2 - |\alpha'|\Delta t = 9 \text{ m/s}.$$



Δ4) Στο χρονικό διάστημα 10-15s η μετατόπιση υπολογίζεται από το εμβαδό του αντίστοιχου τραπεζίου:



$$\Delta x = \frac{(14+9)}{2} \cdot 5\ m \quad \text{ή} \quad \Delta x = 57{,}5\ m$$

Το έργο είναι:

$$W = F \cdot \Delta x = -230\ J.$$

Ενδεικτική λύση

Δ1) Η επιτάχυνση του αυτοκινήτου είναι:

$$\alpha = \frac{\Delta\upsilon}{\Delta t} \quad \text{ή} \quad \alpha = 2{,}5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

Από τον 2^{o} νόμο του Νεύτωνα:

$$\Sigma F = m \cdot \alpha \quad \text{ή} \quad \Sigma F = 2500\ \mathrm{N}.$$

Δ2) Από την εκκίνηση του μέχρι τη χρονική στιγμή t_2 = 4 s το αυτοκίνητο έχει μετατόπιση

$$\Delta x = \frac{1}{2}\,\alpha \cdot t^2 \quad \text{ή} \quad \Delta x = 20\,m.$$

Άρα θα απέχει από το φανάρι Φ2 απόσταση:

$$s = d - x = 480\ \mathrm{m}.$$

Δ3) Κατά τη διάρκεια της ευθύγραμμης ομαλής κίνησης, το αυτοκίνητο μέχρι να φθάσει στο φανάρι Φ2 χρειάζεται χρόνο

$$\Delta t = \frac{s}{\upsilon_2} \quad \text{ή} \quad \Delta t = 48\ \mathrm{s}.$$

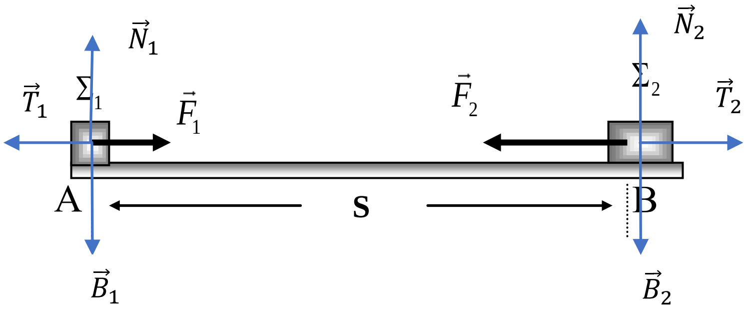
Επομένως φθάνει στο Φ2 τη χρονική στιγμή:

$$t = t_2 + \Delta t \quad \text{ή} \quad t = 52\ \mathrm{s}.$$

Δ4) Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Μεταβολής της Κινητικής Ενέργειας – Έργου βρίσκουμε:

$$\Sigma W = \Delta K \ \text{ ή } \ \Sigma W = \frac{1}{2}\,m \cdot \upsilon^2 - \frac{1}{2}\,m \cdot \upsilon_1^2 \ \text{ ή } \ \Sigma W = 37500\,J.$$

Ενδεικτική λύση



Δ1) Λόγω της ισορροπίας στον κατακόρυφο άξονα

Για τον κύβο Σ_1:

$$\Sigma F_{y1} = 0 \quad ή \quad N_1 - B_1 = 0 \quad ή \quad N_1 = m_1 \cdot g$$

$$T_1 = \mu \cdot N_1 = \mu \cdot m_1 \cdot g = 20\ \text{N}$$

Όμοια για τον κύβο Σ_2:

$$T_2 = \mu \cdot m_2 \cdot g = 40\ \text{N}.$$

Δ2) Κύβος Σ_1:

Επειδή $\Sigma F_x = F_1 - T_1 = 0$, η κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλή.

Κύβος Σ_2 :

Επειδή $\Sigma F_x = F_2 - T_2 > 0$ και $\Sigma F_x =$ σταθ,

η κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη με

$$\alpha = \frac{F2 - T2}{m_2} \quad ή \quad \alpha = 2\,\frac{m}{s^2}$$

Δ3) Οι κύβοι θα συναντηθούν σε ένα σημείο που απέχει απόσταση x από το σημείο Α.

Οι εξισώσεις κίνησης για κάθε κύβο είναι:

Κύβος Σ_1:

$$x = \upsilon_1 \cdot t \qquad (1)$$

Κύβος Σ_2:

$$s - x = \upsilon_2 \cdot t - \frac{1}{2}\alpha \cdot t^2 \qquad (2)$$

Από τις (1) και (2) βρίσκουμε ότι:

$$t = 10\ \text{s και } x = 50\ \text{m}.$$

Δ4) Η ενέργεια μεταφέρθηκε στον κύβο Σ_1 μέσω του έργου της $\vec{F_1}$:

$$W_{F1} = F_1 \cdot x \quad ή \quad W_{F1} = 1000\ \text{J}.$$

<u>Ενδεικτική λύση</u>

Δ1) Το έργο της τριβής είναι:

$$W_{\mathbf{T}} = - T \cdot x = - 24 \text{ J}$$

Δ2) Από τη σχέση υπολογισμού του έργου σταθερής δύναμης

$W_F = F \cdot x$ βρίσκουμε $F = 8$ N.

Δ3) Ο κύβος εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση.

Οι εξισώσεις της μετατόπισης και της ταχύτητας είναι αντίστοιχα

$$x = \frac{1}{2} \alpha \cdot t^2 \qquad (1)$$

$$\upsilon = \alpha \cdot t \qquad (2)$$

Από τις (1) και (2) υπολογίζουμε την επιτάχυνση:

$$\alpha = 2 \ \frac{m}{s^2}.$$

Από τον 2^o νόμο του Νεύτωνα έχουμε:

$$\Sigma F_x = m\alpha \text{ ή } F - T = m\alpha$$

απ' όπου βρίσκουμε ότι:

$$m = 1 \text{ kg}.$$

Δ4) Από τον τύπο της κινητικής ενέργειας:

$$K = \frac{1}{2} m \cdot \upsilon^2$$

βρίσκουμε

$$\upsilon = 6 \frac{m}{s}.$$

Το μέτρο της επιτάχυνσης α' θα είναι

$$\alpha' = \frac{\Delta \upsilon}{\Delta t} \quad \text{ή} \quad \alpha = 3 \ \frac{m}{s^2}.$$

Από τον 2^o νόμο του Νεύτωνα προκύπτει

$$F = m \cdot \alpha' \quad \text{ή} \quad F = 3 \text{ N}.$$

Ενδεικτική λύση

Δ1) Από την εξίσωση κίνησης

$$\Delta x = \frac{1}{2}\,\alpha \cdot t^2$$

υπολογίζουμε την επιτάχυνση

$$\alpha = 2\,\frac{m}{s^2}.$$

Δ2) Ο 2ος νόμος του Νεύτωνα δίνει

$$\Sigma F_x = m\cdot\alpha \quad ή \quad F - T = m\cdot\alpha$$

απ' όπου

$T = 10$ N και $\Sigma F_y = 0$ ή $N - B = 0$ ή $N = B$ ή $N = m\cdot g$ ή N= 200 N,

όπου $\vec{B}$ είναι το βάρος του σώματος και $\vec{N}$ είναι η κάθετη αντίδραση του δαπέδου.

Οπότε $\mu = \frac{T}{N}$ ή μ= 0,05.

Δ3) Ο χρόνος στον οποίο το κιβώτιο αποκτά ταχύτητα 2 $\frac{m}{s}$ υπολογίζεται από την εξίσωση της ταχύτητας:

$$\upsilon = \alpha\cdot t' \text{ και } t' = 1\text{s}.$$

Στο χρόνο αυτό η μετατόπιση του κιβωτίου είναι:

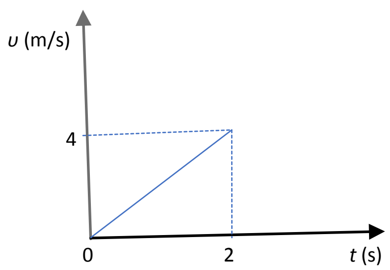
$$\Delta x' = \frac{1}{2}\,\alpha \cdot t'^2 \quad ή \quad \Delta x' = 1\,m.$$

Το έργο της δύναμης της τριβής είναι:

$$W_T = -\,T\cdot x \quad ή \quad W_T = -\,10 \text{ J}.$$

Δ4) Τη χρονική στιγμή $t'' = 2$ s η ταχύτητα του κιβωτίου είναι:

$$\upsilon'' = \alpha\cdot t'' \quad ή \quad \upsilon'' = 4\,\frac{m}{s}.$$



Ενδεικτική λύση

Δ1) Στο συσσωμάτωμα ασκείται συνισταμένη δύναμη:

$$\Sigma F = F - B \text{ ή } F - (m_1 + m_2)g = 10 \text{ N},$$

όπου $\vec{B}$ είναι το βάρος του συσσωματώματος.

Από τον 2ο νόμο του Νεύτωνα υπολογίζουμε την επιτάχυνση:

$$\alpha = \frac{\Sigma F}{m_1 + m_2} \quad \text{ή} \quad \alpha = 2\frac{m}{s^2}.$$

Δ2) Η χρονική στιγμή κατά την οποία αποκολλάται το Σ_2 υπολογίζεται από την εξίσωση κίνησηςQ

$$h = \frac{1}{2}\alpha \cdot t^2 \quad \text{απ' όπου προκύπτει } t = 4 \text{ s}.$$

Δ3) Τη στιγμή της αποκόλλησης η ταχύτητα είναι κοινή για τα δύο σώματα και ίση με:

$$\upsilon = \alpha t = 8 \text{ m/s}.$$

Δ4) Όταν αποκολληθεί το σώμα Σ_2, το σώμα Σ_1 συνεχίζει να κινείται με την επίδραση συνισταμένης δύναμης

$$\Sigma F' = F - B_1 = F - m_1 \cdot g = 30 \text{ N},$$

όπου $\vec{B_1}$ είναι το βάρος του Σ_1.

Η επιτάχυνση του Σ_1 είναι :

$$\alpha' = \frac{\Sigma F}{m_1} \quad \text{ή} \quad \alpha' = 10\frac{m}{s^2}.$$

Στο χρονικό διάστημα Δt = 1s το σώμα Σ_1 ανέρχεται κατά:

$$\Delta h = \upsilon \cdot \Delta t + \frac{1}{2}\alpha \cdot \Delta t^2 \quad \text{ή} \quad \Delta h = 13\, m.$$

Τη χρονική στιγμή $t_{ολ} = t + \Delta t = 5$ s, το Σ_1 βρίσκεται σε ύψος

$$h_{ολ} = h + \Delta h \quad \text{ή} \quad h_{ολ} = 29 \text{ m από το έδαφος.}$$

Η βαρυτική δυναμική του ενέργεια είναι

$$U = m_1 \cdot g \cdot h_{ολ} \quad \text{ή} \quad U = 870 \text{ J}.$$

Ενδεικτική λύση

Δ1) Σύμφωνα με τον 2ο νόμο του Νεύτωνα, στον κατακόρυφο άξονα, ισχύει:

$$\Sigma F_y = N - B = 0 \text{ ή } N = B \text{ ή } N = mg,$$

όπου $\vec{B}$ είναι το βάρος του σώματος και $\vec{N}$ η κάθετη αντίδραση του δαπέδου.

Το μέτρο της τριβής είναι

$$T = \mu mg = 10 \text{ N}.$$

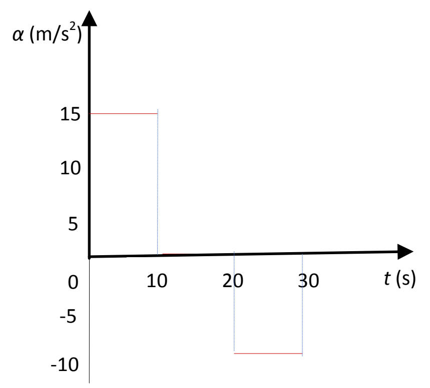
Η τιμή της επιτάχυνσης είναι σταθερή και υπολογίζεται από τον 2^{o} νόμο του Νεύτωνα:

$$\alpha = \frac{F-T}{m}.$$

Οπότε

0 – 10 s: $\alpha_1 = 15 \text{ m/s}^2$
10 – 20 s: $\alpha_2 = 0$
20 – 30 s: $\alpha_3 = - 10 \text{ m/s}^2$

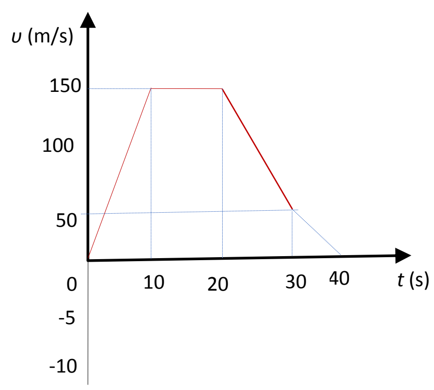
Το διάγραμμα επιτάχυνσης – χρόνου θα είναι



Η ταχύτητα είναι:

t_1 =10 s: $\upsilon_1 = \alpha_1 \, \Delta t_1 = 150$ m/s
$t_2 = 10$ s – $t_3 = 20$ s: $\upsilon_2 = 150$ m/s
$t_4 = 30$ s: $\upsilon_3 = \upsilon_2 - |\alpha_3| \Delta t_3 = 50$ m/s

Το διάγραμμα ταχύτητας – χρόνου θα είναι:



Δ3) Μετά το 30^{o} δευτερόλεπτο στο σώμα ασκείται μόνο η τριβή. Το μέτρο της επιβράδυνσης του σώματος τότε είναι:

$$\alpha_4 = \frac{T}{m} = 5 \text{ m/s}^2.$$

Η χρονική στιγμή κατά την οποία σταματάει το σώμα υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\upsilon = \upsilon_3 - |\alpha_4|\ \Delta t$$

θέτοντας $\upsilon = 0$, οπότε $\Delta t = 10$ s και $t_{stop} = 30 + \Delta t = 40$ s.

Ο συνολικός χρόνος κίνησης του σώματος είναι:

$$t_{ολ} = t_{stop}.$$

Δ4) Από το εμβαδό του σχήματος που σχηματίζεται από το διάγραμμα $\upsilon - t$ για το χρονικό διάστημα 0 – 40 s υπολογίζουμε τη μετατόπιση του σώματος από την έναρξη της κίνησής του μέχρι να σταματήσει:

$$x = 3500 \text{ m}.$$

Οπότε το έργο της τριβής είναι:

$$W_T = - T \cdot x = - 35000 \text{ J}.$$

Ενδεικτική λύση

Δ1) Το χρονικό διάστημα 0-5 s η συνισταμένη δύναμη είναι σταθερή και έχει μέτρο:

$$\Sigma F = F_1 - F_2 = 20 \text{ N}.$$

Το χρονικό διάστημα 5-7 s η συνισταμένη δύναμη είναι σταθερή και έχει μέτρο:

$$\Sigma F' = -F_2 = -10 \text{ N}.$$

Μετά το 7$^{\text{ο}}$ δευτερόλεπτο η συνισταμένη δύναμη είναι μηδέν.

Εφαρμόζοντας το 2$^{\text{ο}}$ νόμο του Νεύτωνα:

$$\alpha = \frac{\Sigma F}{m}$$

βρίσκουμε ότι τη χρονική στιγμή $t_1 = 2$ s η επιτάχυνση έχει τιμή

$$\alpha = 10\frac{m}{s^2}$$

και τη χρονική στιγμή $t_2 = 6$ s η επιτάχυνση έχει τιμή

$$\alpha' = -5\frac{m}{s^2}\ .$$

Δ2) Τη χρονική στιγμή $t = 5$ s το σώμα έχει αποκτήσει ταχύτητα:

$$\upsilon = \alpha \cdot t \quad \text{ή} \quad \upsilon = 50\ \frac{m}{s}.$$

Τη χρονική στιγμή $t' = 7$ s θα έχει αποκτήσει ταχύτητα:

$$\upsilon' = \upsilon - |\alpha'| \cdot (t' - t) \quad \text{ή} \quad \upsilon' = 40\ \frac{m}{s}.$$

Μετά το 7$^{\text{ο}}$ δευτερόλεπτο το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση, σύμφωνα με τον 1$^{\text{ο}}$ νόμο του Νεύτωνα. Επομένως τη χρονική στιγμή $t_3 = 10$ s θα έχει κινητική ενέργεια:

$$K = \frac{1}{2}\, m \cdot \upsilon'^2 \quad \text{ή} \quad K = 1600\, J.$$

Δ3) Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις κίνησης βρίσκουμε ότι

για το χρονικό διάστημα 0-5 s: $\Delta x_1 = ½\, \alpha\, \Delta t_1^2 = 125$ m,

για το χρονικό διάστημα 5-7 s: $\Delta x_2 = \upsilon\, \Delta t_2 - ½\, |\alpha'|\, \Delta t_2^2 = 90$ m,

δια το χρονικό διάστημα 7-10 s: $\Delta x_3 = \upsilon' \Delta t_3 = 120$ m.

Η μετατόπιση στο χρονικό διάστημα 0 – 10 s είναι:

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 = 335 \text{ m}.$$

Δ4)

$$W_{F1} = F_1\, \Delta x_1 = 3750 \text{ J} \quad \text{και} \quad W_{F2} = -F_2\, (\Delta x_1 + \Delta x_2) = -2150 \text{ J}.$$

<u>Ενδεικτική Λύση</u>

Δ1) Από τον ορισμό για το έργο σταθερής δύναμης θα έχουμε για το έργο της F και για την μετατόπιση Δx_1:

$$W_F = F \cdot \Delta x_1 \cdot συν0^o \Rightarrow W_F = 3000 \text{ J}.$$

Δ2) Από το θεώρημα έργου – ενέργειας για την κίνηση του κιβωτίου από τη χρονική στιγμή $t = 0$ μέχρι τη χρονική στιγμή που σταματά να κινείται ισχύει ότι :

$$0 - 0 = W_F + W_T.$$

Το έργο της τριβής, για τη συνολική κίνηση, θα είναι ίσο με

$$W_T = T \cdot (\Delta x_1 + \Delta x_2) \cdot συν180°.$$

Το μέτρο της δύναμης της τριβής να δίνεται από τη σχέση:

$$T = \mu \cdot N.$$

Επειδή όμως το σώμα ισορροπεί στον κατακόρυφο άξονα y θα έχουμε ότι:

$$\sum F = 0 \Rightarrow N - w = 0 \Rightarrow N = m \cdot g.$$

Άρα το έργο της τριβής θα δίνεται από τη σχέση

$$W_T = -\mu \cdot m \cdot g \cdot (\Delta x_1 + \Delta x_2).$$

Εισάγοντας την τελευταία σχέση για το έργο της τριβής, αλλά και το έργο της δύναμης F που υπολογίστηκε στο (**Δ1**) στην εξίσωση του θεωρήματος έργου-ενέργειας προκύπτει:

$$0 - 0 = 3600 - \mu \cdot m \cdot g \cdot (\Delta x_1 + \Delta x_2) \Rightarrow \mu = 0{,}2.$$

Δ3) Μετά την κατάργηση της δύναμης F το κιβώτιο εκτελεί ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση εξαιτίας της τριβής. Από το 2^o Νόμο του Νεύτωνα (θετική φορά αυτή της κίνησης) θα έχουμε:

$$-T = m \cdot a \Rightarrow a = -2 \ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Δ4) Αν τη στιγμή που καταργείται η δύναμη F η ταχύτητα του κιβωτίου είναι ίση με υ_1, τότε για την κίνηση που θα επακολουθήσει θα ισχύει ότι:

$$\Delta x_2 = x_{stop} = \frac{\upsilon_1^2}{2 \cdot |a|} \Rightarrow \upsilon_1 = \sqrt{40}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Αυτό σημαίνει ότι η κινητική ενέργεια του κιβωτίου, τη στιγμή που παύει να δρα η δύναμη F, θα είναι:

$$K = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \upsilon_1^2 \Rightarrow K = 1000 \text{ J}.$$

Ενδεικτική Λύση

Δ1) Η τριβή ολίσθησης που δρα στο σώμα κατά την κίνησή του υπολογίζεται από τη σχέση:

$$T = \mu \cdot N.$$

Επειδή όμως το σώμα ισορροπεί στον άξονα y (κατακόρυφος άξονας) έχουμε ότι:

$$\sum F = 0 \Rightarrow N - w = 0 \Rightarrow N = m \cdot g.$$

Συνδυάζοντας τις δύο αυτές σχέσεις προκύπτει ότι:

$$T = \mu \cdot m \cdot g \Rightarrow T = 16 \text{ N}.$$

Στο χρονικό διάστημα 0 → 5 s είναι F = 40 N, οπότε από το 2^{ο} νόμο του Νεύτωνα για το σώμα (θετική φορά αυτή της κίνησης) προκύπτει:

$$F - T = m \cdot \alpha_1 \Rightarrow \alpha_1 = 6\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

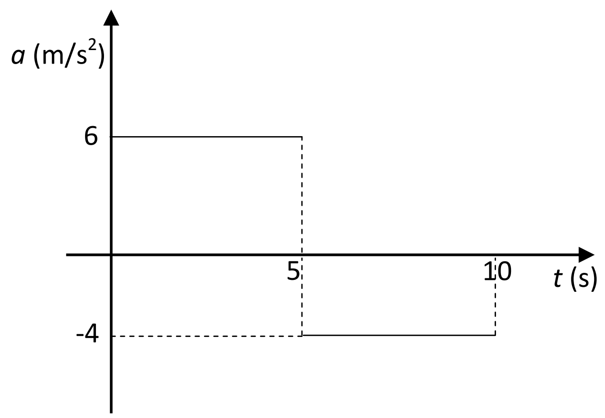
και το σώμα θα εκτελεί ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση.

Στο χρονικό διάστημα 5 → 10 s είναι F = 0 N, οπότε από το 2^{ο} νόμο του Νεύτωνα για το σώμα (θετική φορά αυτή της κίνησης) προκύπτει:

$$-T = m \cdot \alpha_2 \Rightarrow \alpha_2 = -4\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

και το σώμα θα εκτελεί ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση.

Το ζητούμενο διάγραμμα φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί.



Δ2) Στο χρονικό διάστημα 0 → 5 s το σώμα εκτελεί ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση και η ταχύτητά του δίνεται από τη σχέση $\upsilon_1 = a_1 \cdot t$ αφού δεν υπάρχει αρχική ταχύτητα.

Τη χρονική στιγμή t = 5 s η ταχύτητά του θα είναι υ_1 = 30 m/s και η γραφική παράσταση στο διάγραμμα $\upsilon - t$ θα είναι μια ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Στο χρονικό διάστημα 5 → 10 s το σώμα εκτελεί ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση, με αρχική ταχύτητα υ_1 = 30 m/s και η ταχύτητά του δίνεται από τη σχέση:

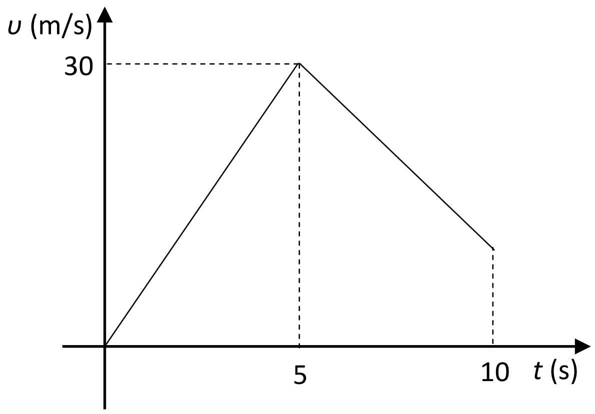
$$\upsilon_2 = 30 - a_2 \cdot \Delta t$$

όπου Δt το χρονικό διάστημα που εκτελεί επιβραδυνόμενη κίνηση. Αυτό σημαίνει ότι μετά από

$$\Delta t = 10 - 5 = 5 \text{ s}$$

η ταχύτητα του σώματος θα έχει γίνει $\upsilon_2 = 10\ \frac{m}{s}$ και η γραφική παράσταση στο διάγραμμα $\upsilon - t$ θα είναι μια ευθεία με αρνητική κλίση που θα καταλήγει στην ταχύτητα των 10 m/s.

Το ζητούμενο διάγραμμα φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί.



Δ3) Η μετατόπιση του σώματος στο χρονικό διάστημα 0 → 5 s μπορεί να υπολογιστεί από το εμβαδόν του τριγώνου στο διάγραμμα $\upsilon - t$ που έχει βάση 5 s και ύψος 30 m/s. Επομένως θα είναι:

$$\Delta x_1 = E_{τριγώνου} = 75 \text{ m.}$$

Από τον ορισμό για το έργο σταθερής δύναμης θα έχουμε ότι το έργο της F = 40 N για την προηγούμενη μετατόπιση Δx_1 θα είναι:

$$W_F = F \cdot \Delta x_1 \cdot συν0° \Rightarrow W_F = 3000 \text{ J.}$$

Δ4) Παρόμοια με το προηγούμενο ερώτημα, η μετατόπιση του σώματος στο χρονικό διάστημα 5 → 10 s μπορεί να υπολογιστεί από το εμβαδόν του τραπεζίου στο διάγραμμα $\upsilon - t$ που έχει βάσεις 10 m/s και 30 m/s και ύψος 10 – 5 = 5 s. Επομένως θα είναι:

$$\Delta x_2 = E_{τραπεζίου} = 100 \text{ m.}$$

Από τον ορισμό για το έργο σταθερής δύναμης θα έχουμε ότι το έργο της τριβής ολίσθησης, για την προηγούμενη μετατόπιση Δx_2, θα είναι:

$$W_T = T \cdot \Delta x_2 \cdot \sigma\upsilon\nu 180° \Rightarrow W_T = -1600 \text{ J.}$$

Ενδεικτική Λύση

Δ1) Η δύναμη της τριβής μπορεί να υπολογιστεί από την εξίσωση $T = \mu \cdot N$ που αν συνδυαστεί με την εξίσωση που προκύπτει από την ισορροπία του σώματος στον άξονα y (κατακόρυφο άξονα)

$$\sum F = 0 \Rightarrow N - w = 0 \Rightarrow N = m \cdot g$$

δίνει:

$$T = \mu \cdot m \cdot g \Rightarrow T = 1 \text{ N}.$$

Επειδή για $t_1 = 3$ s (αλλά και για $t = 0$) από το διάγραμμα διαπιστώνουμε ότι $F = 5$ N > T το σώμα θα ξεκινήσει να κινείται. Από το 2^{ο} νόμο του Νεύτωνα η επιτάχυνση θα είναι:

$$F - T = m \cdot a \Rightarrow a = 10\frac{m}{s^2}$$

Δ2) Το κιβώτιο κινείται ευθύγραμμα ομαλά επιταχυνόμενα, ξεκινώντας από την ακινησία, επομένως από την εξίσωση της μετατόπισης έχουμε:

$$\Delta x = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \Rightarrow \Delta x = 125 \text{ m}.$$

Δ3) Από τον ορισμό για το έργο σταθερής δύναμης θα έχουμε για το έργο της F κατά την μετατόπιση $\Delta x = 16$ m:

$$W_F = F \cdot \Delta x \cdot \sigma\upsilon\nu 0° \Rightarrow W_F = 625 \text{ J}.$$

Δ4) Τη χρονική στιγμή t_1 το σώμα θα έχει ταχύτητα:

$$\upsilon_1 = a \cdot t \Rightarrow \upsilon_1 = 30\frac{m}{s}.$$

Αυτό σημαίνει ότι η κινητική ενέργεια του σώματος θα είναι:

$$K_1 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \upsilon^2 \Rightarrow K = 180 \text{ J}.$$

Ενδεικτική Λύση

Δ1) Τη ζητούμενη χρονική στιγμή (t_1) για τις ταχύτητες του φορτηγού (υ_Φ) και της μοτοσυκλέτας (υ_M) θα ισχύει ότι $\upsilon_\Phi = \upsilon_M$.

Το φορτηγό όμως κινείται ομαλά με ταχύτητα $\upsilon_\Phi = 72\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \rightarrow \upsilon_\Phi = 20\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, ενώ η μοτοσυκλέτα κινείται με σταθερή επιτάχυνση $a = 2\frac{m}{s^2}$ και χωρίς αρχική ταχύτητα, επομένως την τυχαία χρονική στιγμή θα έχει ταχύτητα που θα δίνεται από τη σχέση

$$\upsilon_M = a \cdot t.$$

Αντικαθιστώντας την σταθερή ταχύτητα του φορτηγού και τη σχέση για την ταχύτητα της μοτοσυκλέτας στην αρχική εξίσωση έχουμε:

$$20 = a \cdot t_1 \Rightarrow t_1 = 10\ \mathrm{s}.$$

Δ2) Τη ζητούμενη χρονική στιγμή (t') για τις θέσεις του φορτηγού (x_Φ) και της μοτοσυκλέτας (x_M) θα ισχύει ότι $x_\Phi = x_M$. Το φορτηγό όμως κινείται ομαλά, επομένως η θέση του θα δίνεται κάθε στιγμή από την εξίσωση:

$$x_\varphi = \upsilon_\Phi \cdot t$$

ενώ η μοτοσυκλέτα κινείται με σταθερή επιτάχυνση:

$$a = 2\frac{m}{s^2}$$

και χωρίς αρχική ταχύτητα, επομένως την τυχαία χρονική στιγμή η θέση της θα δίνεται από τη σχέση

$$x_M = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2.$$

Αντικαθιστώντας τις δύο εξισώσεις που δίνουν τις θέσεις του φορτηγού και της μοτοσυκλέτας στην αρχική εξίσωση έχουμε:

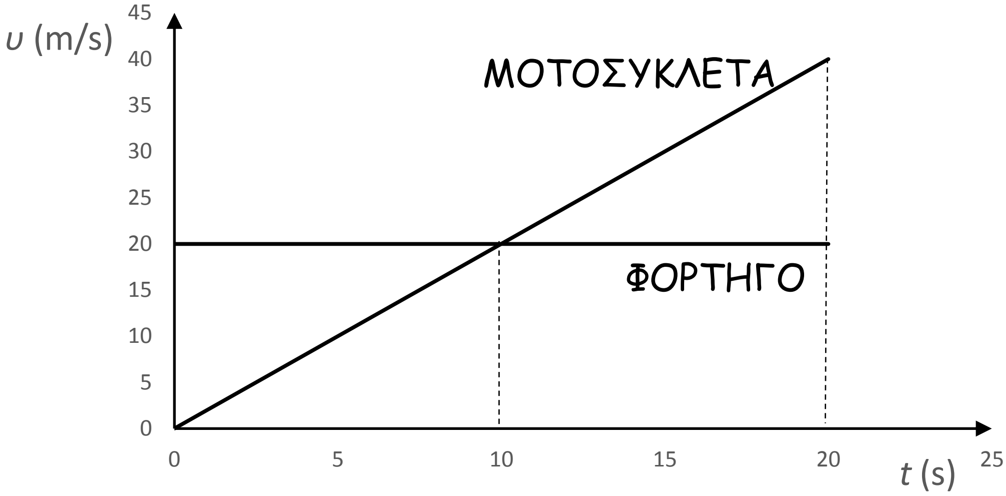
$$\upsilon_\Phi \cdot t' = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t'^2$$

που δίνει δύο λύσεις τις t' = 0 και t' = 20 s με δεκτή τη δεύτερη.

Η απόσταση από το Α στην οποία θα συναντηθούν θα προκύψει από μια από τις εξισώσεις θέσης ως εξής:

$$x_{συνάντησης} = x_\varphi = \upsilon_\Phi \cdot t' = 400\ \mathrm{m}.$$

Δ3) Με βάση το είδος των κινήσεων που εκτελούν τα δύο σώματα σχεδιάζουμε το ακόλουθο διάγραμμα. Σε αυτό σημειώνονται οι χρονικές στιγμές t_1 = 10s που τα κινητά έχουν τις ίδιες ταχύτητες και t' = 20 s που τα κινητά συναντώνται.



Δ4) Ο ζητούμενος λόγος των κινητικών ενεργειών θα είναι:

$$\frac{K_\Phi}{K_M} = \frac{\frac{1}{2} \cdot m_\Phi \cdot \upsilon_\Phi^2}{\frac{1}{2} \cdot m_M \cdot \upsilon_M^2} .$$

Όμως τη χρονική στιγμή $t_2 = 20$ s η ταχύτητα της μοτοσυκλέτας θα είναι:

$$\upsilon_M = a \cdot t = 40 \frac{m}{s},$$

οπότε ο λόγος των κινητικών ενεργειών προκύπτει ίσος με

$$\frac{K_\Phi}{K_M} = 2{,}5 .$$

Ενδεικτική Λύση

Δ1) Το κιβώτιο εκτελεί ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση χωρίς αρχική ταχύτητα, επομένως από την εξίσωση της μετατόπισης (που ταυτίζεται με αυτή του διαστήματος) έχουμε:

$$\Delta x = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \Rightarrow a = \frac{2 \cdot \Delta x}{t^2} \Rightarrow a = 4 \frac{m}{s^2}.$$

Δ2) Από το 2^{o} νόμο του Νεύτωνα (θετική φορά αυτή της κίνησης) θα έχουμεQ

$$F - T = m \cdot a.$$

Εκφράζουμε την τριβή ως

$$T = \mu \cdot N$$

Το σώμα ισορροπεί στον άξονα *y* (κατακόρυφο άξονα) συνεπώς έχουμε ότι:

$$\sum F = 0 \Rightarrow N - w = 0 \Rightarrow N = m \cdot g.$$

Εισάγοντας τις δύο τελευταίες σχέσεις στην έκφραση του νόμου του Νεύτωνα λαμβάνουμε:

$$F - \mu \cdot m \cdot g \ = m \cdot a \Rightarrow F = m \cdot (\mu \cdot g + a\,) \Rightarrow F = 24 \text{ N}.$$

Δ3) Το τρίτο δευτερόλεπτο ξεκινά τη χρονική στιγμή t_2 = 2 s και ολοκληρώνεται την t_3 = 3 s. Υπολογίζοντας τις θέσεις του κιβωτίου αυτές τις δύο χρονικές στιγμές και αφαιρώντας τες θα προσδιορίσουμε το ζητούμενο διάστημα που είναι ίσο με την μετατόπιση. Δηλαδή:

$$\Delta x = x_3 - x_2 = \tfrac{1}{2} \cdot a \cdot t_3^2 - \tfrac{1}{2} \cdot a \cdot t_2^2 \Rightarrow \Delta x = 10 \text{ m}.$$

Δ4) Τη χρονική στιγμή *t* = 4 s που καταργείται η δύναμη *F* το κιβώτιο έχει ταχύτητα:

$$\upsilon = a \cdot t \Rightarrow \upsilon = 16 \frac{m}{s}$$

όπου α η επιτάχυνση που προσδιορίσαμε στο ερώτημα (**Δ1**).

Από το θεώρημα έργου-ενέργειας μεταξύ της χρονικής στιγμής *t* = 4 s και της στιγμής που το κιβώτιο ακινητοποιείται θα έχουμε:

$$0 - K = W_T \Rightarrow -\tfrac{1}{2} \cdot m \cdot \upsilon^2 = W_T \Rightarrow W_T = -512 \text{ J}.$$

Ενδεικτική Λύση

Δ1) Εφαρμόζοντας το 2^o νόμο του Νεύτωνα για το κιβώτιο που κατεβαίνει (θετική φορά προς τα κάτω) προκύπτει:

$$w - F = m \cdot a \Rightarrow F = m \cdot (g - a) \Rightarrow F = 450 \text{ N}.$$

Δ2) Το κιβώτιο κινείται ευθύγραμμα ομαλά επιταχυνόμενα, ξεκινώντας από την ηρεμία, επομένως από την εξίσωση της μετατόπισης έχουμε:

$$\Delta y = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2 \cdot \Delta y}{a}} \Rightarrow t = 2 \text{ s}.$$

Η ταχύτητα του κιβωτίου θα είναι λοιπόν:

$$\upsilon = a \cdot t \Rightarrow \upsilon = 2\frac{m}{s}.$$

Δ3) Από τον ορισμό για το έργο σταθερής δύναμης θα έχουμε για το έργο της F κατά την μετατόπιση Δy = 8 m:

$$W_F = F \cdot \Delta y \cdot \sigma\upsilon\nu 180° \Rightarrow W_F = -3600 \text{ J}.$$

Ομοίως, το έργο του βάρους για την ίδια μετατόπιση θα είναι:

$$W_w = w \cdot \Delta y \cdot \sigma\upsilon\nu 0° \Rightarrow W_w = 4000 \text{ J}.$$

Δ4) Η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας θα είναιQ

$$\Delta U = U_{\tau\varepsilon\lambda\iota\kappa\acute{\eta}} - U_{\alpha\rho\chi\iota\kappa\acute{\eta}}$$

και θεωρώντας μηδενική την τελική δυναμική ενέργεια έχουμε:

$$\Delta U = -m \cdot g \cdot h = -1000 \text{ J}.$$

Ενδεικτική Λύση

Δ1) Εφαρμόζοντας το 2ο νόμο του Νεύτωνα για το κιβώτιο που ανεβαίνει (θετική φορά προς τα πάνω) προκύπτει:

$$F - w = m \cdot a \Rightarrow F = m \cdot (g + a) \Rightarrow F = 1200 \text{ N}.$$

Δ2) Το κιβώτιο κινείται ευθύγραμμα ομαλά επιταχυνόμενα, επομένως από την εξίσωση της μετατόπισης έχουμε:

$$\Delta y = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2 \cdot \Delta y}{a}} \Rightarrow t = 4 \text{ s}.$$

Δ3) Από τον ορισμό για το έργο σταθερής δύναμης θα έχουμε για το έργο της F κατά την μετατόπιση $\Delta y = 8$ m:

$$W_F = F \cdot \Delta y \cdot \sigma \upsilon \nu 0° \Rightarrow W_F = 9600 \text{ J}.$$

Ομοίως, το έργο του βάρους, για την ίδια μετατόπιση, θα είναι:

$$W_w = w \cdot \Delta y \cdot \sigma \upsilon \nu 180° \Rightarrow W_w = -8000 \text{ J}.$$

Δ4) Από το Θεώρημα Μεταβολής της Κινητικής Ενέργειας – Έργου, όπως εφαρμόζεται μεταξύ της αρχικής θέσης και του ύψους $y_1 = 4$ m, προκύπτει:

$$K_1 - 0 = W_F + W_w \Rightarrow K_1 = F \cdot y_1 \cdot \sigma \upsilon \nu 0° + w \cdot y_1 \cdot \sigma \upsilon \nu 180° \Rightarrow K_1 = 800 \text{ J}.$$

Παρομοίως για $y_2 = 9$ m προκύπτει:

$$K_2 - 0 = W_F + W_w \Rightarrow K_2 = F \cdot y_2 \cdot \sigma \upsilon \nu 0° + w \cdot y_2 \cdot \sigma \upsilon \nu 180° \Rightarrow K_2 = 1800 \text{ J}.$$

Επομένως, για το ζητούμενο λόγο των κινητικών ενεργειών θα έχω:

$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{4}{9}.$$

ΘΕΜΑ Δ

Ενδεικτική Λύση

Δ1) Το κιβώτιο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση. Για το χρονικό διάστημα t_o=0 s έως t_1=10 s:

$$F_1 = m\cdot\alpha, \quad a = \frac{F_1}{m} \quad ή \quad \alpha = 2\,\frac{m}{s^2}$$

$$x = \frac{1}{2}\,a\cdot t^2 \quad ή \quad x = 100\text{ m}$$

Δ2) Το έργο της δύναμης $\overrightarrow{F_1}$ είναι:

$$W = F_1\cdot\Delta x = 2000\text{ J}$$

Δ3) Στο κιβώτιο ασκείται μια δύναμη $\overrightarrow{F_2}$ που είναι ίση με τη δύναμη $\overrightarrow{F_1}$. Από τον 1^{ο} νόμο του Νεύτωνα έχουμε:

$$\Sigma F = m\cdot\alpha_1 \quad ή \quad F_1 + F_2 = m\cdot\alpha_1$$

και η νέα επιτάχυνση είναι:

$$\alpha_1 = 4\,\frac{m}{s^2}$$

Δ4) Εφόσον ασκούνται δύο δυνάμεις, $\overrightarrow{F_1}$ και $\overrightarrow{F_2}$, η μετατόπιση Δx θα είναι:

$$\Delta x = \frac{1}{2}\,a_1\cdot t^2 \quad ή \quad \Delta x = 200\text{ m}$$

Το έργο:

$$W_{F1} = F_1\cdot\Delta x \quad ή \quad W_{F1} = 20\cdot 200\text{ J} \quad ή \quad W_{F1} = 4000\text{ J}$$

Το έργο W_{F1} στο ερώτημα Δ4 είναι διπλάσιο από το έργο που υπολογίστηκε στο ερώτημα Δ2.

Ενδεικτική Λύση

Δ1) Το κιβώτιο εκτελεί ευθύγραμμα ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση και από τον $1^{ο}$ νόμο του Νεύτωνα ισχύει:

$$\Sigma F = m\cdot\alpha \text{ δηλαδή } F - T = m\cdot\alpha \quad (1)$$

$$\text{όπου } T = \mu\cdot N \text{ ή } T = \mu\cdot B \quad \text{ή} \quad T = \mu\cdot m\cdot g \quad \text{ή} \quad T = 20\ \mathrm{N}$$

Αντικαθιστούμε στην (1)

$$F - \mu\cdot m\cdot g = m\cdot\alpha \text{ και } \alpha = \frac{F-T}{m} \quad \text{ή} \quad \alpha = 1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Δ2) Το έργο της δύναμης $\vec{F}$ είναι $W_F = F\cdot x$ όπου x η μετατόπιση για το χρονικό διάστημα $t_o=0$ s έως $t_1 = 4$ s:

$$x = \frac{1}{2}\alpha\cdot t^2 \quad \text{ή} \quad x = 8\ \mathrm{m}$$

$$W_F = F\cdot x \quad \text{ή} \quad W_F = 240\ \mathrm{J}$$

Δ3) Η ενέργεια που μεταφέρθηκε από το κιβώτιο στο περιβάλλον του μέσω του έργου τριβής:

$$W_T = T\cdot x = 160\ \mathrm{J}$$

Δ4) Όταν το δάπεδο είναι λείο:

$$\Sigma F = m\cdot\alpha' \quad \text{ή} \quad F = m\cdot\alpha'$$

$$\alpha' = \frac{F}{m} \quad \text{ή} \quad \alpha' = 3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Για το ίδιο χρονικό διάστημα η νέα μετατόπιση x' θα είναι:

$$x' = \frac{1}{2}\alpha'\cdot t^2, \quad x' = 24\ \mathrm{m}$$

Το έργο W΄ που παράγεται είναι:

$$W' = F\,x' \quad \text{ή} \quad W' = 720\ \mathrm{J}$$

Το έργο W΄ σε λείο δάπεδο είναι τριπλάσιο από το W σε ολισθηρό δάπεδο της ερώτησης Δ2.

<u>Ενδεικτική Λύση</u>

Δ1) Ο υπολογισμός της τριβής Τ προκύπτει από την ισορροπία των δυνάμεων ως προς τον άξονα y:

$\Sigma F_y = 0$ ή $B - N = 0$, και $B = N$ και το νόμο της τριβής, άρα $T = N\,\mu = B\,\mu = \mu\, m\, g$ $T = 200$ N

Δ2) Επειδή οι δύο δυνάμεις είναι σταθερές, οριζόντιες και της ίδιας κατεύθυνσης ισχύει:

$$\Sigma F = m\alpha \text{ όπου } (F_\Pi + F_M) - T = m\alpha \quad (1)$$

Από τη σχέση (1) προκύπτει:

$$\alpha = \frac{F_\Pi + F_M - T}{m} \quad \text{ή} \quad \alpha = 1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Η χρονική στιγμή t_1 υπολογίζεται από τη σχέση:

$$x_1 = \frac{1}{2}\,\alpha\, t_1^2$$

Άρα

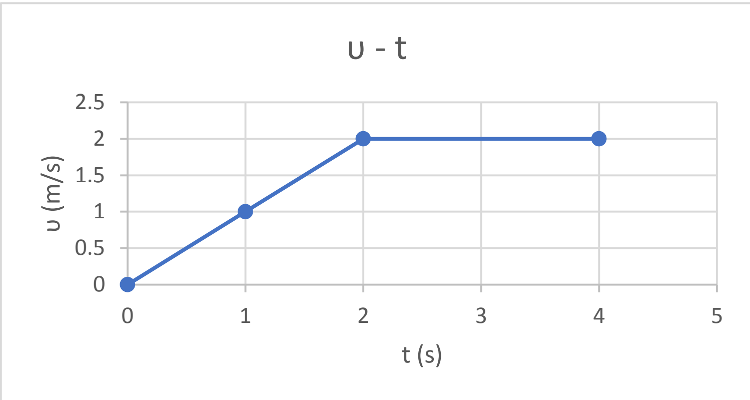
$$t_1 = \sqrt{\frac{2x_1}{\alpha}} = 2 \text{ s}$$

Δ3) Διάγραμμα του μέτρου ταχύτητας του κιβωτίου συναρτήσει του χρόνου σε Δt= 4 s, βάσει της σχέσης:

$$\upsilon = \alpha \cdot t \text{ για } 0 < t < t_1 \text{ με } \upsilon_1 = \alpha \cdot t_1 \text{ ή } \quad \upsilon_1 = 2\,\frac{m}{s}.$$

Για $t_1 < t < t_2$ ισχύει:

$$\Sigma F = 0 \text{ οπότε } \upsilon = \sigma\tau\alpha\theta. \text{ ή } \quad \upsilon = 2\,\frac{m}{s}.$$



Δ4) Η ενέργεια που προσέφερε ο Πάνος από 0 έως t_1 ισούται με:

$$W_\Pi = F_\Pi \cdot x_1$$

Όπου $x_1 = 2$ m και $F_\Pi = 200$ N, άρα:

$$W_\Pi = 400 \text{ J}$$

Ο ρυθμός με τον οποίο προσφέρει ο Πάνος ενέργεια στο κιβώτιο όταν πλέον το σπρώχνει μόνος του:

$$P = \frac{W}{\Delta t} = F \cdot \upsilon_1, \text{ άρα } P_{F\Pi} = F_\Pi \cdot \upsilon_1 \quad \text{ή} \quad P_{F\Pi} = 400\,\frac{J}{s}.$$

<u>Ενδεικτική Λύση</u>

Δ1) Το κιβώτιο κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο, εφαρμόζονται οριζόντιες δυνάμεις F_1 και F_2 *και* ισχύει ο 2ος νόμος του Νεύτωνα:

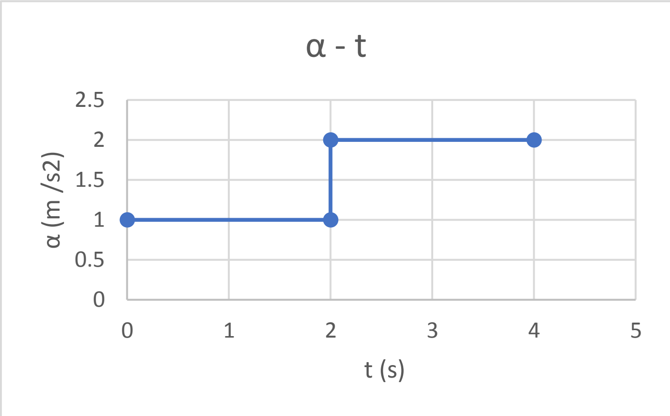
$$\Sigma F = m \cdot \alpha$$

Για το χρονικό διάστημα $\Delta t = 2$ s, (από $t_o = 0$ s έως $t_2 = 2$ s):

$$\alpha_1 = \frac{F_1}{m}, \text{ δηλαδή } \alpha_1 = 1\frac{m}{s^2}.$$

Για το χρονικό διάστημα $\Delta t = 2$ s, (από $t_o = 2$ s έως $t_2 = 4$ s):

$$\alpha_2 = \frac{F_1+F_2}{m}, \text{ δηλαδή } \alpha_2 = 2\frac{m}{s^2}.$$



Δ2) Η θέση x_1 όπου καταργήθηκε η δύναμη $\vec{F_1}$ για $t_1 = 2$ s δίνεται από τη σχέση:

$$x_1 = \frac{1}{2}\alpha \cdot t_1^2 \text{ δηλαδή } x_1 = 2 \text{ m}$$

Δ3) Η ταχύτητα υ_2 για $t_2 = 4$ s υπολογίζεται από τη σχέση:

$\upsilon = \upsilon_o + \alpha_1 \Delta t$

όπου $\Delta t = 2$ s, και $\upsilon_o = \alpha_1 \Delta t = 2$ m/s άρα $\upsilon_2 = 2 + 2 \cdot 2$ ή $\upsilon_2 = 6$ m

Η κινητική ενέργεια του κιβωτίου την χρονική στιγμή $t_2 = 4$ s είναι:

$$K_{t_2} = \frac{1}{2} m \cdot \upsilon_2^2 \text{ δηλαδή } K_{t_2} = 360 \text{ J}$$

Δ4) Ο υπολογισμός της μέσης ταχύτητας του κιβωτίου στο χρονικό διάστημα $t_o = 0$ s έως $t_2 = 4$ s

Η μέση ταχύτητα είναι:

$$\upsilon_\mu = \frac{\Delta x_{o\lambda}}{\Delta t_{o\lambda}} \quad \text{ή} \quad \upsilon_\mu = \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{\Delta t_{o\lambda}} \qquad (1) \qquad \Delta t_{o\lambda} = 4 \text{ s}$$

όπου $\Delta x_1 = 2$ m για $t = 2$ s

$$\Delta x_2 = \upsilon_o \cdot \Delta t + \frac{1}{2}\alpha_2 \cdot (\Delta t)^2, \text{ όπου } \upsilon_o = 2\frac{m}{s} \text{ και } \Delta t = t_2 - t_1 \text{ ή } \Delta t = 4s - 2s \text{ ή}$$

$$\Delta t = 2 \text{ s} \quad \text{και} \quad \Delta x_2 = 8 \text{ m}$$

Για $\Delta t_{o\lambda} = 4$ s και από τη σχέση (1), η μέση ταχύτητα είναι:

$$\upsilon_\mu = 2{,}5\frac{m}{s}.$$

Ενδεικτική Λύση

Δ1) Το κιβώτιο κινείται με σταθερή ταχύτητα πάνω στο δάπεδο του διαδρόμου του σχολείου, άρα

$\Sigma\vec{F}=0$ δηλαδή F – T = 0 άρα F = T = 200 N επίσης T = μ ·N ή T= μ ·B ή T= μ ·m·g

Ο συντελεστής τριβής:

$$\mu = \frac{T}{m\cdot g} \text{ άρα } \mu=0{,}4$$

Δ2) Για τα πρώτα 2 s της κίνησης του κιβωτίου, μάζας m_2 = 40 Kg του οποίου ασκείται δύναμη $\vec{F}$, το νέο μέτρο της τριβής είναι:

$$T_2= \mu\cdot N_2 \quad \text{ή} \quad T_2= \mu\cdot B \quad \text{ή} \quad T_2 = \mu\cdot m_2\cdot g \quad \text{ή} \quad T_2 = 160\ N$$

$$F_2 - T_2 = m_2 \cdot \alpha\ ,\ \text{ άρα } \alpha = 1\frac{m}{s^2}$$

Η μετατόπιση που διανύει το κιβώτιο για Δt = 2 s

$$x = \frac{1}{2}\,\alpha\cdot t^2 \quad \text{ή} \quad x = 2\ m$$

Δ3) Το έργο τριβής για x= 2 m είναι:

$$W_T = -\,T_2 \cdot x \quad \text{ή} \quad W_T = -\,320\ J$$

Δ4) Η ενέργεια που προσέφερε ο μαθητής στο κιβώτιο:

$$W = F \cdot x \quad \text{ή} \quad W = 400\ J$$

Η ταχύτητα του κιβωτίου στο χρονικό διάστημα Δt = 2 s:

$$\upsilon = \alpha \cdot \Delta t \quad \text{ή} \quad \upsilon = 2\ \frac{m}{s}$$

Άρα η κινητική ενέργεια Κ του κιβωτίου είναι:

$$K=\frac{1}{2}\,m\cdot \upsilon^2 \quad \text{ή} \quad K = 80\ J$$

Ενδεικτική Λύση

Δ1) Εφαρμόζουμε την Αρχή Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας (Α.Δ.Μ.Ε.), από την αρχική θέση, όπου U = m· g ·h, μέχρι τη στιγμή που U = K (1) , στο ύψος h_1.

Ισχύει:

$$U + K = E,$$

και από τη σχέση (1) προκύπτει

$$2U = E \text{ ή } 2\, m \cdot g \cdot h_1 = m \cdot g \cdot h \text{ και } h_1 = 5 \text{ m}$$

Δ2) Εφόσον

$$U = K \qquad (2)$$

$$m \cdot g \cdot h_1 = \frac{1}{2} m \cdot \upsilon_1{}^2 \quad \text{ή} \quad \upsilon_1 = \sqrt{2 \cdot g} \cdot h_1$$

άρα το μέτρο της ταχύτητας είναι:

$$\upsilon_1 = 10 \ \frac{m}{s}.$$

Δ3) Εφόσον $t_{ολικό}$ είναι το συνολικό διάστημα που φτάνει το σφαιρίδιο στο έδαφος, στο ύψος h= 10 m, και t_E το χρονικό διάστημα μέχρι U = K,στο ύψος h_1 =5 m, ισχύει:

$$h = \frac{1}{2} g \cdot t^2_{ολικό} \qquad (3)$$

$$h_1 = \frac{1}{2} g\, t_E^2 \qquad (4)$$

Διαιρούμε κατά μέλη τις σχέσεις (3) και (4)

$$\frac{h}{h_1} = \frac{t^2_{ολικό}}{t_E^2} \quad \text{ή} \quad \frac{t_{ολικό}}{t_E} = \sqrt{2}$$

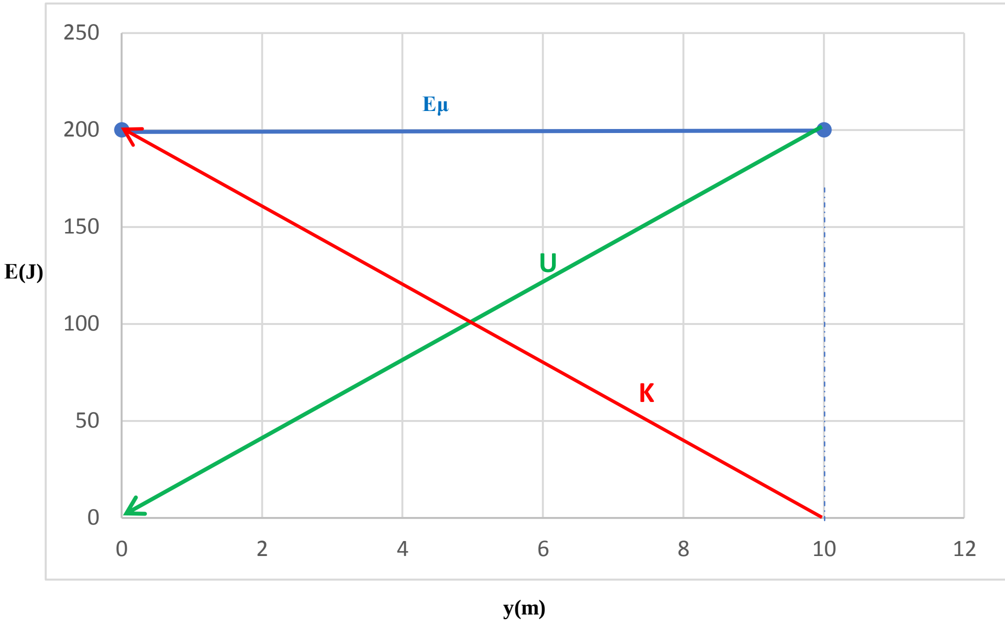
Δ4) Γραφικές παραστάσεις U = U(y), K = K(y), E = E (y)

Η μηχανική ενέργεια του σφαιριδίου είναι: E = m· g ·h = ή E=200 J ή E= σταθερή

Η δυναμική ενέργεια του σφαιριδίου είναι: U = m· g ·y ή U = 20 y

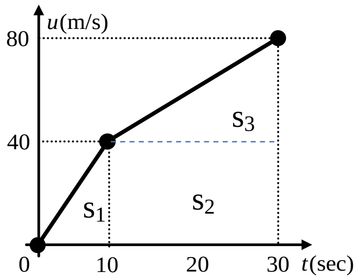
Η κινητική ενέργεια του σφαιριδίου είναι: K = E – U ή K= 200 – 20 y με $0 \leq y \leq 10$ m

Το διάγραμμα απεικονίζεται παρακάτω:



Ενδεικτική Λύση

Δ1) Η συνολική μετατόπιση του σώματος στο χρονικό διάστημα 0 s – 30 s υπολογίζεται από το εμβαδόν του διαγράμματος:



$$S_{ολ} = S_1 + S_2 + S_3 \text{ ή } \quad S_{ολ} = \frac{1}{2}\,40 \cdot 10 + \frac{40+80}{2} \cdot 20 \quad \text{ ή } \quad S_{ολ} = 1400\,m$$

Δ2) Οι τιμές του πίνακα υπολογίζονται από τις σχέσεις:

$$\alpha_1 = \frac{\Delta\upsilon}{\Delta t} \text{ ή } \alpha_1 = \frac{40-0}{10-0}\frac{m}{s^2} \quad \text{ή} \quad \alpha_1 = 4\frac{m}{s^2}$$

$F_1 = m \cdot \alpha_1$ ή $F_1 = 20 \cdot 4$ N ή $\mathbf{F_1 = 80\ N}$

$$\alpha_2 = \frac{\Delta\upsilon}{\Delta t} \text{ ή } \alpha_2 = \frac{80-40}{30-10}\frac{m}{s^2} \quad \text{ή} \quad \alpha_2 = 2\frac{m}{s^2}$$

$F_2 = m \cdot \alpha_2$ ή $F_2 = 20 \cdot 2$ N ή $\mathbf{F_2 = 40\ N}$

Χρονικό διάστημα (s)	Συνισταμένη οριζόντια δύναμη που ασκείται στο σώμα (N)
0-10	80
10-30	40

Δ3) Το έργο υπολογίζεται:

$$W_{0s\,-\,10s} = F_1 \cdot x_{0s-10s},$$

όπου

$$x_{0s-10s} = \frac{1}{2}\,a_1 \cdot (0-10)^2 \quad (SI) \quad \text{ή } x_{0s-10s} = 200\,m$$

$W_{10s-30s} = F_1\, x_{10\text{-}30}$, όπου

$$x_{10s-30s} = x_0 + \frac{1}{2}\,a_2 (30-10)^2 \text{ ή}$$

$$x_{10s-30s} = \upsilon_0\,\Delta t + \frac{1}{2}\,a_2 \cdot 20^2 \quad (SI)$$

Όπου

$$\upsilon_o = 40\ \frac{m}{s} \text{ από το διάγραμμα } \upsilon - t.$$

$$x_{0s-10s} = x_0 + \frac{1}{2}\ a_2 \cdot (30-10)^2 \quad (SI) \quad ή \quad x_{0s-10s} = 40 \cdot\ 20 + \frac{1}{2}\ 40 \cdot\ 20^2\ m \quad ή$$

$$x_{0s-10s} = 1200\ m$$

άρα

$$W_{0s-10s} = 80 \cdot 200J \quad ή \quad W_{0s-10s} = 16000\ J$$

$$W_{10s-30s} = 40 \cdot 1200J \quad ή \quad W_{10s-30s} = 48000\ J$$

Δ4) Για το Θεώρημα Μεταβολής της Κινητικής Ενέργειας – Έργου (Θ.Μ.Κ.Ε.) ισχύει:

$$K_{τελ} - K_{αρχ} = W_{ολ}$$

$$K_{τελ} - 0 = W_{ολ}$$

όπου από τη Δ2

$$W_{ολ} = W_{0s-10s} + W_{10s-30s} \quad ή \quad W_{ολ} = 1600J + 48000J \quad ή \quad W_{ολ} = 64000\ J$$

$$\text{και } K_{τελ} = \frac{1}{2}\ m \cdot \upsilon_{τελ}^2$$

όπου

$$\upsilon_{\ τελ} = 80\ \frac{m}{s} \text{ όπως δίνεται από το διάγραμμα } \upsilon - t.$$

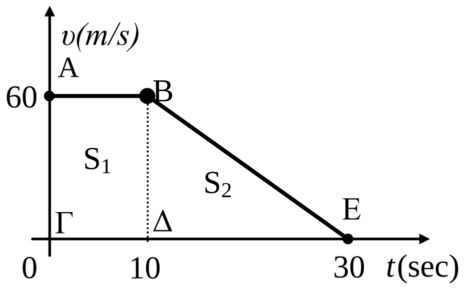
$K_{τελ}$ = 64000 J άρα ισχύει το Θ.Μ.Κ.Ε.

11703

<u>Ενδεικτική Λύση</u>

Δ1) Από τη γραφική παράσταση υ – t, υπολογίζουμε το εμβαδόν S_1 του τετραγώνου (ΑΒΓΔ) και το εμβαδόν S_2 του τριγώνου (ΒΔΕ):

$\Delta x_{ολ} = S_1 + S_2$ ή $\Delta x_{ολ} = 60 \cdot 10\ m + \frac{1}{2}\ 20 \cdot 60\ m$ ή $\Delta x_{ολ} = 1200\ m$



Δ2) Για τον υπολογισμό των τιμών του πίνακα:

Για το χρονικό διάστημα 0s - 10 s:

$$\alpha_1 = 0\frac{m}{s^2}, \qquad \mathbf{F_1=0\ N}$$

Για το χρονικό διάστημα 10s – 30 s:

$$\alpha_2 = \frac{\Delta\upsilon}{\Delta t} \quad ή \quad \alpha_2 = -3\frac{m}{s^2}, \qquad F_2 = m \cdot \alpha \quad ή \quad \mathbf{F_2 = -6\ N}$$

Χρονικό διάστημα (s)	Συνισταμένη οριζόντια δύναμη που ασκείται στο σώμα (N)
0-10	0
10-30	-6

Δ3) Για τον υπολογισμό του έργου:

$$W_{0s\text{-}10s} = F_1 \cdot x_{0s\text{-}10s} \quad ή \quad W_{0s\text{-}10s} = 0\ J$$

$$W_{10\text{-}30} = F_2 \cdot x_{10\text{-}30}$$

όπου

$$x_{10s\text{-}3s0} = \frac{1}{2}\ \alpha_2 \cdot \Delta t^2_{30s-10s} \quad ή \quad x_{10s-30s} = 600\ m, \qquad W_{10\text{-}30} = -\ 3600\ J$$

άρα

$$W_{ολ} = 0J - 3600J \quad ή \quad W_{ολ} = -\ 3600\ J$$

Δ4) Για το Θ.Μ.Κ.Ε. ισχύει:

$$K_{τελ} - K_{αρχ} = W_{ολ}$$

$$0 \quad - K_{αρχ} = -\ \frac{1}{2}\ 2 \cdot 60^2\ J \quad ή \quad K_{τελ} - K_{αρχ} = -3600\ J$$

δηλαδή ίσο με το $W_{ολ}$ όπως υπολογίστηκε στο Δ3.

Ενδεικτική Λύση

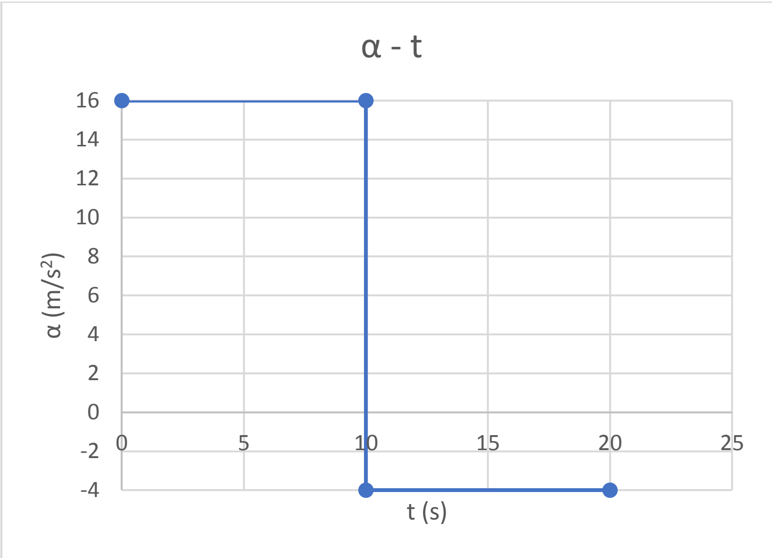
Δ1) Σχεδίαση α – t για 0 – 20 s

$$\Sigma F = m \cdot \alpha$$

$$F - T = m \cdot \alpha \quad \text{όπου } T = \mu \cdot N \quad \text{ή} \quad T = \mu \cdot B \quad \text{ή} \quad T = \mu \cdot m \cdot g \quad \text{ή} \quad T = 8\ N$$

$$\text{Για } \Delta t_1 = 10s - 0s \ \text{ ή } \ \Delta t_1 = 10\ s, \quad \alpha_{0s-10s} = \frac{F-T}{m} \ \text{ ή } \ \alpha_{0s-10s} = \frac{40-8}{2}\frac{m}{s^2} \ \text{ ή } \ \alpha_{0s-10s} = 16\frac{m}{s^2}$$

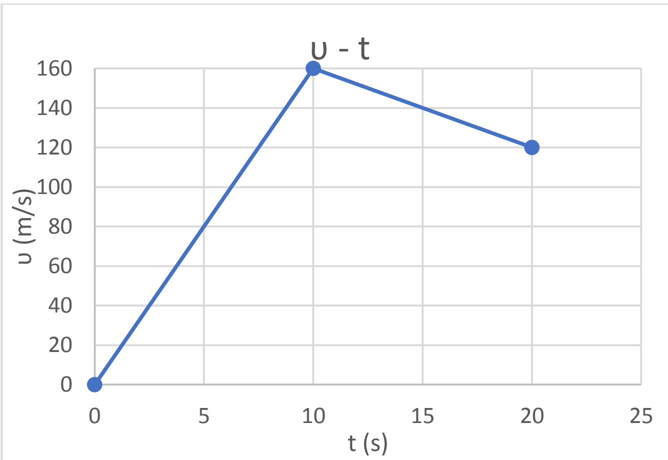
$$\text{Για } \Delta t_2 = 20s - 10s \ \text{ ή } \ \Delta t_2 = 10\ s, \quad \alpha_{20s-10s} = \frac{F-T}{m} \ \text{ ή } \ \alpha_{20s-10s} = \frac{0-8}{2}\frac{m}{s^2} \ \text{ ή } \ \alpha_{20s-10s} = -4\frac{m}{s^2}$$



Δ2) Διάγραμμα υ – t

$$\upsilon_{0s-10s} = \alpha_{\,0s-10s} \cdot \Delta t_1 \ \text{ ή } \ \upsilon_{0s-10s} = 160\ \frac{m}{s}$$

$$\upsilon_{\,20s-10s} = \upsilon_{0s-10s} - \alpha_{20s-10s} \cdot \Delta t_2 \quad \text{ή} \quad \upsilon_{\,20s-10s} = 120\frac{m}{s}$$



t= 0s	υ =0$\frac{m}{s}$
t= 10s	υ =160$\frac{m}{s}$
t = 20s	υ =120$\frac{m}{s}$

Δ3) Το έργο της δύναμης για διάρκεια 0s – 10 s υπολογίζεται από τη σχέση:

$$W_F = F \cdot \Delta x$$

όπου

$$\Delta x = \frac{1}{2}\, \alpha_{0s-10s} \cdot \Delta t^2_{0s-10s} \quad \text{ή} \quad \Delta x = 800\ m$$

άρα

$$W_F = 32000\ J$$

Δ4) Το έργο τριβής $\vec{T}$ για το χρονικό διάστημα 10s – 20 s υπολογίζεται από την εφαρμογή του Θ.Μ.Κ.Ε.:
Ισχύει :

$$\Delta K = W_{ολ}$$

$$K_{τελ} - K_{αρχ} = W_F + W_T$$

όπου $W_F = 0$ διότι στο χρονικό διάστημα Δt = 20s – 10s ή Δt =10 s F= 0N.
Επομένως:

$$\frac{1}{2}\, m\, \upsilon_{20s}^2 - \frac{1}{2}\, m\, \upsilon_{10s}^2 = -11200 \text{ J}$$

<u>Ενδεικτική Λύση</u>

Δ1) Από την εφαρμογή της Αρχής Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας προκύπτει:

$$K_{αρχ} + U_{αρχ} = K_{τελ} + U_{τελ}$$

$$0 + m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} m \cdot \upsilon^2 + 0$$

$$\text{άρα} \quad \upsilon = \sqrt{2g \cdot h} \quad \text{ή} \quad \upsilon = 60 \ \frac{m}{s}$$

Δ2) Το διάστημα από 0 – 3 δευτερόλεπτα:

$$\Delta y_{\ 0s-3s} = \frac{1}{2} g \cdot 3^2 \quad (SI) \quad \text{ή} \quad \Delta y_{\ 0s-3s} = 45\ m$$

Για το διάστημα από 0 – 2 δευτερόλεπτα

$$\Delta y_{0s-2s} = \frac{1}{2} g \cdot 2^2 \quad (SI) \quad \text{ή} \quad \Delta y_{0s-2s} = 20\ m$$

$$\Delta y = 45m - 20m \quad \text{ή} \quad \Delta y = 25\ m$$

Δ3) Από την εφαρμογή της Α.Δ.Μ.Ε. για ύψος h_1 όπου K = 6250 J

$$K_{αρχ} + U_{αρχ} = K_{h1} + U_{h1}$$

$$0 + m \cdot g \cdot h = K + m \cdot g \cdot h_1$$

$$h_1 = 55\ m$$

Επομένως το έργο του βάρους είναι:

$$W = m \cdot g \cdot h_1 \quad \text{ή} \quad W = 6250\ J$$

Εναλλακτική λύση:

Από

$$K = \frac{1}{2} m \cdot \upsilon^2 \quad \text{ή} \quad K = \frac{1}{2} m \cdot g^2 \cdot {t_1}^2,$$

και αφού υπολογισθεί το t_1

και από τη σχέση:

$$h_1 = \frac{1}{2} g\, t_1^2 \quad \text{ή} \quad h_1 = 125\ m$$

υπολογίζουμε το

$$W = m \cdot g \cdot h_1 \quad \text{ή} \quad W = 6250\ J$$

Δ4) Η χρονική διάρκεια της ελεύθερης πτώσης

$$h = \frac{1}{2}\, g \cdot \Delta t^2 \quad \text{όπου } h = 360 \text{ m}$$

$$\Delta t = 6\text{s}$$

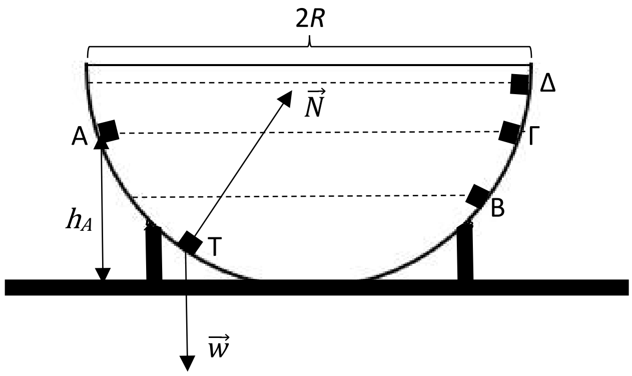
Ο μέσος ρυθμός παραγωγής έργου του βάρους του σώματος από την αρχή μέχρι να φτάσει στο έδαφος, για $\Delta t = 6$ s:

Ρυθμός παραγωγής:

$$\mathrm{P} = \frac{m \cdot g \cdot h}{\Delta t} \quad \text{ή} \quad \mathrm{P} = 1500\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}}.$$

ΘΕΜΑ Β

Β1.



Β1.1. γ) Γ

Μονάδες 4

Β1.2. Σε τυχαία θέση Τ της τροχιάς του, το σημειακό αντικείμενο δέχεται το γήινο βάρος του $\vec{w}$ και την αντίδραση $\vec{N}$ του λείου, ακλόνητου, ημικυκλικού οδηγού. Η δύναμη $\vec{N}$ είναι, κάθε χρονική στιγμή, κάθετη στη στοιχειώδη μετατόπιση και συνεπώς το έργο της κατά την κίνηση του σημειακού αντικειμένου είναι μηδέν. Το γήινο βάρος $\vec{w}$ είναι συντηρητική (διατηρητική) δύναμη, δηλαδή το έργο της δεν μεταβάλλει τη μηχανική ενέργεια του σημειακού αντικειμένου. Έτσι, κατά την διάρκεια της κίνησης, η μηχανική του ενέργεια παραμένει σταθερή:

$E_A = E_{τελ.}$, $K_A + U_A = K_{τελ.} + U_{τελ.}$, $0 + U_A = 0 + U_{τελ.}$, $U_A = U_{τελ.}$,
$m \cdot g \cdot h_A = m \cdot g \cdot h_{τελ.}$, $h_A = h_{τελ.}$.

Μονάδες 8

Β2.

Β2.1. β)

Μονάδες 4

Β2.2.

Το σημειακό αντικείμενο, στον άξονα της κίνησης, δέχεται μόνο τη σταθερή οριζόντια δύναμη $\vec{F}$. Από τον Θεμελιώδη Νόμο της Μηχανικής:

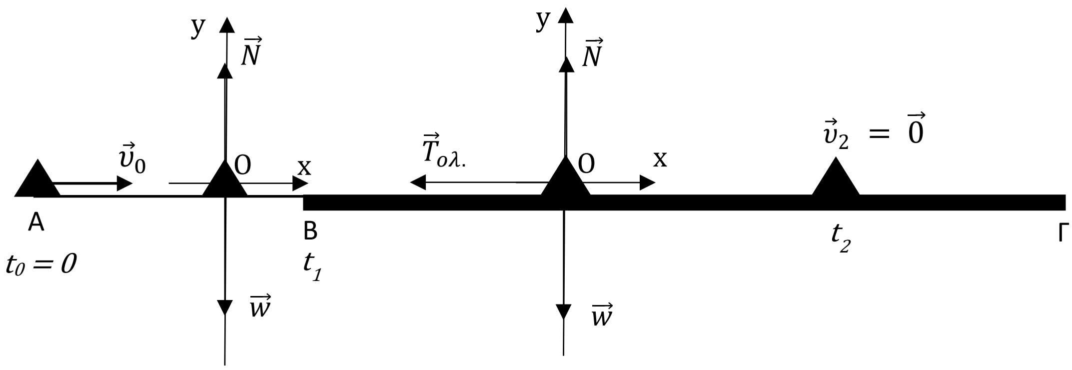
$\sum\vec{F} = m \cdot a$, $F = m \cdot a$, $a = \frac{F}{m}$, $a = 10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

Η ταχύτητα του σημειακού αντικειμένου, τη χρονική στιγμή $t_1 = 5\,\mathrm{s}$, έχει μέτρο: $υ_1 = a \cdot t_1$, $υ_1 = 50\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Το μέτρο της μετατόπισης του σημειακού αντικειμένου, από τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ μέχρι τη χρονική στιγμή $t_1 = 5\,\mathrm{s}$, είναι: $Δx = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$, $Δx = 125\,\mathrm{m}$. Για τη μέση ισχύ $\bar{P}$ της δύναμης $\vec{F}$, στο χρονικό διάστημα που μεσολαβεί από τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ μέχρι τη χρονική στιγμή $t_1 = 5\,\mathrm{s}$, ισχύει:

$\bar{P} = \frac{W_{\vec{F}}}{\Delta t}$, $\bar{P} = \frac{F \cdot \Delta x}{\Delta t}$, $\bar{P} = 250\,\mathrm{W}$. Για τη στιγμιαία ισχύ P_1 της δύναμης $\vec{F}$, τη χρονική στιγμή $t_1 = 5\,\mathrm{s}$, ισχύει: $P_1 = F \cdot \upsilon_1$, $P_1 = 500\,W$.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Δ



Δ1.

Δ1.1. Σχεδιάζουμε το σημειακό αντικείμενο σε μία τυχαία θέση της κίνησής του στο λείο τμήμα ΑΒ του οριζόντιου, ακλόνητου δαπέδου. Οι δυνάμεις που δέχεται είναι το γήινο βάρος του $\vec{w}$ και η κάθετη στο επίπεδο αντίδραση $\vec{N}$ (Μονάδα 1). Με κέντρο το σημειακό αντικείμενο, επιλέγουμε ορθογώνιο σύστημα αξόνων xOy. Άξονας Ox είναι ο άξονας της κίνησης. Στον άξονα της κίνησης ισχύει: $\sum \vec{F}_x = \vec{0}$, οπότε, σύμφωνα με τον πρώτο (1°) νόμο του Newton, το σημειακό αντικείμενο κινείται με σταθερή ταχύτητα. Για το μέτρο της μετατόπισης του σημειακού αντικειμένου ισχύει:

$\Delta x_1 = (AB)$, $\upsilon_0 \cdot t_1 = (AB)$, $t_1 = \frac{(AB)}{\upsilon_0}$, $t_1 = 0{,}5\ s$ (Μονάδες 2).

Έτσι: $\Delta t_1 = t_1 - t_0$, $\Delta t_1 = 0{,}5$ s (Μονάδα 1).

Μονάδες 4

Δ1.2. Σχεδιάζουμε το σημειακό αντικείμενο σε μία τυχαία θέση της κίνησής του στο τραχύ τμήμα ΒΓ του οριζόντιου, ακλόνητου δαπέδου. Οι δυνάμεις που δέχεται είναι το γήινο βάρος του $\vec{w}$, η κάθετη στο επίπεδο αντίδραση $\vec{N}$ και η τριβή ολίσθησης $\vec{T}_{ολ.}$ (Μονάδα 1). Με κέντρο το σημειακό αντικείμενο, επιλέγουμε ορθογώνιο σύστημα αξόνων xOy. Άξονας Ox είναι ο άξονας της κίνησης. Στον άξονα Oy το σημειακό αντικείμενο δεν κινείται οπότε, σύμφωνα με τον πρώτο (1°) νόμο του Newton ισχύει: $\sum \vec{F}_y = \vec{0}, \vec{N} = -\vec{w}$ και συνεπώς για τα μέτρα των δυνάμεων $\vec{N}$ και $\vec{w}$ (N και w αντίστοιχα) ισχύει: $N = w$, $N = m \cdot g$, $N = 10\,\mathrm{N}$ (Μονάδες 2). Για το μέτρο της τριβής ολίσθησης ισχύει: $T_{ολ.} = \mu_{ολ.} \cdot N$, $T_{ολ.} = 5\,\mathrm{N}$ (Μονάδες 2). Στον άξονα Ox το σημειακό αντικείμενο επιβραδύνεται αφού η ταχύτητά του και η συνισταμένη δύναμη στον άξονα x έχουν αντίθετη κατεύθυνση. Έτσι, από το Θεμελιώδη Νόμο της Μηχανικής στον άξονα της κίνησης, ισχύει:

$\sum \vec{F}_x = m \cdot \vec{a}, \; -T_{o\lambda} = m \cdot a, \; a = -\frac{T_{o\lambda.}}{m}, \; a = -5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ (Μονάδες 2).

Από τον ορισμό της επιτάχυνσης ισχύει: $\alpha = \frac{\Delta \upsilon}{\Delta t}, \; a = \frac{\upsilon_2 - \upsilon_1}{t_2 - t_1}, \; t_2 - t_1 = \frac{\upsilon_2 - \upsilon_1}{a},$

$\Delta t_2 = \frac{\upsilon_2 - \upsilon_1}{a}, \; \Delta t_2 = 2\ \mathrm{s}$ (Μονάδες 2).

Μονάδες 9

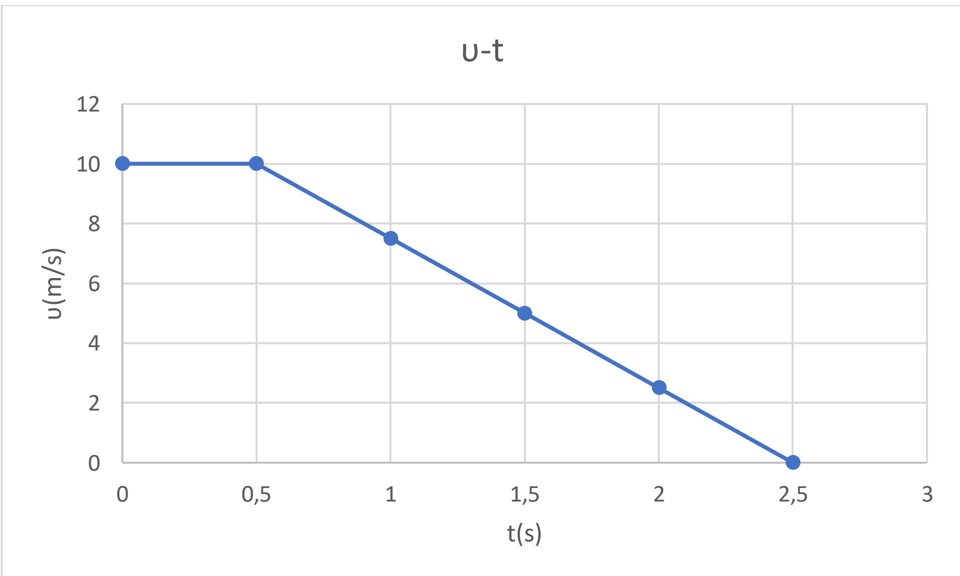
Δ.1.3. Το μέτρο της μετατόπισης του σημειακού αντικειμένου στο τραχύ τμήμα (ΒΓ) του δαπέδου είναι: $\Delta x_2 = \upsilon_0 \cdot \Delta t_2 + \frac{1}{2} \cdot a \cdot (\Delta t_2)^2, \; \Delta x_2 = 10\ \mathrm{m}$ (Μονάδες 3). Το μέτρο της συνολικής μετατόπισης του σημειακού αντικειμένου, στη χρονική διάρκεια $\Delta t_1 + \Delta t_2$ είναι: $\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2, \; \Delta x = 15\ \mathrm{m}$ (Μονάδα 1).

Μονάδες 4

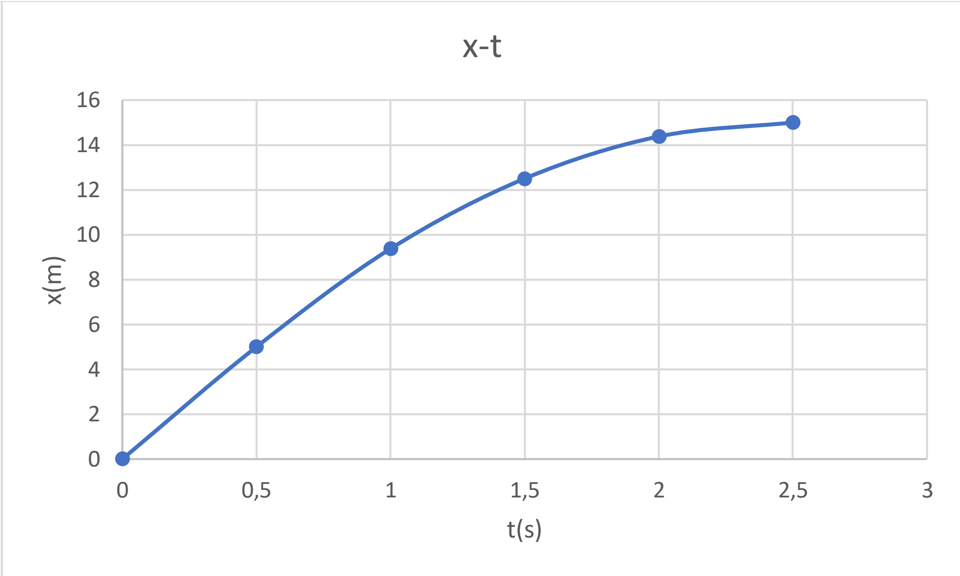
Δ.1.4. Το σημειακό αντικείμενο δέχεται τριβή ολίσθησης μόνο κατά την κίνησή του στο τραχύ τμήμα ΒΓ του δαπέδου. Έτσι: $W_{\vec{T}_{o\lambda}} = -T_{o\lambda.} \cdot \Delta x_2, \; W_{\vec{T}_{o\lambda}} = -50\ \mathrm{J}$.

Μονάδες 4

Δ2.



(Μονάδες 2)



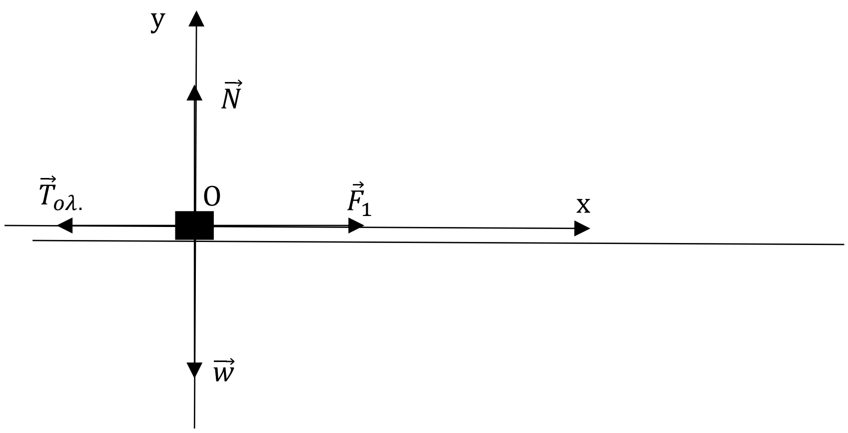
(Μονάδες 2)

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Δ

Δ.1.

Σχεδιάζουμε το σημειακό αντικείμενο σε μία τυχαία θέση της κίνησής του. Οι δυνάμεις που δέχεται είναι το γήινο βάρος του $\vec{w}$, η κάθετη στο δρόμο αντίδραση $\vec{N}$, η δύναμη $\vec{F}_1$ και η τριβή ολίσθησης $\vec{T}_{ολ.}$ (Μονάδα 1). Με κέντρο το σημειακό αντικείμενο, επιλέγουμε ορθογώνιο σύστημα αξόνων xOy. Άξονας Ox είναι ο άξονας της κίνησης. Στον άξονα Oy δεν υπάρχει κίνηση, οπότε, σύμφωνα με τον 1^{ο} νόμο του Newton: $\sum\vec{F}_y = \vec{0}$, $N = w$, $N = m \cdot g$, $N = 10$ N (Μονάδες 2), όπου w και N είναι τα μέτρα των δυνάμεων $\vec{w}$ και $\vec{N}$ αντίστοιχα.



Από την χαρτοταινία, διαπιστώνουμε ότι το σημειακό αντικείμενο κινείται με σταθερή ταχύτητα. Από τον 1^{ο} νόμο του Newton:

$$\sum\vec{F}_x = \vec{0},\ F_1 = T,\ F_1 = \mu_{ολ.} \cdot N,\ \mu_{ολ.} = \frac{F_1}{N},\ \mu_{ολ.} = 0{,}5 \text{ (Μονάδες 2).}$$

Μονάδες 5

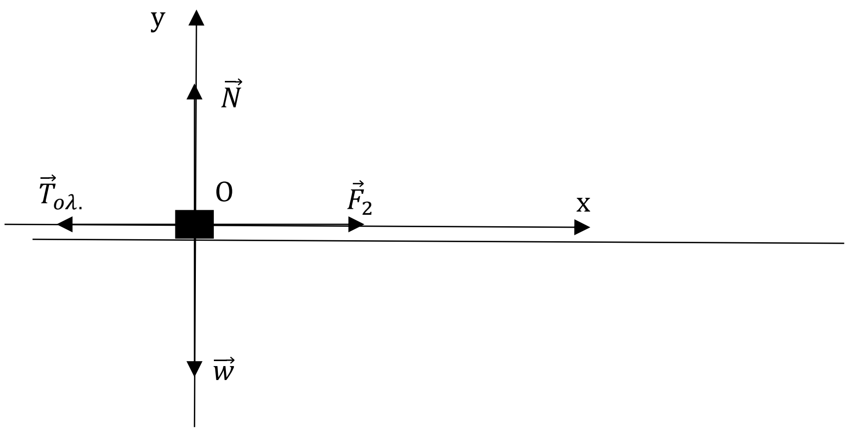
Δ2.

Δ.2.1.

Σχεδιάζουμε το σημειακό αντικείμενο σε μία τυχαία θέση της κίνησής του. Οι δυνάμεις που δέχεται είναι το γήινο βάρος του $\vec{w}$, η κάθετη στο δρόμο αντίδραση $\vec{N}$, η δύναμη $\vec{F}_2$ και η τριβή ολίσθησης $\vec{T}_{ολ.}$ (Μονάδα 1). Με κέντρο το σημειακό αντικείμενο, επιλέγουμε ορθογώνιο σύστημα αξόνων xOy. Άξονας Ox είναι ο άξονας της κίνησης. Στον άξονα Oy δεν υπάρχει κίνηση, οπότε, σύμφωνα με τον 1^{ο} νόμο του Newton:

$\sum \vec{F}_y = \vec{0}$, $N = w$, $N = m \cdot g$, $N = 10$ N (Μονάδες 2).

Για το μέτρο της τριβής ολίσθησης, από τον νόμο της τριβής ολίσθησης, ισχύει: $T_{ολ.} = \mu_{ολ.} \cdot N$, $T_{ολ.} = 5$ N (Μονάδες 2).



Από την χαρτοταινία, διαπιστώνουμε ότι το σημειακό αντικείμενο δεν κινείται με σταθερή ταχύτητα. Από τον Θεμελιώδη Νόμο της Μηχανικής: $\sum \vec{F}_x = m \cdot \vec{a}$, $F_2 - T_{ολ.} = m \cdot a$, $F_2 = m \cdot a + T_{ολ.}$ (1) (Μονάδες 2). Το μέτρο της μετατόπισης του σώματος, από τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ μέχρι τη χρονική στιγμή $t_1 = 5$ s, δίνεται από τη σχέση: $\Delta x_1 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_1^2$, $a = \frac{2 \cdot \Delta x_1}{t_1^2}$, $a = 2\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{t}^2}$ (Μονάδες 2). Από τη σχέση (1): $F_2 = 7$ N (Μονάδα 1).

Μονάδες 10

Δ.2.2. Για το μέτρο υ_1 της ταχύτητας του σώματος τη χρονική στιγμή $t_1 = 5$ s ισχύει: $\upsilon_1 = a \cdot t_1$, $\upsilon_1 = 10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

Μονάδες 3

Δ2.3. Για τη μέση ισχύ $\bar{P}$ της δύναμης $\vec{F}_2$, στο χρονικό διάστημα που μεσολαβεί από τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ μέχρι τη χρονική στιγμή $t_1 = 5$ s, ισχύει: $\bar{P} = \frac{W_{\vec{F}_2}}{\Delta t}$, $\bar{P} = \frac{F_2 \cdot \Delta x_1}{\Delta t}$, $\bar{P} = 35$ W.

Μονάδες 3

Δ.2.4. Για τη στιγμιαία ισχύ P_1 της δύναμης $\vec{F}_2$, τη χρονική στιγμή $t_1 = 5$ s, ισχύει:

$P_1 = F_2 \cdot \upsilon_1$, $P_1 = 70\, W$.

Μονάδες 4

Β1. Σωστή η απάντηση **(γ)**

Ενδεικτική Αιτιολόγηση

Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα στο Σχήμα 2 είναι το βάρος του προς τα κάτω και οι δύο τάσεις των νημάτων προς τα πάνω. Οι δύο τάσεις είναι ίσες μεταξύ τους αφού τα δυναμόμετρα είναι ίδια. Επομένως:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow 2T - B = 0 \Rightarrow T = 25\ \mathrm{N}$$

Λόγω δράσης-αντίδρασης (3ος Νόμος του Νεύτωνα) και το σώμα θα ασκεί σε κάθε νήμα αντίθετη δύναμη.

Τα νήματα είναι τεντωμένα και αβαρή, επομένως η δύναμη που δέχεται κάθε νήμα από το δυναμόμετρο είναι 25 N.

Και τελικά, λόγω δράσης-αντίδρασης, κάθε νήμα ασκεί στο αντίστοιχο δυναμόμετρο δύναμη 25 N.

Β2. Σωστή η απάντηση **(β)**

Ενδεικτική Αιτιολόγηση

Το κινητό εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση, επομένως

$$\upsilon = \upsilon_0 - \alpha t \Rightarrow \frac{\upsilon_0}{2} = \upsilon_0 - \alpha t \Rightarrow t = \frac{\upsilon_0}{2\alpha} \quad (1)$$

Το διάστημα δίνεται από τη σχέση

$s = \upsilon_o t - \frac{1}{2}\alpha t^2 \overset{(1)}{\Rightarrow} s = \upsilon_0 \left(\frac{\upsilon_0}{2\alpha}\right) - \frac{1}{2}\alpha \left(\frac{\upsilon_0}{2\alpha}\right)^2$ και τελικά $s = \frac{3\upsilon_0^2}{8\alpha}$

Β1

Α. Σωστή απάντηση είναι η **γ.** (***Μονάδες 4)***

Β. Όταν ο μαθητής Α (Εικόνα 1) τραβά απότομα το χαρτόνι, το νόμισμα λόγω **αδράνειας** τείνει να διατηρήσει την αρχική του κινητική κατάσταση, δηλαδή να παραμείνει ακίνητο, οπότε δεν ακολουθεί το χαρτόνι κατά την κίνησή του (***Μονάδες 3)*** . Τελικά **λόγω του βάρους του** πέφτει μέσα στο ποτήρι(***Μονάδες 2)***.

Όταν ο μαθητής Β (Εικόνα 2) τραβά απότομα το χαρτόνι, το νόμισμα επίσης λόγω **αδράνειας** τείνει να διατηρήσει την αρχική του κινητική κατάσταση, δηλαδή να παραμείνει ακίνητο, οπότε δεν ακολουθεί το χαρτόνι κατά την κίνησή του (***Μονάδες 3)*** και παραμένει **ακίνητο στην αρχική του θέση** επάνω στο οριζόντιο δάπεδο (***Μονάδα 1)***

Β2

Α. Σωστή απάντηση είναι η **α.** (***Μονάδες 4)***

Β. Και τα δύο σώματα εκτελούν ελεύθερη πτώση. Ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση χωρίς αρχική ταχύτητα και με επιτάχυνση αυτή της βαρύτητας. (***Μονάδα 1)***

Για τη Γη:

$$h = \frac{1}{2} g_o t_1^2 \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g_0}} \quad (1)$$

$$\upsilon_1 = g_0 t_1 \overset{(1)}{\Rightarrow} \upsilon_1 = g_0 \sqrt{\frac{2h}{g_0}} \Rightarrow \upsilon_1 = \sqrt{2 g_0 h} \quad (2)$$

(***Μονάδες 3)***

Για τον άλλον Πλανήτη:

$$h = \frac{1}{2} \frac{g_o}{4} t_2^2 \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{8h}{g_0}} \quad (3)$$

$$\upsilon_2 = \frac{g_o}{4} t_2 \overset{(3)}{\Rightarrow} \upsilon_2 = \frac{g_o}{4} \sqrt{\frac{8h}{g_0}} \Rightarrow \upsilon_2 = \sqrt{\frac{g_o}{2} h} \quad (4)$$

(***Μονάδες 2)***

Από τις (3) και (4) έχουμε:

$$\frac{\upsilon_1}{\upsilon_2} = \frac{\sqrt{2 g_0 h}}{\sqrt{\frac{g_o}{2} h}} \Rightarrow \frac{\upsilon_1}{\upsilon_2} = 2 \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon_1 = 2\upsilon_2}$$ (***Μονάδες 2)***

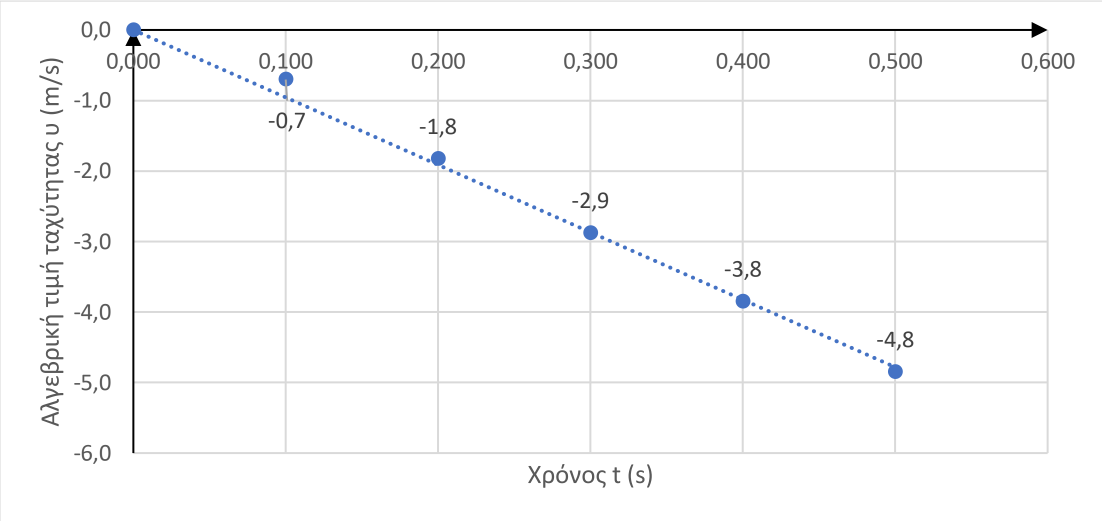
ΘΕΜΑ Β

Β1.

Β1.1. Η πρόταση είναι λανθασμένη (Λ).

Μονάδες 4

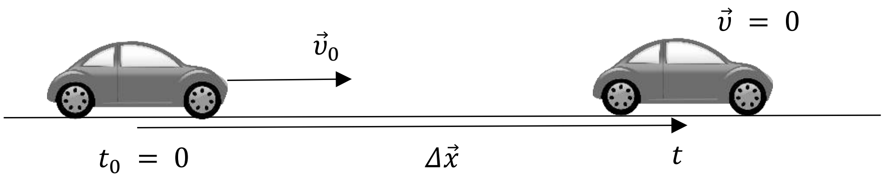
Β1.2. Αιτιολόγηση.



Εφόσον, οι συντεταγμένες όλων των σημείων αναγράφονται στο γράφημα, οποιαδήποτε δύο από αυτά μας εξυπηρετούν. Επιλέγουμε αυθαίρετα το πρώτο (1ο) σημείο (0 , 0) και το τέταρτο (4ο) σημείο (0,3 s , -2,9 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$), οπότε ο συντελεστής διεύθυνσης του ευθύγραμμου τμήματος του γραφήματος είναι: $\lambda = \frac{\upsilon_2 - \upsilon_1}{t_2 - t_1} = \frac{-2{,}9\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - 0}{0{,}3\ \mathrm{s} - 0} = -\frac{29}{3}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Η απόλυτη τιμή του συντελεστή διεύθυνσης λ ισούται με το μέτρο της επιτάχυνσης $\vec{\alpha}$ του σώματος. Έτσι, για το μέτρο α της επιτάχυνσης $\vec{\alpha}$ του σώματος ισχύει: $\alpha = |\lambda| = \frac{29}{3}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. Επειδή $\alpha \neq g$, η κίνηση του σώματος δεν είναι ελεύθερη πτώση.

Μονάδες 8

Β2.



Β2.1. α) $\Delta x = 60\ \mathrm{m}$

Μονάδες 4

Β2.2. Ισχύει: $\upsilon_0 = 72\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 72\ \frac{1000\ \mathrm{m}}{3600\ \mathrm{s}} = 20\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Από τη χρονική στιγμή που ο οδηγός αντιλαμβάνεται το εμπόδιο ($t_0 = 0$) μέχρι τη χρονική στιγμή που ενεργοποιεί το σύστημα πέδησης του αυτοκινήτου) ($t_{αντ.} = 1\ \mathrm{s}$) το αυτοκίνητο κινείται με σταθερή ταχύτητα $\vec{\upsilon}_0$ και η μετατόπισή του έχει μέτρο:

$\Delta x_{αντ.} = \upsilon_0 \cdot t_{αντ.} = 20\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 1\ \mathrm{s} = 20\ \mathrm{m}$.

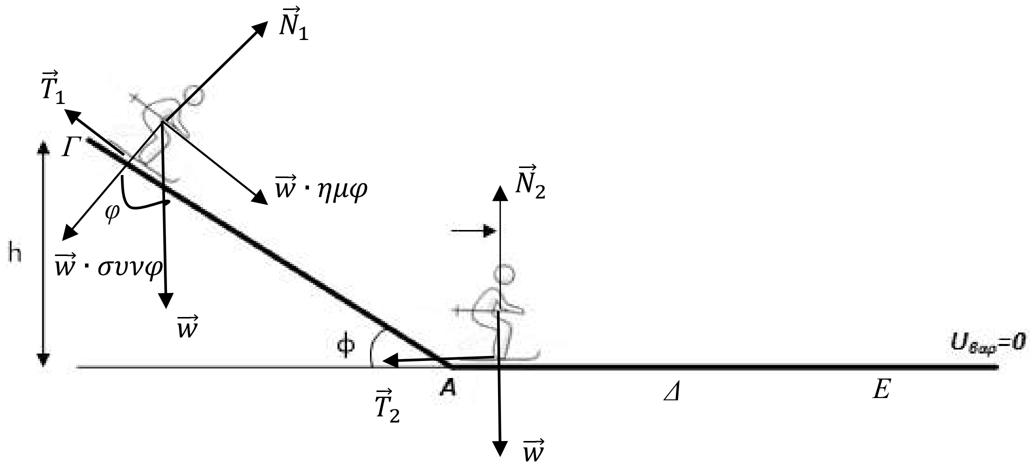
Από τη χρονική στιγμή $t_{αντ.} = 1\ \mathrm{s}$ το αυτοκίνητο επιβραδύνεται ομαλά, με αλγεβρική τιμή επιτάχυνσης $α = -5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ και ακινητοποιείται τη χρονική στιγμή t_1. Ισχύει: $α = \frac{\Delta \upsilon}{\Delta t}$, $α = \frac{\upsilon_1 - \upsilon_0}{t_1 - t_{αντ.}}$, $\upsilon_1 - \upsilon_0 = α \cdot (t_1 - t_{αντ.})$, $t_1 - t_{αντ.} = \frac{\upsilon_1 - \upsilon_0}{α}$,

$t_1 = t_{αντ.} + \frac{\upsilon_1 - \upsilon_0}{α}$, $t_1 = 5\ \mathrm{s}$. Από τη χρονική στιγμή $t_{αντ.} = 1\ \mathrm{s}$ μέχρι τη χρονική στιγμή $t_1 = 5\ \mathrm{s}$ το μέτρο της μετατόπισης του αυτοκινήτου είναι:

$\Delta x_{πεδ.} = \upsilon_0 \cdot (t_1 - t_{αντ.}) + \frac{1}{2} \cdot α \cdot (t_1 - t_{αντ.})^2$, $s_{πεδ.} = 40\ \mathrm{m}$. Έτσι, το μέτρο της συνολικής μετατόπισης του αυτοκινήτου από τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ μέχρι την χρονική στιγμή $t_1 = 5\ \mathrm{s}$ είναι: $\Delta x = \Delta x_{αντ.} + \Delta x_{πεδ.}$, $\Delta x = 60\ \mathrm{m}$.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Δ



Στο σχήμα έχουν σχεδιαστεί τόσο οι δυνάμεις που ασκούνται στην σκιέρ στην πλαγιά όσο και στο οριζόντιο επίπεδο. Στην πρώτη θέση η δύναμη του βάρους έχει αναλυθεί σε συνιστώσες κατά άξονες παράλληλο και κάθετο στην πλαγιά. Για τα μέτρα των δυνάμεων που έχουν σχεδιαστεί υπολογίζουμε:

Πλαγιά

$$w = m \cdot g = 600\ N,$$
$$w_x = m \cdot g \cdot \eta\mu\varphi = 360\ N$$
$$w_y = m \cdot g \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi = 480\ N$$

Στον άξονα που είναι κάθετος στην πλαγιά ισχύει ο 1ος νόμος του Newton, οπότε:

$$\sum \vec{F}_y = 0 \Rightarrow \vec{N}_1 + \vec{w}_y = 0 \Rightarrow N_1 = w_y = 480\ N$$

Οριζόντιο επίπεδο

Στον κατακόρυφο άξονα ισχύει ο 1ος νόμος του Newton, οπότε:

$$\sum \vec{F}_y = 0 \Rightarrow \vec{N}_2 + \vec{w} = 0 \Rightarrow N_2 = w = 600\ N$$

Και από το νόμο της τριβής, υπολογίζουμε το μέτρο της:

$$T_2 = \mu_2 \cdot N_2 = 0{,}2 \cdot 600N = 120\ N$$

(Σχόλιο: Οι μαθητές μπορούν να προχωρήσουν, ανάλογα με την στρατηγική που θα επιλέξουν, στην παραπάνω ανάλυση σε διάφορα σημεία της λύσης. Για το σωστό σχήμα, την ανάλυση των δυνάμεων και τους σωστούς υπολογισμούς να μοριοδοτηθούν μέχρι και με 5 Μονάδες)

Δ1) Υπολογίζουμε τη μηχανική ενέργεια στη θέση εκκίνησης της σκιέρ (σημείο Γ) και στη θέση εισόδου στο οριζόντιο επίπεδο (σημείο Α):

$$E_\Gamma = K_\Gamma + U_\Gamma = 0 + m \cdot g \cdot h = 72000\ J$$
$$E_A = \frac{2}{3} \cdot E_\Gamma = 48000\ J$$

Η δύναμη της τριβής μέσω του έργου της είναι η αιτία της ελάττωσης της μηχανικής ενέργειας ή οποία μετατρέπεται σε ένα άλλο είδος (θερμική ενέργεια). Συνεπώς ισχύει:

$$W_T = E_A - E_\Gamma \Rightarrow - T_1 \cdot (\Gamma A) = E_A - E_\Gamma \Rightarrow T_1 = -\frac{E_A - E_\Gamma}{(\Gamma A)} \Rightarrow \mu_1 \cdot N_1 = -\frac{E_A - E_\Gamma}{(\Gamma A)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu_1 = -\frac{E_A - E_\Gamma}{(\Gamma A) \cdot N_1}$$

Το μήκος της πλαγιάς *(ΓΑ)* υπολογίζεται με χρήση του ημιτόνου:

$$\eta\mu\varphi = \frac{h}{(\Gamma A)} \text{ ή } (\Gamma A) = \frac{120m}{0{,}6} = 200\ m$$

Καταλήγουμε λοιπόν:

$$\mu_1 = \frac{24000}{200 \cdot 480} = 0{,}25$$

(Μονάδες 5)

Εφαρμόζοντας τον ορισμό της μηχανικής ενέργειας στο σημείο Α, υπολογίζουμε το μέτρο της ταχύτητας υ_A:

$$E_A = K_A + U_A = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \upsilon_A^2 + 0 \Rightarrow \upsilon_A^2 = \frac{2E_A}{m} \Rightarrow \upsilon_A = \sqrt{\frac{2E_A}{m}}$$

$$\Rightarrow \upsilon_A = 40\ m/s$$

(Μονάδες 2)

Δ2) Εφαρμόζοντας τον 2° νόμο του Newton στον άξονα της κίνησης στην πλαγιά και λαμβάνοντας ως θετική τη φορά της επιτάχυνσης:

$$w_x - T_1 = m \cdot a_1 \Rightarrow w_x - \mu_1 \cdot N_1 = m \cdot a_1 \Rightarrow a_1 = \frac{w_x - \mu_1 \cdot N_1}{m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1 = \frac{360 - 0{,}25 \cdot 480}{60} m/s^2 \Rightarrow a_1 = 4\ m/s^2$$

(Μονάδες 2)

Η σκιέρ κινούμενη στην πλαγιά εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση και από την εξίσωση της ταχύτητας υπολογίζουμε τη χρονική στιγμή που διέρχεται από το σημείο Α:

$$\upsilon_A = \alpha_1 \cdot t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{\upsilon_A}{\alpha_1} \Rightarrow t_1 = 10\ s$$

Στη συνέχεια εφαρμόζουμε τον 2ο νόμο του Newton στο οριζόντιο επίπεδο, λαμβάνοντας ως θετική τη φορά της επιτάχυνσης:

$$T_2 = m \cdot a_2 \Rightarrow a_2 = 2\ m/s^2.$$

(Μονάδες 2)

Στο οριζόντιο επίπεδο η σκιέρ εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση και από την εξίσωση της ταχύτητας υπολογίζουμε τη χρονική διάρκεια της κίνησης από το Α σε ένα σημείο Δ για το οποίο ισχύει $\upsilon_\Delta = \frac{\upsilon_A}{2} = 20\frac{m}{s}$:

$$\upsilon = \upsilon_0 - a_2 \cdot \Delta t \Rightarrow \upsilon_\Delta = \upsilon_A - a_2 \cdot \Delta t \;\Rightarrow 20 = 40 - 2 \cdot \Delta t \Rightarrow \Delta t = 10s$$

(Μονάδες 2)

Άρα η χρονική στιγμή όπου το μέτρο της ταχύτητά της στο οριζόντιο έδαφος, γίνεται ίσο με το μισό του μέτρου της ταχύτητας, $\vec{\upsilon}_A$ θα είναι η,

$$t_2 = t_1 + \Delta t = (10 + 10)s = 20\ s$$

(Μονάδα 1)

Δ3) Έστω ότι η σκιέρ ακινητοποιείται σε σημείο Ε του οριζοντίου επιπέδου. Από τον ορισμό του έργου δύναμης για την περίπτωση της τριβής θα έχουμε:

$$W_{T_2} = T_2 \cdot \Delta x \cdot \sigma\upsilon\nu 180^o = -\mu_2 \cdot N_2 \cdot (AE) \quad (1)$$

(Μονάδες 2)

Στο οριζόντιο επίπεδο η σκιέρ εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση και από την εξίσωση της ταχύτητας υπολογίζουμε τη χρονική διάρκεια της κίνησης από το Α στο σημείο Ε και στη συνέχεια από την εξίσωση της μετατόπισης υπολογίζουμε το *(ΑΕ)*:

$$\upsilon = \upsilon_0 - a_2 \cdot \Delta t \Rightarrow \upsilon_E = \upsilon_A - a_2 \cdot \Delta t' \;\Rightarrow \Delta t' = \frac{\upsilon_A - \upsilon_E}{a_2} \Rightarrow \Delta t' = 20s$$

$$\Delta x \;= \upsilon_o \cdot \Delta t' - \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot \Delta t'^{\,2} \Rightarrow (AE) = \left(40 \cdot 20 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 20^2\right) m = 400\ m$$

(Μονάδες 3)

Άρα από την σχέση (1) υπολογίζουμε το έργο της τριβής:

$$W_{T_2} = -\mu_2 \cdot N_2 \cdot (AE) = (-0{,}2 \cdot 600 \cdot 400)\,J = -48000\,J$$

(Μονάδα 1)

Δ4) Για τη μέση ταχύτητα της σκιέρ ισχύει:

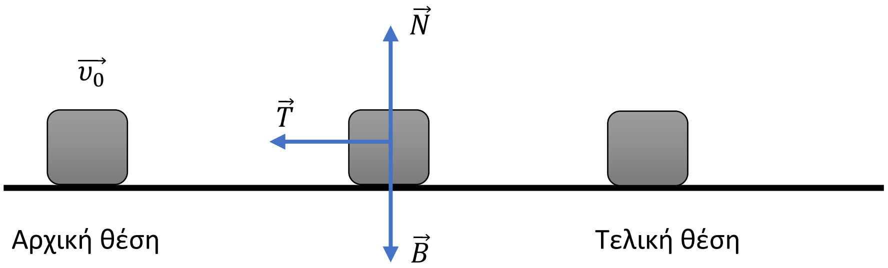
$$\upsilon_\mu = \frac{S_{o\lambda}}{\Delta t_{o\lambda}} = \frac{(\Gamma A) + (AE)}{t_1 + \Delta t'} = \frac{200 + 400}{10 + 20}\ m/s = 20\ m/s.$$

(Μονάδες 5)

Β1.

Β1.1. Σωστό είναι το **β)**

Β1.2. Ενδεικτική Αιτιολόγηση



Το αυτοκίνητο εκτελεί ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση με μέτρο επιτάχυνσης α. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Μεταβολής της Κινητικής Ενέργειας μεταξύ αρχικής και τελικής θέσης του αυτοκινήτου θα έχουμε ότι

$$K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = W_B + W_N + W_T \Rightarrow -K_{\alpha\rho\chi} = -TS \ (1)$$

Το αυτοκίνητο στην αρχική του θέση θα έχει ταχύτητα μέτρου υ_0 , ενώ στην τελική του θέση η ταχύτητά του θα είναι μηδέν. Επίσης, το αυτοκίνητο ισορροπεί στον y'y άξονα, όποτε θα έχουμε:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = w = mg \ (2)$$

Τέλος, για την Τριβή θα έχουμε ότι

$$T = \mu N \overset{(2)}{\Rightarrow} T = \mu mg \ (3)$$

Για τη σχέση (1) θα έχουμε ότι

$$(1) \Rightarrow -\frac{1}{2}m\upsilon_0^2 = -TS \overset{(3)}{\Rightarrow} \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 = \mu mgS \Rightarrow S = \frac{\upsilon_0^2}{2\mu g} \ (4)$$

Από τη σχέση (4) παρατηρούμε ότι η διανυόμενη απόσταση του αυτοκινήτου μέχρι να σταματήσει είναι αντιστρόφως ανάλογη του συντελεστή τριβής μεταξύ δαπέδου και τροχών. Οπότε για διπλάσιο συντελεστή τριβής το αυτοκίνητο θα διανύσει τη μισή απόσταση μέχρι να μηδενιστεί η ταχύτητά του. Δηλαδή,

$$S_2 = \frac{S_1}{2} \Rightarrow S_1 = 2S_2$$

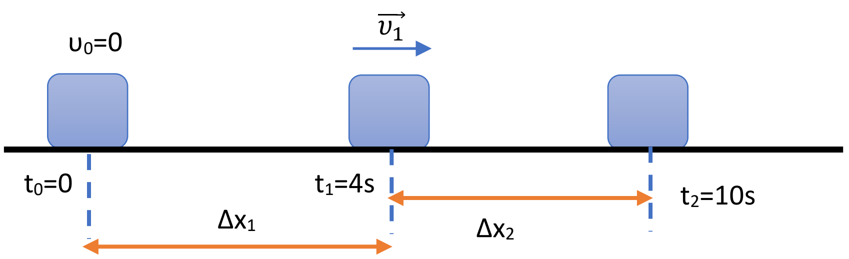
Πρόταση Βαθμολόγησης

- Για την εφαρμογή του Θεωρήματος Μεταβολής της Κινητικής Ενέργειας: 2 Μονάδες
- Για τη δυναμική μελέτη: 2 Μονάδες
- Για τη σύγκριση των δύο καταστάσεων του προβλήματος με το διαφορετικό συντελεστή τριβής τριβής μεταξύ δαπέδου και τροχών: 4 Μονάδες

B2.

B2.1. Σωστό είναι το **γ)**

B2.2. Ενδεικτική Αιτιολόγηση



Η κίνηση του Χάινς αποτελείται από 2 επιμέρους στάδια.

Τα πρώτα 4 δευτερόλεπτα ο αθλητής εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση χωρίς αρχική ταχύτητα. Επομένως, για τη μετατόπισή του θα έχουμε ότι:

$$\Delta x_1 = \frac{1}{2}\alpha \Delta t_1^2 \ (1)$$

,όπου Δt_1 =4s

Επίσης, στο τέλος των πρώτων 4 δευτερολέπτων η ταχύτητα του αθλητή δίνεται από τη σχέση:

$$\upsilon_1 = \alpha \Delta t_1 \ (2)$$

Τα τελευταία 6 δευτερόλεπτα ο αθλητής εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση και για την μετατόπισή του θα ισχύει:

$$\Delta x_2 = \upsilon_1 \Delta t_2 (3)$$

,όπου Δt_2 =6s και υ_1 η ταχύτητα του αθλητή στο τέλος των πρώτων 4 δευτερολέπτων.

Για τις μετατοπίσεις των 2 επιμέρους κινήσεων ισχύει ότι:

$$\Delta x_1 + \Delta x_2 = d \ (4) \text{ , με d=100m}$$

Λόγω των σχέσεων (1) και (3), η σχέση (4) τροποποιείται ως εξής:

$$\frac{1}{2}a\Delta t_1^2 + \upsilon_1 \Delta t_2 = d \overset{(2)}{\Rightarrow} \frac{1}{2}a\Delta t_1^2 + a\Delta t_1 \Delta t_2 = d \Rightarrow a(\Delta t_1^2 + 2\Delta t_1 \Delta t_2) = 2d \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \frac{2d}{\Delta t_1^2 + 2\Delta t_1 \Delta t_2} = \frac{100}{32}\frac{m}{s^2} = \frac{25}{8}\frac{m}{s^2}$$

Πρόταση Βαθμολόγησης

- Για τη μελέτη της καθεμιάς από τις δυο κινήσεις: 2 Μονάδες για κάθε κίνηση
- Για τη σύνδεση των επιμέρους μετατοπίσεων με τη συνολική μετατόπιση: 2 Μονάδες
- Για τον συνδυασμό των εξισώσεων που περιγράφουν τις επιμέρους κινήσεις και την τελική εξαγωγή αποτελέσματος: 2 Μονάδες

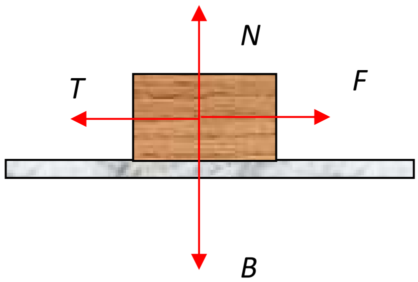
ΘΕΜΑ Β

Ενδεικτικές απαντήσεις

Β1.1 Ορθή απάντηση είναι η β.

Β1.2 Αιτιολόγηση

Το σώμα κινείται με σταθερή ταχύτητα. Επομένως σύμφωνα με τον 1^o Νόμο του Νεύτωνα η συνισταμένη δύναμη είναι μηδέν Επομένως τα μετρά των δυνάμεων είναι $F = T$ και $N = B$.



Εναλλακτικά

ΣF_x =0 ή $F - T$ =0. Άρα για τα μέτρα των δυνάμεων ισχύει $F = T$

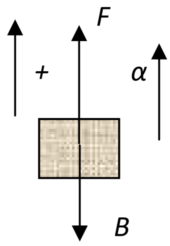
ΣF_ψ =0 ή $N - B$ =0. Άρα για τα μέτρα των δυνάμεων ισχύει $N = B$

Πρόταση βαθμολόγησης

Επιλογή ορθής απάντησης 4 μονάδες

Σύνδεση ευθύγραμμης ομαλής κίνησης με 1^o νόμο του Νεύτωνα και συνισταμένη δύναμη 3 μονάδες

Επιλογή της σωστής λύσης σε συνδυασμό με τη σύνδεση των μέτρων των δυνάμεων είτε αναφέροντας απευθείας ότι $F = T$ και $N = B$ είτε επιλέγοντας την εναλλακτική λύση 5 μονάδες



Β2.1

Ορθή απάντηση είναι β.

Β2.2

Αιτιολόγηση

Το σώμα κινείται με σταθερή επιτάχυνση προς τα πάνω. Θεωρούμε θετική φορά προς τα πάνω. Επομένως σύμφωνα με τον 2^o Νόμο του Νεύτωνα

$\Sigma F_\psi = ma$ ή F -B$= ma$ ή $F - mg$ =0,2mg ή F =1,2mg = 1,2B

Πρόταση βαθμολόγησης Β2

Επιλογή ορθής απάντησης 4 μονάδες

Σύνδεση της κίνησης με 2^o νόμο του Νεύτωνα και συνισταμένη δύναμη 2 μονάδες

Ορθή εφαρμογή του νόμου του Νεύτωνα 5 μονάδες.

Σωστός υπολογισμός 2 μονάδες

Β1.

Β1.1 Σωστή η απάντηση (β).

Ενδεικτική αιτιολόγηση

Β1.2 Αφού οι σφαίρες εκτελούν ελεύθερη πτώση, κινούνται με την ίδια επιτάχυνση που είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας $\vec{g}$, η οποία δεν εξαρτάται από τις μάζες των σωμάτων που πέφτουν. Οπότε κατά την πτώση για τα μέτρα των επιταχύνσεων θα ισχύει:

$$\alpha_\xi = \alpha_\sigma = g$$

(Μονάδες 4)

Β1.3 Σωστή η απάντηση (γ).

Ενδεικτική αιτιολόγηση

Β1.4 Για σώμα που εκτελεί ελεύθερη πτώση από ύψος *h*, ο χρόνος πτώσης υπολογίζεται από την εξίσωση κίνησης:

$$h = \frac{1}{2} g \cdot t^2 \quad \text{ή} \quad t = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}} \ (1)$$

(Μονάδες 2)

Γνωρίζοντας ότι το ύψος πτώσης της ξύλινης σφαίρας είναι διπλάσιο σε σχέση με αυτό της σιδερένιας σφαίρας: $h_\xi = 2 \cdot h_\sigma$, εφαρμόζοντας την (1) προκύπτει:

$$t_\xi = \sqrt{\frac{2 \cdot h_\xi}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2 \cdot h_\sigma}{g}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot h_\sigma}{g}} = \sqrt{2} \cdot t_\sigma$$

(Μονάδες 2)

Β2.

Β2.1 Σωστή η απάντηση (β).

Ενδεικτική αιτιολόγηση

Β2.2 Έστω ότι οι ποδηλάτες συναντώνται στο σημείο Γ τη χρονική στιγμή t_1. Ο ποδηλάτης (1) εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση και διανύει διάστημα $(ΑΓ) = \frac{d}{4}$, οπότε από την εξίσωση του διαστήματος θα ισχύει:

$$\frac{d}{4} = \upsilon_1 \cdot t_1 (1)$$

(Μονάδες 4)

Επίσης ο ποδηλάτης (2) εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση και διανύει διάστημα $(ΒΓ) = \frac{3 \cdot d}{4}$, οπότε από την εξίσωση του διαστήματος θα ισχύει:

$$\frac{3 \cdot d}{4} = \upsilon_2 \cdot t_1 (2)$$

(Μονάδες 2)

Διαιρώντας τις εξισώσεις (2) και (1) κατά μέλη προκύπτει:

$$3 = \frac{\upsilon_2}{\upsilon_1} \text{ ή } \upsilon_2 = 3 \cdot \upsilon_1$$

(Μονάδες 3)

12353

<u>Ενδεικτική Λύση</u>

2.1) Σωστή απάντηση: (γ)

Το δεδομένο ότι ο ανελκυστήρας κινείται με σταθερή ταχύτητα –σύμφωνα με τον 1ο νόμο του Newton- σημαίνει ότι η συνολική δύναμη που ασκείται στον ανελκυστήρα είναι μηδέν. Άρα η τάση του συρματόσχοινου είναι ίση με το συνολικό βάρος του συστήματος ανελκυστήρα-επιβατών.

Συνολική μάζα = $M + m$

Άρα $T = (M + m) \cdot g$

2.2) Σωστή απάντηση: (α)

Το σώμα κινείται οριζόντια με σταθερή επιτάχυνση οπότε σύμφωνα με τον 2ο νόμο του Newton

$$F_{ολ} = ma \text{ (1)}$$

Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα στον οριζόντιο άξονα είναι η οριζόντια συνιστώσα F_x της δύναμης F και η τριβή T (η οποία έχει φορά αντίθετη σε αυτή της κίνησης του σώματος).

Άρα για τον οριζόντιο άξονα ισχύει ότι:

$$F_{ολ\,x} = F_x - T \text{ (2)}$$

Την οριζόντια συνιστώσα F_x της δύναμης F την υπολογίζουμε με ανάλυση της ως:

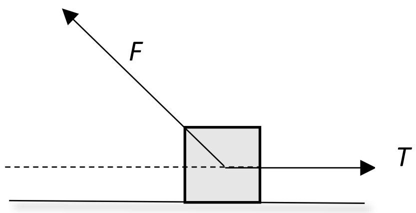
$$F_x = F \cdot συνφ \text{ (3)}$$

Άρα αν στη σχέση (2) αντικαταστήσουμε την (1) και την (3) προκύπτει

$$ma = F \cdot συνφ - T$$

$$T = F \cdot συνφ - ma$$

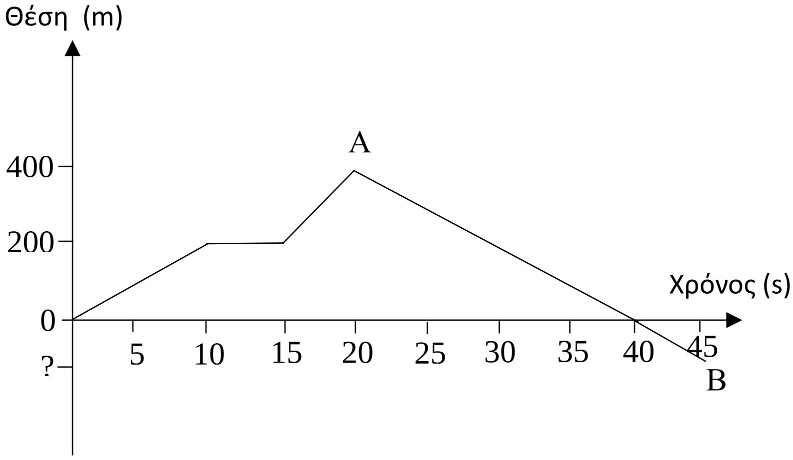
Και ο σχεδιασμός της τριβής



Ενδεικτική Λύση

4.1) Οι πληροφορίες που παίρνουμε από το διάγραμμα για την κίνηση του παπαγάλου σε μορφή πίνακα:

Χρονικό Διάστημα	Είδος κίνησης
0 - 10 s	Ευθ. Ομαλή Κίνηση
10 - 15 s	Ακινησία
15 -20 s	Ευθ. Ομαλή Κίνηση
20 - 40 s	Ευθ. Ομαλή Κίνηση (επιστρέφει προς την αφετηρία)
40 - 45 s	Ευθ. Ομαλή Κίνηση (προσπερνάει την αφετηρία και συνεχίζει προς αντίθετη κατεύθυνση)



Με βάση το διάγραμμα ο παπαγάλος διανύει 400 m σε χρόνο 20 s

οπότε: $\upsilon_\mu = \frac{400}{20}\frac{m}{s} = 20\ \frac{m}{s}$

(Μονάδες 6)

4.2) Στο χρονικό διάστημα από 20 - 30 s ο παπαγάλος κινείται με κατεύθυνση προς το σημείο από όπου ξεκίνησε. Για το κομμάτι της διαδρομής Α -> Β ο παπαγάλος έχει σταθερή ταχύτητα, παριστάνεται γραφικά με όλα τα σημεία της διαδρομής να βρίσκονται πάνω στο ίδιο ευθύγραμμο τμήμα.

Άρα η ταχύτητα του υ_{AB} θα υπολογιστεί από το διάστημα 20 - 40 s

$$\upsilon_{AB} = \frac{\Delta x_{20\to 40}}{\Delta t} = \frac{-400}{20}\ \frac{m}{s} = -20\ \frac{m}{s}$$

Άρα για το χρονικό διάστημα 20 - 30 s ο παπαγάλος διάνυσε απόσταση:

$$|\Delta x_{20\to 30}| = |\upsilon_{AB}| \cdot \Delta t_{20\to 30} = 20 \cdot 10\ m = 200\ m$$

(Μονάδες 3)

Οπότε η συνολική απόσταση για τα πρώτα 30 s είναι:

$$|\Delta x_{0\to 30}| = |\Delta x_{0\to 10}| + |\Delta x_{10\to 15}| + |\Delta x_{15\to 20}| + |\Delta x_{20\to 30}| = (200 + 0 + 200 + 200)\ m = 600\ m$$

Η μέση ταχύτητα για τα πρώτα 30 s είναι:

$$\upsilon_{\mu 30} = \frac{S_{0\to 30}}{\Delta t_{0\to 30}} = \frac{600}{30}\ \frac{m}{s} = 20\ \frac{m}{s}$$

(Μονάδες 4)

4.3) Για το κομμάτι της διαδρομής Α → Β ο παπαγάλος έχει ταχύτητα μέτρου $\upsilon_{AB} = 20\ \frac{m}{s}$ και τη χρονική στιγμή 40 s έχει επιστρέψει στην αφετηρία.

Για το χρονικό διάστημα 40 - 45 s θα διανύσει απόσταση

$$|\Delta x_2| = |\upsilon_{AB}| \cdot \Delta t_{40-45} = 20 \cdot 5\ m = 100\ m$$

Και επειδή κινείται σε μια ευθεία, θα βρίσκεται σε απόσταση 100 μέτρα από το σημείο που απελευθερώθηκε, αλλά προς την αντίθετη κατεύθυνση από αυτή που πέταξε αρχικά. Δηλαδή στη θέση x = -100 m στον άξονα της κίνησης του.

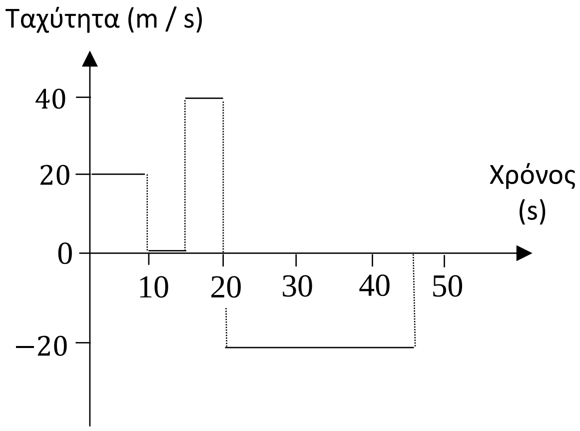
(Μονάδες 6)

4.4) Για να σχεδιάσουμε το διάγραμμα της ταχύτητας ως προς το χρόνο χρειάζεται να υπολογίσουμε την ταχύτητα για το χρονικό διάστημα 0 - 10 s

$$\upsilon_{0-10} = \frac{|\Delta x_{0\to10}|}{\Delta t_{0\to10}} = \frac{200}{10}\frac{m}{s} = 20\ \frac{m}{s}$$

Και για το χρονικό διάστημα 15 - 20 s

$$\upsilon_{15-20} = \frac{|\Delta x_{15\to20}|}{\Delta t_{15\to20}} = \frac{200}{5}\frac{m}{s} = 40\ \frac{m}{s}$$



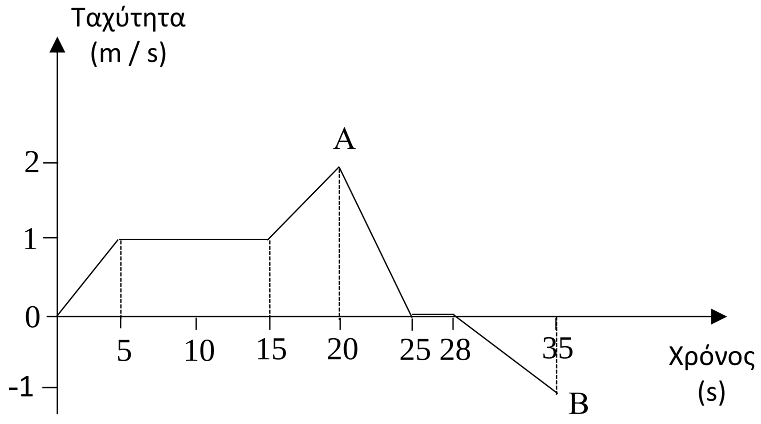
(Μονάδες 6)

<u>Σημείωση:</u> Εάν παρατηρούσαμε ένα διάγραμμα της ταχύτητας ως προς το χρόνο βασισμένο σε πραγματικές τιμές από αντίστοιχες παρατηρήσεις / κινήσεις πτηνών, δε θα βλέπαμε αυτές τις απότομες αλλαγές ταχύτητας και κατεύθυνσης. Θα ήταν διαρκώς μεταβαλλόμενο κατά τη διάρκεια της πτήσης, με επιταχύνσεις και επιβραδύνσεις κατά τη διάρκεια του πετάγματος και πριν/μετά τις στάσεις του. Για τις ανάγκες της άσκησης χρησιμοποιήθηκαν εξιδανικευμένα δεδομένα που επιτρέπουν την αναπαράσταση και επεξεργασία με γνώσεις της Α΄ Λυκείου.

Ενδεικτική Λύση

4.1) Το διάγραμμα μας δίνει τις εξής πληροφορίες:

Χρονικό Διάστημα	Είδος κίνησης
0 - 5 s	Ευθ. Ομαλά Επιταχυνόμενη
5 - 15 s	Ευθ. Ομαλή Κίνηση
15 -20 s	Ευθ. Ομαλά Επιταχυνόμενη
20 - 25 s	Ευθ. Ομαλά Επιβραδυνόμενη
25 - 28 s	Ακινησία
28 – 35 s	Ευθ. Ομαλά Επιταχυνόμενη



Άρα για το χρονικό διάστημα 0 – 5 s έχουμε:

$$\upsilon_1 = \alpha_1 \cdot \Delta t_1 \text{ ή } \alpha_1 = \frac{\upsilon_1}{\Delta t_1} \text{ ή } \alpha_1 = \frac{1}{5}\,\frac{m}{s^2}$$

$$\Delta x_1 = \frac{1}{2}\cdot \alpha_1 \cdot \Delta t_1^2 \text{ ή } \Delta x_1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\cdot 5^2 m \text{ ή } \Delta x_1 = 2{,}5\; m$$

Για το χρονικό διάστημα 5 - 15 s :

$$\Delta x_2 = \upsilon_1 \cdot \Delta t_2 = 1 \cdot 10\; m = 10\; m$$

Και για το 15 – 20 s :

$$\upsilon_2 = \upsilon_1 + \alpha_2 \cdot \Delta t_3 \text{ ή } \alpha_2 = \frac{\upsilon_2 - \upsilon_1}{\Delta t_3} \text{ ή } \alpha_2 = \frac{2-1}{5}\,\frac{m}{s^2} \text{ ή } \alpha_2 = \frac{1}{5}\,\frac{m}{s^2}$$

$$\Delta x_3 = \upsilon_1 \cdot \Delta t_3 + \frac{1}{2}\cdot \alpha_2 \cdot \Delta t_3^2 \text{ ή } \Delta x_3 = 1\cdot 5 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\cdot 5^2\; m \text{ ή } \Delta x_3 = 7{,}5\; m$$

Άρα συνολικά διάνυσε $S = |\Delta x_1| + |\Delta x_2| + |\Delta x_3| = 20\; m$

(Μονάδες 6)

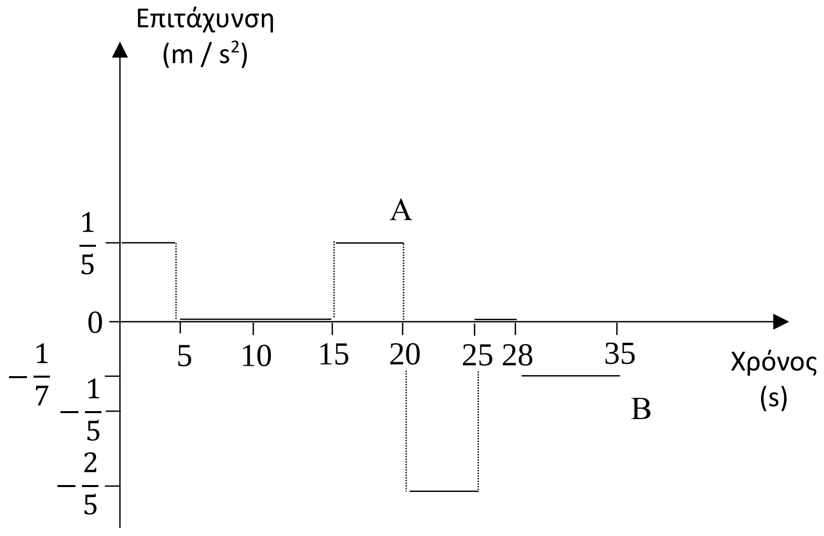
4.2) Για το διάγραμμα της επιτάχυνσης χρειάζεται να υπολογίσουμε τις επιταχύνσεις για το υπόλοιπο της διαδρομής. Ορίζεται θετική φορά η κίνηση προς τα δεξιά.

Για το χρονικό διάστημα 20 - 25 s

$$\upsilon_3 = \upsilon_2 - \alpha_3 \cdot \Delta t_4$$

$$\alpha_3 = \frac{\upsilon_2 - \upsilon_3}{\Delta t_4}$$

$$\alpha_3 = \frac{2-0}{5}\,\frac{m}{s^2}$$



Όποτε: $\alpha_3 = \frac{2}{5}\,\frac{m}{s^2}$ με φορά προς την αφετηρία.

Για το χρονικό διάστημα 25 - 28 s : Ο κολυμβητής παραμένει ακίνητος

Για το χρονικό διάστημα 28 - 35 s : $\upsilon_4 = \alpha_4 \cdot \Delta t_5$ ή $\alpha_4 = \frac{\upsilon_4}{\Delta t_5}$ ή $\alpha_4 = \frac{1}{7}\frac{m}{s^2}$, με φορά προς την αφετηρία.

(Μονάδες 6)

4.3) Μέχρι το σημείο Α έχει διανύσει 20 m

Για το χρονικό διάστημα 20 - 25 s

$$\Delta x_4 = \upsilon_2 \cdot \Delta t_4 - \frac{1}{2} \cdot \alpha_3 \cdot \Delta t_4^2 \text{ ή } \Delta x_4 = 2 \cdot 5 - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} \cdot 5^2\, m \text{ ή } \Delta x_4 = 5\, m$$

Για το χρονικό διάστημα 28 - 35 s

$$|\Delta x_5| = \frac{1}{2} \cdot \alpha_4 \cdot \Delta t_5^2 \text{ ή } |\Delta x_5| = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7} \cdot 7^2\, m \text{ ή } |\Delta x_5| = 3{,}5\, m$$

Συνολική απόσταση που διάνυσε: $S_{o\lambda} = |\Delta x_1| + |\Delta x_2| + |\Delta x_3| + |\Delta x_4| + |\Delta x_5| = 28{,}5\, m$ σε χρόνο 35 s.

(Μονάδες 4)

Οπότε: $\upsilon_\mu = \frac{S_{o\lambda}}{t_{o\lambda}} = \frac{28{,}5\, m}{35\, s} = 0{,}814\, \frac{m}{s}$

και απέχει $25 - 3{,}5 = 21{,}5$ m από την αφετηρία.

Οπότε η μετατόπιση $\Delta x_{0-35} = x_{35} - x_0 = 21{,}5 - 0 = 21{,}5\, m$

(Μονάδες 2)

4.4) Όταν ο κολυμβητής κινείται με σταθερή ταχύτητα, εφαρμόζουμε τον 1° Νόμο του Newton, από τον οποίο προκύπτει ότι η δύναμη F που τον κινεί και η αντίσταση από το νερό F_A, έχουν ίσα μέτρα.

Όταν όμως κινείται με επιτάχυνση πρέπει να εφαρμόσουμε το 2° Νόμο, δηλ.: $F - F_A = m \cdot a$

Χρονικό Διάστημα	Δύναμη	Έργο Δύναμης
0 - 5 s	$F_1 - F_A = m \cdot \alpha_1$ ή $F_1 = 70 \cdot \frac{1}{5} + 28 = 42\, N$	$F_1 \cdot \Delta x_1 = 42 \cdot 2{,}5 = 105$ J
5 - 15 s	$F_2 = F_A = 28\, N$	$F_2 \cdot \Delta x_2 = 28 \cdot 10 = 280$ J
15 -20 s	$F_3 - F_A = m \cdot \alpha_2$ ή $F_3 = 70 \cdot \frac{1}{5} + 28 = 42\, N$	$F_3 \cdot \Delta x_3 = 42 \cdot 7{,}5 = 315$ J
20 - 25 s	$m \cdot \alpha_3 = 70 \cdot \frac{2}{5} = 28\, N$ άρα ο κολυμβητής επιβραδύνεται μόνο υπό της επίδραση της αντίστασης του νερού δεν ασκεί καμία δύναμη	0
25 - 28 s	Ακινησία $F_5 = 0$	0
28 – 35 s	$F_6 - F_A = m \cdot \alpha_4$ ή $F_6 = 70 \cdot \frac{1}{7} + 28 = 38\, N$	$F_6 \cdot \Delta x_5 = 38 \cdot 3{,}5 = 133$ J
	Συνολικό έργο	**833 J**

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Β

Β1.

Α) β)

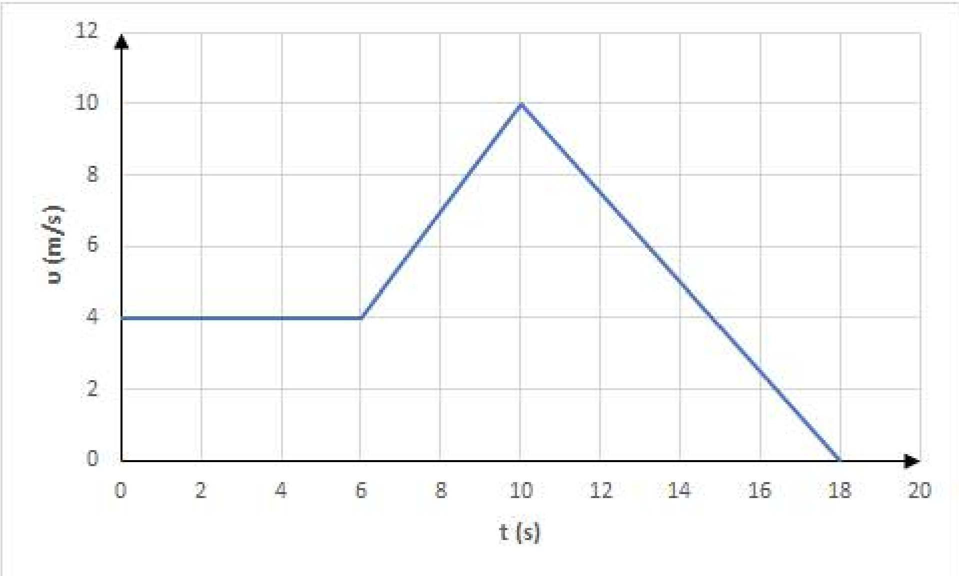
Μονάδες 4

Β) Επειδή το σώμα κινείται με την επίδραση του γήινου βάρους του και μόνο, η μηχανική του ενέργεια διατηρείται σταθερή:

$E_{\alpha\rho\chi} = E_{\tau\varepsilon\lambda}$, $K_{\alpha\rho\chi} + U_{\alpha\rho\chi} = K_{\tau\varepsilon\lambda} + U_{\tau\varepsilon\lambda}$, $K_{\alpha\rho\chi} - K_{\tau\varepsilon\lambda} = U_{\tau\varepsilon\lambda} - U_{\alpha\rho\chi}$, $-\Delta K = \Delta U$, $\frac{\Delta K}{\Delta U} = -1$.

Μονάδες 8

Β2.



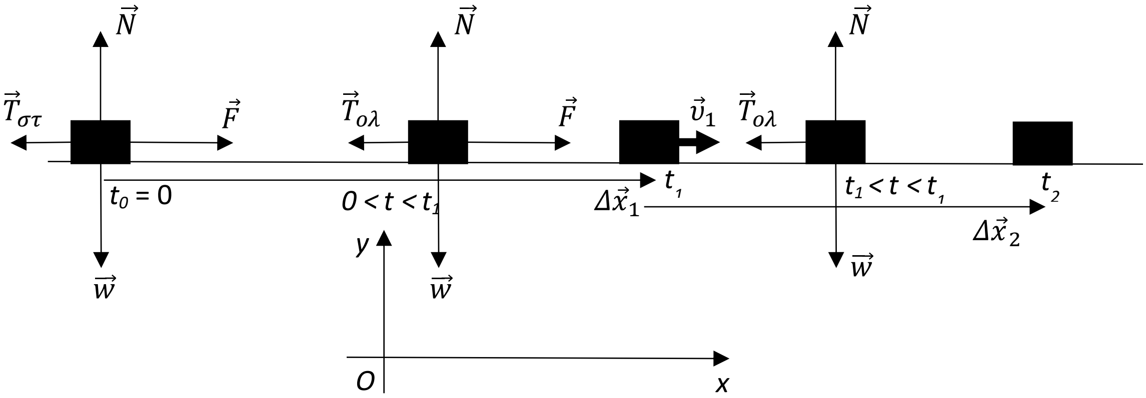
Α) β)

Μονάδες 4

Β) Στο χρονικό διάστημα (6 s , 10 s) το μέτρο της ταχύτητας του κινητού αυξάνεται (επιταχυνόμενη κίνηση) και συνεπώς η ταχύτητα και η επιτάχυνση έχουν την ίδια κατεύθυνση. Στο χρονικό διάστημα (0 , 6 s) το μέτρο της ταχύτητας του κινητού παραμένει σταθερό, οπότε η επιτάχυνσή του είναι μηδενική. Στο χρονικό διάστημα (10 s , 18 s) το μέτρο της ταχύτητας του κινητού ελαττώνεται (επιβραδυνόμενη κίνηση) και συνεπώς η ταχύτητα και η επιτάχυνση έχουν αντίθετη κατεύθυνση.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Δ



Δ1. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ στο σώμα ασκείται το γήινο βάρος του $\vec{w}$, η δύναμη $\vec{F}$ και η δύναμη από το δάπεδο, η οποία αναλύεται στην $\vec{N}$ και στην στατική τριβή $\vec{T}_{\sigma\tau}$. Το σώμα θα αρχίσει να κινείται τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ αν $F > T_{op}$, όπου F το μέτρο της δύναμης $\vec{F}$ και T_{op} το μέτρο της οριακής (μέγιστης στατικής) τριβής. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ το σώμα είναι ακίνητο, οπότε σύμφωνα με τον 1° νόμο του Newton:

$$\sum \vec{F}_y = \vec{0}\,,\, N = w\,,\, N = m \cdot g\,,\, N = 10\,\mathrm{N}$$

. Από τον νόμο της οριακής τριβής: $T_{op} = \mu_{op} \cdot N\,,\, T_{op} = 5\,\mathrm{N}$. Επειδή: $F = 10$ N > 5 N = T_{op}, το σώμα θα αρχίσει να κινείται τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$.

Μονάδες 5

Δ2.

Δ.2.1. Από τον νόμο της τριβής ολίσθησης: $T_{o\lambda} = \mu_{o\lambda} \cdot N\,,\, T_{o\lambda} = 4\,\mathrm{N}$ (Μονάδες 2) καθ' όλη τη διάρκεια της κίνησης. Στο χρονικό διάστημα (0, $t_1 = 10$ s), από τον Θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής, ισχύει: $\sum \vec{F}_{x,1} = m \cdot \vec{a}_1\,,\, F - T_{o\lambda} = m \cdot a_1\,,\, a_1 = \frac{F - T_{o\lambda}}{m}\,,\, a_1 = 6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. (Μονάδες 4) Τη χρονική στιγμή $t_1 = 10$ s ισχύουν:

$$\left\{\begin{array}{c} \upsilon_1 = \upsilon_0 + \alpha_1 \cdot t_1\,,\, \upsilon_1 = 60\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\ (\text{Μονάδες } 2) \\ \Delta x_1 = \upsilon_0 \cdot t_1 + \frac{1}{2} \cdot a_1 \cdot t_1^2 = 300\,\mathrm{m}\ (\text{Μονάδες } 2) \end{array}\right\}$$

. Στο χρονικό διάστημα ($t_1 = 10$ s , t_2), από την αρχή διατήρησης της ενέργειας, ισχύει:

$$\Delta K = W_{\vec{T}_{o\lambda}}\,,\, K_2 - K_1 = -T_{o\lambda} \cdot \Delta x_2\,,\, \Delta x_2 = -\frac{K_2 - K_1}{T_{o\lambda}}\,,\, \Delta x_2 = -\frac{0 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot \upsilon_1^2}{T_{o\lambda}}\,,$$

$\Delta x_2 = 450\,\mathrm{m}$. (Μονάδες 4)

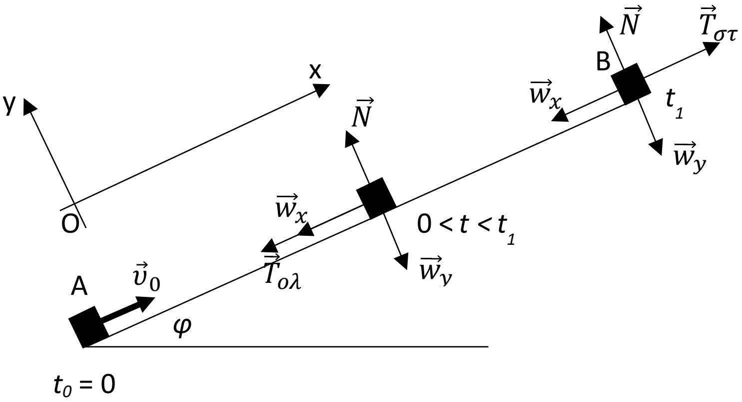
Τελικά: $\Delta x_{o\lambda} = \Delta x_1 + \Delta x_2 = 750\,\mathrm{m}$ (Μονάδα 1).

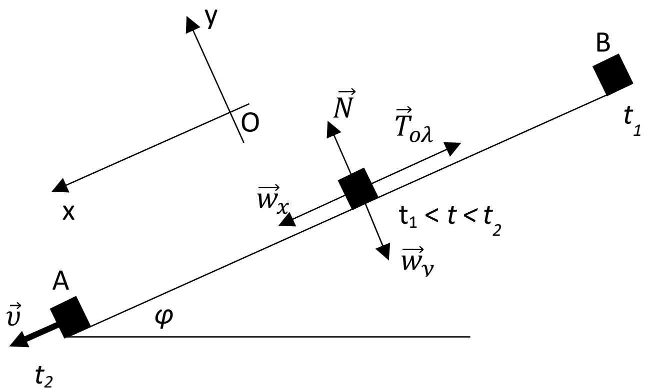
Μονάδες 15

Δ.2.2. Για τη συνολική θερμότητα που εκλύθηκε στο περιβάλλον ισχύει: $Q = \left|W_{\vec{T}_{o\lambda}}\right| = T_{o\lambda} \cdot (\Delta x_1 + \Delta x_2)$, $Q = 3000\,\mathrm{J}$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ





Δ1. Κατά την κίνηση του σώματος από το σημείο Α στο σημείο Β, στον άξονα Oy, από τον 1ο νόμο του Newton, ισχύει: $\sum \vec{F}_y = \vec{0}$, $N = w_y$, $N = m \cdot g \cdot συνφ$, $N = 5\sqrt{3}$ N. (Μονάδα 1). Από τον νόμο της τριβής ολίσθησης: $T_{ολ} = μ_{ολ} \cdot N$, $T_{ολ} = 3$ N. (Μονάδες 1). Από την αρχή διατήρησης της ενέργειας ισχύει:

$$ΔK_{AB} = W_{\vec{w}_x} + W_{\vec{T}_{ολ}},\ K_B - K_A = -w_x \cdot (AB) - T_{ολ} \cdot (AB),$$

$$-\frac{1}{2} \cdot m \cdot υ_0^2 = -(m \cdot g \cdot ημφ + T_{ολ}) \cdot (AB),\ (AB) = \frac{\frac{1}{2} \cdot m \cdot υ_0^2}{m \cdot g \cdot ημφ + T_{ολ}},$$

$(AB) = 6{,}25$ m. (Μονάδες 4)

Μονάδες 6

Δ2. Για το μέτρο της οριακής (μέγιστης στατικής) τριβής, ισχύει: $T_{ορ} = μ_{ορ} \cdot N$, $T_{ορ} = 3{,}75$ N. (Μονάδες 3)

Επειδή: $w_x = m \cdot g \cdot ημφ = 5\,\mathrm{N} > 3{,}75\,\mathrm{N} = T_{ορ}$, η ακινητοποίηση θα είναι στιγμιαία (Μονάδες 3).

Μονάδες 6

Δ3. Από την αρχή διατήρησης της ενέργειας για την κίνηση του σώματος από το Β στο Α ισχύει:

$ΔK_{BA} = W_{\vec{w}_x} + W_{\vec{T}_{ολ}}$, $K_A - K_B = w_x \cdot (AB) - T_{ολ} \cdot (AB)$,

$\frac{1}{2} \cdot m \cdot υ^2 = (m \cdot g \cdot ημφ - T_{ολ}) \cdot (AB)$ (Μονάδες 4) και

$υ = \sqrt{\frac{2 \cdot (m \cdot g \cdot ημφ - T_{ολ}) \cdot (AB)}{m}}$, $υ = 5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. (Μονάδες 2)

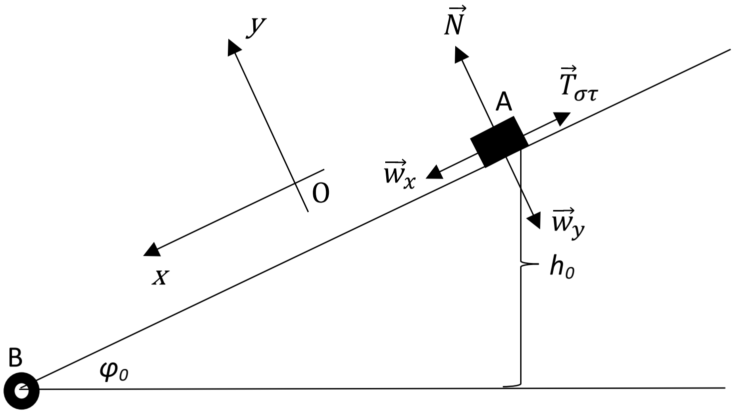
Μονάδες 6

Δ4. Ισχύει: $Q = 2 \cdot \left|W_{\vec{T}_{ολ}}\right| = 2 \cdot T_{ολ} \cdot (AB) = 37{,}5\,\mathrm{J}$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

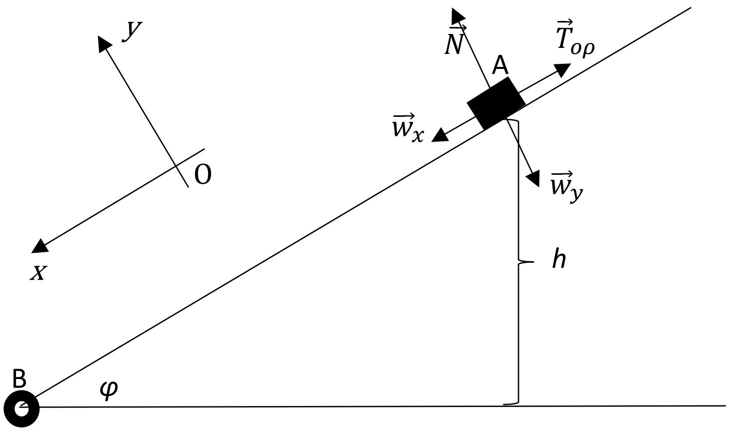
Δ1.



Το σώμα είναι ακίνητο. Σύμφωνα με τον 1ο νόμο του Newton: $\sum \vec{F}_x = \vec{0}$, $T_{στ} = w_x$, $T_{στ} = m \cdot g \cdot ημφ_0 = 5\,\text{N}$.

Μονάδες 6

Δ2.



Τη χρονική στιγμή t_1, κατά την οποία το σώμα είναι έτοιμο να ολισθήσει στο δάπεδο, η γωνία που σχηματίζει το κεκλιμένο δάπεδο με τον ορίζοντα είναι $φ > 30^o$ και η στατική τριβή έχει αποκτήσει την μέγιστη τιμή της. Από τον 1ο νόμο του Newton ισχύει:

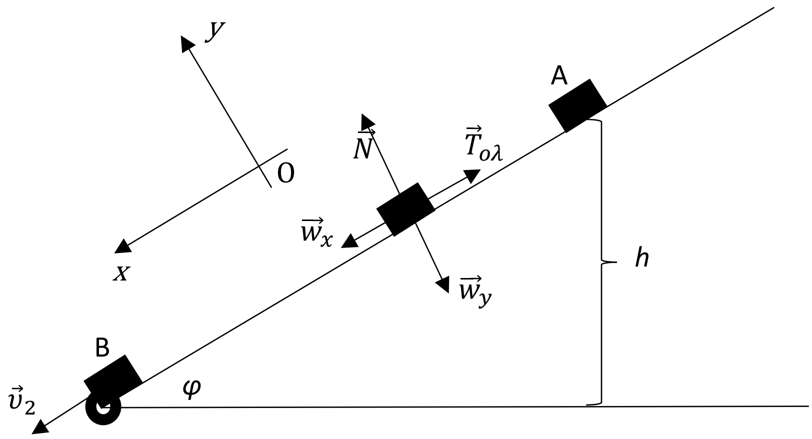
$$\left\{ \begin{array}{l} \sum \vec{F}_y = \vec{0}\,,\ N = w_y\,,\ N = m \cdot g \cdot συνφ \ (\text{Μονάδα } 1) \\ \sum \vec{F}_x = \vec{0}\,,\ T_{ορ} = w_x\,,\ μ_{ορ} \cdot N = m \cdot g \cdot ημφ \ (\text{Μονάδα } 1) \end{array} \right\},$$

$μ_{ορ} = \dfrac{ημφ}{συνφ}$, $εφφ = 1$, $φ = 45^o$. (Μονάδες 2) $\dfrac{Δφ}{Δt} = \dfrac{φ - φ_0}{t_1 - t_0}$, $t_1 = \dfrac{φ - φ_0}{\frac{Δφ}{Δt}}$, $t_1 = 3\,\text{s}$ (Μονάδες 2)

.

Μονάδες 6

Δ3.



Ισχύει: $ημφ_0 = \frac{h_0}{(AB)}$, $(AB) = \frac{h_0}{ημφ}$, $(AB) = 20 \cdot \sqrt{2}$ m. (Μονάδα 1) Από τον νόμο της τριβής ολίσθησης: $T_{ολ} = μ_{ολ} \cdot N = μ_{ολ} \cdot m \cdot g \cdot συνφ = \frac{5 \cdot \sqrt{2}}{2}$ N. (Μονάδα 1)

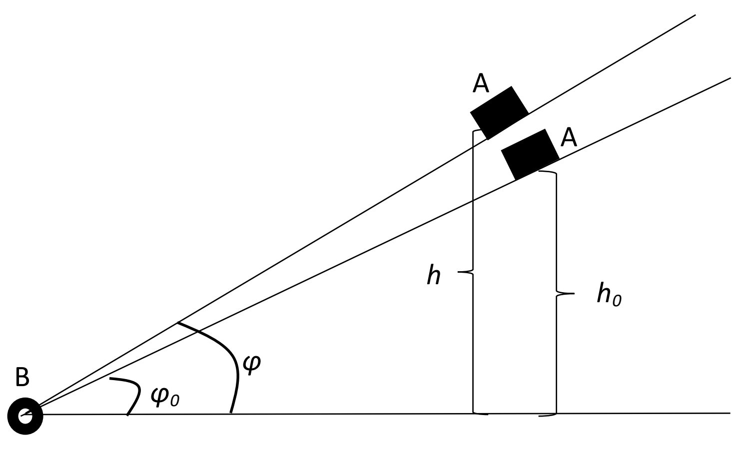
Από τον Θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής:

$\sum \vec{F_x} = m \cdot α$, $w_x - T_{ολ} = m \cdot α$, $α = \frac{w_x - T_{ολ}}{m}$, $α = \frac{5 \cdot \sqrt{2}}{2}\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. (Μονάδες 2)

Ισχύει: $(AB) = \frac{1}{2}\, α\, (t_2 - t_1)^2$, $t_2 - t_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot (AB)}{α}}$, $t_2 - t_1 = 4$ s (Μονάδα 1) και $υ_2 = α \cdot (t_2 - t_1)$, $υ_2 = 10 \cdot \sqrt{2}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$. (Μονάδα 1)

Μονάδες 6

Δ4.



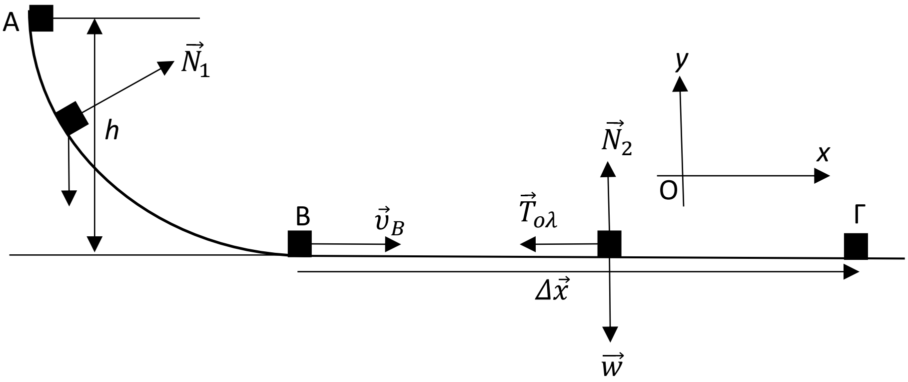
Η απαιτούμενη ενέργεια ισούται με την αύξηση της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας του σώματος: $E = ΔU$, $E = m \cdot g \cdot h - m \cdot g \cdot h_0$, $E = m \cdot g \cdot (h - h_0)$,

$E = m \cdot g \cdot [(AB) \cdot ημφ - (AB) \cdot ημφ_0]$, $E = m \cdot g \cdot (AB) \cdot (ημφ - ημφ_0)$,

$$E = 200 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2} - 1}{2}\ \mathrm{J},\ E = 100 \cdot \left(2 - \sqrt{2}\right)\ \mathrm{J}.$$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ



Δ1.

Δ1.1. Το καμπυλόγραμμο τμήμα του διαδρόμου είναι λείο και το έργο της δύναμης $\vec{N}_1$ είναι μηδέν το έργο της δύναμης , επειδή κάθε χρονική στιγμή είναι κάθετη στη στοιχειώδη μετατόπιση. Συνεπώς η μηχανική ενέργεια του σώματος, κατά την κίνησή του σ' αυτό το τμήμα του διαδρόμου, παραμένει σταθερή. Έτσι:

$E_A = E_B$, $K_A + U_A = K_B + U_B$, $m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \upsilon_B^2$, $\upsilon_B = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$,

$\upsilon_B = 10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

Μονάδες 6

Δ1.2. Κατά την κίνηση του σώματος στο οριζόντιο τμήμα του διαδρόμου, στον άξονα Oy, από τον 1ο νόμο του Newton, ισχύει: $\sum\vec{F}_y = \vec{0}$, $N_2 = w$, $N_2 = m \cdot g$ [1]. (Μονάδες 1) Από τον νόμο της τριβής ολίσθησης: $T_{ολ} = \mu_{ολ} \cdot N$, $T_{ολ} = \mu_{ολ} \cdot m \cdot g$ [2]. (Μονάδες 1) Από την αρχή διατήρησης της ενέργειας, για την κίνηση του σώματος από το σημείο Β έως το Γ και λαμβάνοντας υπόψη τις εξισώσεις [1] και [2], προκύπτει:

$\Delta K = W_{\vec{T}_{ολ}}$, $K_\Gamma - K_B = -T_{ολ} \cdot \Delta x$, $-\frac{1}{2} \cdot m \cdot \upsilon_B^2 = -\mu_{ολ} \cdot m \cdot g \cdot \Delta x$,

$\Delta x = \frac{\upsilon_B^2}{2 \cdot \mu_{ολ} \cdot g}$, $\Delta x = 10\ \mathrm{m}$. (Μονάδες 4)

Μονάδες 6

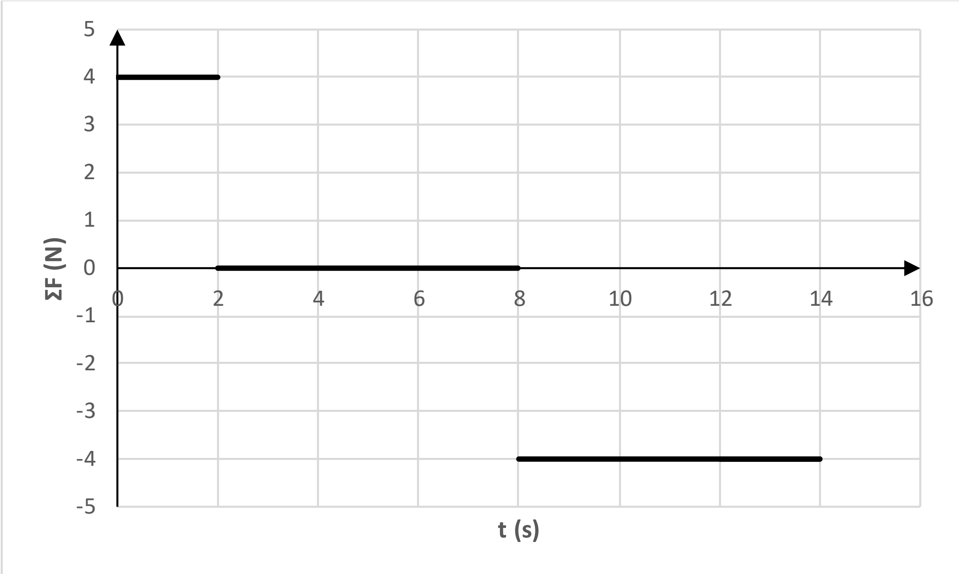
Δ1.3. Κατά την κίνηση του σώματος στο ευθύγραμμο τμήμα του διαδρόμου: $\alpha = \frac{\sum F_x}{m} = -\frac{\mu_{ολ} \cdot m \cdot g}{m} = -\mu_{ολ} \cdot g = -5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. (Μονάδες 3) Από την εξίσωση της ταχύτητας: $\upsilon_\Gamma = \upsilon_B + \alpha \cdot \Delta t$, $\Delta t = \frac{\upsilon_\Gamma - \upsilon_B}{\alpha}$, $\Delta t = 2\ \mathrm{s}$. (Μονάδες 3)

Μονάδες 6

Δ2. Για το καμπυλόγραμμο τμήμα του διαδρόμου ισχύει: $\Delta\vec{\upsilon}_1 = \vec{\upsilon}_B - \vec{\upsilon}_A = \vec{\upsilon}_B$. (Μονάδες 3) Για το ευθύγραμμο τμήμα του διαδρόμου ισχύει: $\Delta\vec{\upsilon}_2 = \vec{\upsilon}_\Gamma - \vec{\upsilon}_B = -\vec{\upsilon}_B$. (Μονάδες 3) Έτσι: $\Delta\vec{\upsilon}_1 = -\Delta\vec{\upsilon}_2$. (Μονάδα 1)

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ



Δ1.

Δ1.1. Από τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ μέχρι τη χρονική στιγμή $t_1 = 2$ s: $\sum F_1 = 4\,\mathrm{N}$, $m \cdot a_1 = 4\,\mathrm{N}$, $a_1 = 4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. (Μονάδα 1) Ισχύουν:

$\upsilon_1 = \upsilon_0 + \alpha_1 \cdot t_1 = 8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ (Μονάδες 1,5) και

$x_1 = x_0 + \upsilon_0 \cdot t_1 + \frac{1}{2} \cdot a_1 \cdot t_1^2$, $x_1 = 8\,\mathrm{m}$. (Μονάδες 1,5)

Μονάδες 4

Δ1.2. Από τη χρονική στιγμή $t_1 = 2$ s μέχρι τη χρονική στιγμή $t_2 = 8$ s: $\sum F_2 = 0$. (Μονάδα 1) Ισχύουν: $\upsilon_2 = \upsilon_1 = 8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ (Μονάδες 1,5) και

$x_2 = x_1 + \upsilon_1 \cdot (t_2 - t_1)$, $x_2 = 56\,\mathrm{m}$. (Μονάδες 1,5)

Μονάδες 4

Δ1.3. Από τη χρονική στιγμή $t_2 = 8$ s μέχρι τη χρονική στιγμή $t_3 = 14$ s: $\sum F_1 = -4\,\mathrm{N}$, $m \cdot a_3 = -4\,\mathrm{N}$, $a_3 = -4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. (Μονάδα 1) Ισχύουν:

$\upsilon_3 = \upsilon_2 + \alpha_3 \cdot (t_3 - t_2) = -16\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ (Μονάδες 1,5) και

$x_3 = x_2 + \upsilon_2 \cdot (t_3 - t_2) + \frac{1}{2} \cdot a_3 \cdot (t_3 - t_2)^2$, $x_3 = 32\,\mathrm{m}$. (Μονάδες 1,5)

Μονάδες 4

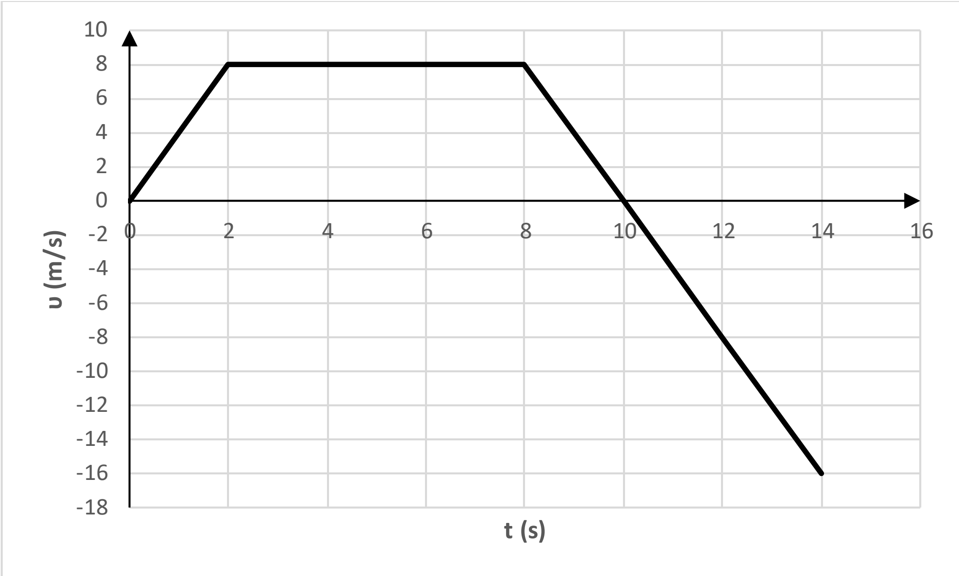
Δ1.4. $\Delta K_{0,3} = K_3 - K_0 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \upsilon_3^2$, $\Delta K_{0,3} = 128\,\mathrm{J}$.

Μονάδες 4

Δ1.5. Από την αρχή διατήρησης της ενέργειας: $\Delta K_{0,3} = W_{\sum \vec{F}_{0,3}}$, $W_{\sum \vec{F}_{0,3}} = 128\,\mathrm{J}$.

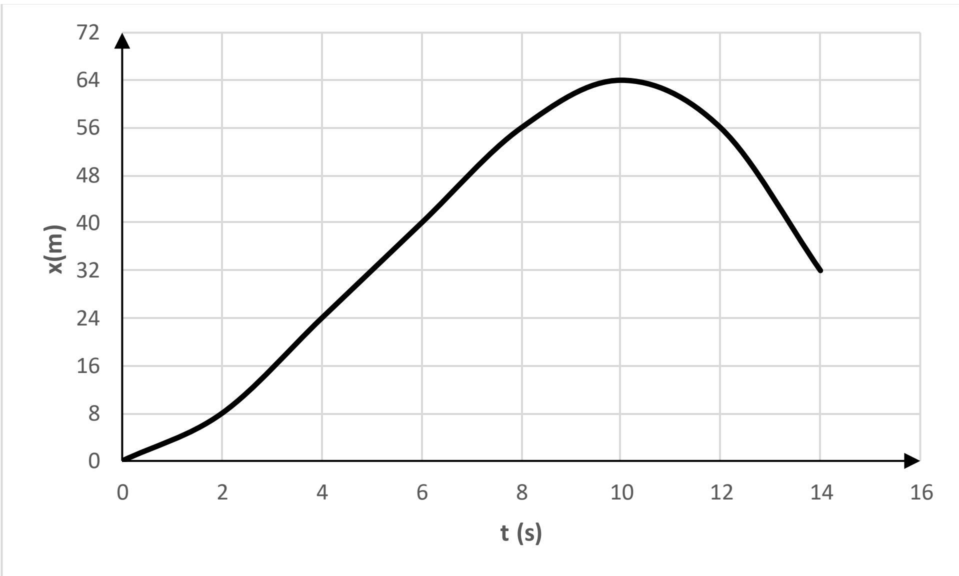
Δ2.

Δ2.1.



Μονάδες 4

Δ2.2. θέσης – χρόνου ($x - t$)



Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Β **Ενδεικτικές απαντήσεις**

Β1.
Α) Σωστό το **iii**

Β) Αιτιολόγηση
Ο χρόνος αντίδρασης του Δημήτρη είναι ίσος με το χρόνο της ελεύθερης πτώσης του χάρακα μέχρι να τον πιάσει:

$$h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \ , \quad t = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 3{,}2}{100 \cdot 10}}\ \text{s} = 0{,}08\ \text{s}$$

Β2.
Α) Σωστή είναι η σχέση **ii**

Β) Αιτιολόγηση
Από το δεδομένο διάγραμμα ταχύτητας-χρόνου, μπορούμε να συμπεράνουμε:

Για το χρονικό διάστημα $0 \rightarrow t_1$: $a_1 = \frac{\Delta \upsilon}{\Delta t} = \frac{\upsilon_1 - 0}{t_1 - 0} = \frac{\upsilon_1}{t_1}$ (1)

Για το χρονικό διάστημα $t_1 \rightarrow 2t_1$: $a_2 = \frac{\Delta \upsilon}{\Delta t} = \frac{1{,}5\upsilon_1 - \upsilon_1}{2t_1 - t_1} = 0{,}5 \cdot \frac{\upsilon_1}{t_1}$ (2)

Από τις σχέσεις (1) και (2), προκύπτει $\alpha_2 = 0{,}5 \cdot \alpha_1$ (3)

Εφαρμόζοντας τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής προκύπτουν:

Για το χρονικό διάστημα $0 \rightarrow t_1$: $\Sigma F = m \cdot a_1$, άρα $a_1 = \frac{F}{m}$ (4)

Για το χρονικό διάστημα $t_1 \rightarrow 2t_1$: $\Sigma F' = m \cdot a_2$, άρα $a_2 = \frac{F - T}{m}$ (5)

Από τις σχέσεις (3), (4) και (5) μπορούμε να καταλήξουμε:

$$\frac{F - T}{m} = 0{,}5 \cdot \frac{F}{m} \quad \text{οπότε} \quad F - T = 0{,}5 \cdot F$$

Τελικά $T = 0{,}5 \cdot F$

ΘΕΜΑ Β   Ενδεικτικές απαντήσεις

<u>Β1</u>

Α) Σωστή απάντηση είναι η **ii.**

Β) <u>Αιτιολόγηση</u>
Ομάδα Α: Η κίνηση του αυτοκινήτου είναι ομαλή αφού παρατηρούμε ότι η μετατόπισή του είναι ίδια σε κάθε 0,2 s.
Η πέμπτη κουκίδα μετά την πρώτη αντιστοιχεί στη στιγμή $t = 5 \cdot 0{,}2\ \mathrm{s} = 1\ \mathrm{s}$ και τότε βλέπουμε από την χαρτοταινία της ομάδας ότι το αυτοκινητάκι έχει μετατοπιστεί κατά $\Delta x = 10\ cm$.
Το μέτρο της ταχύτητάς του υπολογίζεται:

$$\upsilon_A = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{10\ \mathrm{cm}}{1\ \mathrm{s}} = 10\ \frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}$$

Ομάδα Β: Η κίνηση του αμαξιδίου είναι επιταχυνόμενη, αφού παρατηρούμε ότι η μετατόπισή του είναι ολοένα και μεγαλύτερη σε κάθε 0,2 s μετά την έναρξη της κίνησης.
Η δέκατη κουκίδα μετά την πρώτη αντιστοιχεί στη στιγμή $t = 10 \cdot 0{,}2\ s = 2\ s$ και τότε βλέπουμε από την χαρτοταινία της ομάδας ότι το αμαξίδιο έχει μετατοπιστεί κατά $\Delta x = 10\ cm$.
Το μέτρο της μέσης ταχύτητάς του υπολογίζεται:

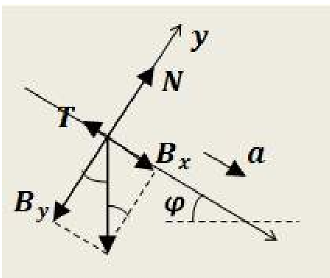
$$\bar{\upsilon}_B = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{10\ \mathrm{cm}}{2\ \mathrm{s}} = 5\ \frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}$$

Έτσι η σχέση του μέτρου της ταχύτητας του αυτοκινήτου της ομάδας Α με το μέτρο της μέσης ταχύτητας της ομάδας Β είναι:

$$\upsilon_A = 2 \cdot \bar{\upsilon}_B$$

<u>Β2</u>
Α)Σωστή είναι η σχέση ii.

Β) <u>Αιτιολόγηση</u>
Για την κίνηση της σκιέρ στη χιονισμένη πλαγιά, ορίζουμε ένα σύστημα ορθογώνιων αξόνων, με x΄x παράλληλα στο κεκλιμένο της δάπεδο και y΄y κάθετα σε αυτό. Αναλύουμε το βάρος της σε δύο συνιστώσες σε αυτούς τους άξονες, για τις οποίες ισχύει:



$$B_x = B \cdot \eta\mu\varphi = 0{,}6 \cdot m \cdot g$$

$$B_y = B \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi = 0{,}8 \cdot m \cdot g$$

Στον y΄y άξονα έχουμε ισορροπία δυνάμεων

$$\Sigma F_y = 0, \text{ ή } \quad N = B_y = 0{,}8 \cdot m \cdot g$$

Για την τριβή που δέχεται η σκιέρ από τη χιονισμένη πλαγιά, ισχύει:

$$T = \mu_1 \cdot N = 0{,}2 \cdot m \cdot g$$

Έτσι εφαρμόζοντας τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για την κίνηση της σκιέρ στον άξονα x΄x, έχουμε

$$\Sigma F_x = m \cdot a \quad \text{και τελικά} \quad a = \frac{\Sigma F_x}{m} = \frac{B_{x-T}}{m} = 0{,}4 \cdot g$$

Για την κίνηση της σκιέρ στο οριζόντιο χιονισμένο δάπεδο, ορίζουμε ένα σύστημα ορθογώνιων αξόνων, με x΄x οριζόντιο και y΄y κατακόρυφο.

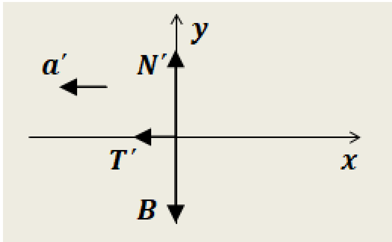
Στον y΄y άξονα έχουμε ισορροπία δυνάμεων

$$\Sigma F_y = 0 \quad , \quad \text{ή} \quad N' = B = m \cdot g$$

Για την τριβή που δέχεται η σκιέρ από το χιονισμένο οριζόντιο δάπεδο, ισχύει:

$$T' = \mu_2 \cdot N' = \mu_2 \cdot m \cdot g$$

Έτσι εφαρμόζοντας τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για την κίνηση της σκιέρ στον άξονα x΄x, έχουμε



$$\Sigma F_x = m \cdot a'$$
$$a' = \frac{\Sigma F_x}{m} = \frac{-T'}{m} = -\mu_2 \cdot g$$

Μας δίνεται όμως ότι το μέτρο της επιτάχυνσης της σκιέρ στη χιονισμένη πλαγιά, είναι ίσο με το μέτρο της επιβράδυνσής της στο χιονισμένο οριζόντιο δάπεδο.

Άρα ισχύει:

$a = |a'|$ οπότε προκύπτει $0{,}4 \cdot g = \mu_2 \cdot g$

Έτσι τελικά $\mu_2 = 0{,}4$

ΘΕΜΑ Β Ενδεικτικές απαντήσεις

Β1

Α) Σωστή απάντηση είναι η **ii.**

Β) Αιτιολόγηση
Ομάδα Α: Η κίνηση του αυτοκινήτου είναι ομαλή αφού παρατηρούμε ότι η μετατόπισή του είναι ίδια σε κάθε 0,2 s.
Η πέμπτη κουκίδα μετά την πρώτη αντιστοιχεί στη στιγμή $t = 5 \cdot 0{,}2\ \mathrm{s} = 1\ \mathrm{s}$ και τότε βλέπουμε από την χαρτοταινία της ομάδας ότι το αυτοκινητάκι έχει μετατοπιστεί κατά $\Delta x = 10\ cm$.
Το μέτρο της ταχύτητάς του υπολογίζεται:

$$\upsilon_A = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{10\ \mathrm{cm}}{1\ \mathrm{s}} = 10\ \frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}$$

Ομάδα Β: Η κίνηση του αμαξιδίου είναι επιταχυνόμενη, αφού παρατηρούμε ότι η μετατόπισή του είναι ολοένα και μεγαλύτερη σε κάθε 0,2 s μετά την έναρξη της κίνησης.
Η δέκατη κουκίδα μετά την πρώτη αντιστοιχεί στη στιγμή $t = 10 \cdot 0{,}2\ s = 2\ s$ και τότε βλέπουμε από την χαρτοταινία της ομάδας ότι το αμαξίδιο έχει μετατοπιστεί κατά $\Delta x = 10\ cm$.
Το μέτρο της μέσης ταχύτητάς του υπολογίζεται:

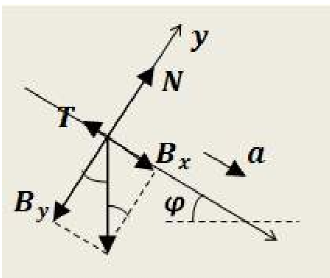
$$\bar{\upsilon}_B = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{10\ \mathrm{cm}}{2\ \mathrm{s}} = 5\ \frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}$$

Έτσι η σχέση του μέτρου της ταχύτητας του αυτοκινήτου της ομάδας Α με το μέτρο της μέσης ταχύτητας της ομάδας Β είναι:

$$\upsilon_A = 2 \cdot \bar{\upsilon}_B$$

Β2
Α)Σωστή είναι η σχέση ii.

Β) Αιτιολόγηση
Για την κίνηση της σκιέρ στη χιονισμένη πλαγιά, ορίζουμε ένα σύστημα ορθογώνιων αξόνων, με x΄x παράλληλα στο κεκλιμένο της δάπεδο και y΄y κάθετα σε αυτό. Αναλύουμε το βάρος της σε δύο συνιστώσες σε αυτούς τους άξονες, για τις οποίες ισχύει:



$$B_x = B \cdot \eta\mu\varphi = 0{,}6 \cdot m \cdot g$$

$$B_y = B \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi = 0{,}8 \cdot m \cdot g$$

Στον y΄y άξονα έχουμε ισορροπία δυνάμεων

$$\Sigma F_y = 0, \text{ ή } \quad N = B_y = 0{,}8 \cdot m \cdot g$$

Για την τριβή που δέχεται η σκιέρ από τη χιονισμένη πλαγιά, ισχύει:

$$T = \mu_1 \cdot N = 0{,}2 \cdot m \cdot g$$

Έτσι εφαρμόζοντας τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για την κίνηση της σκιέρ στον άξονα x΄x, έχουμε

$$\Sigma F_x = m \cdot a \quad \text{και τελικά} \quad a = \frac{\Sigma F_x}{m} = \frac{B_{x-T}}{m} = 0{,}4 \cdot g$$

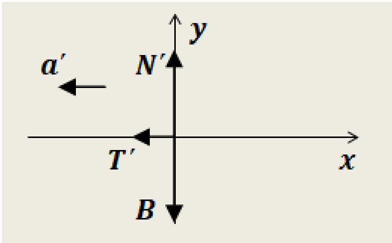
Για την κίνηση της σκιέρ στο οριζόντιο χιονισμένο δάπεδο, ορίζουμε ένα σύστημα ορθογώνιων αξόνων, με x΄x οριζόντιο και y΄y κατακόρυφο.
Στον y΄y άξονα έχουμε ισορροπία δυνάμεων

$$\Sigma F_y = 0 \quad , \quad ή \quad N' = B = m \cdot g$$

Για την τριβή που δέχεται η σκιέρ από το χιονισμένο οριζόντιο δάπεδο, ισχύει:

$$T' = \mu_2 \cdot N' = \mu_2 \cdot m \cdot g$$

Έτσι εφαρμόζοντας τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για την κίνηση της σκιέρ στον άξονα x΄x, έχουμε



$$\Sigma F_x = m \cdot a'$$

$$a' = \frac{\Sigma F_x}{m} = \frac{-T'}{m} = -\mu_2 \cdot g$$

Μας δίνεται όμως ότι το μέτρο της επιτάχυνσης της σκιέρ στη χιονισμένη πλαγιά, είναι ίσο με το μέτρο της επιβράδυνσής της στο χιονισμένο οριζόντιο δάπεδο.
Άρα ισχύει:
$a = |a'|$ οπότε προκύπτει $0{,}4 \cdot g = \mu_2 \cdot g$
Έτσι τελικά $\mu_2 = 0{,}4$

ΘΕΜΑ Β (Ενδεικτικές απαντήσεις)

<u>Β1</u>

Α) Σωστή απάντηση είναι η **iii.**

Β) <u>Αιτιολόγηση</u>

Όπως αναφέρεται στην εκφώνηση, η χρονική διάρκεια διέλευσης μιας σφαίρας από τη φωτοπύλη, αντιστοιχεί σε μετατόπισή της κατά μέτρο ίση με την διάμετρό της. Από την παραδοχή αυτή είναι δυνατό να υπολογίσουμε την ταχύτητα της σφαίρας, η οποία μπορεί να θεωρηθεί στιγμιαία ταχύτητα στη θέση κάθε φωτοπύλης.

Φωτοπύλη Π$_1$: $\upsilon_1 = \frac{\Delta x}{\Delta t_1} = \frac{d}{\Delta t_1}$

Φωτοπύλη Π$_2$: $\upsilon_2 = \frac{\Delta x}{\Delta t_2} = \frac{d}{\Delta t_2}$

Διαιρούμε κατά μέλη: $\frac{\upsilon_2}{\upsilon_1} = \frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} = \frac{0{,}014\ s}{0{,}005\ s} = \frac{14}{5} = 2{,}8$

ή $\upsilon_2 = 2{,}8 \cdot \upsilon_1$

<u>Β2</u>

Α) Η σωστή σχέση είναι η **ii.**

Β) <u>Αιτιολόγηση</u>

Αρχικά ο κύβος Α ισορροπεί ακίνητος πάνω στο λείο οριζόντιο δάπεδο, με την επίδραση των δυνάμεων $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ $\vec{F}_3$ και γι΄ αυτό, για τα μέτρα των τριών αυτών δυνάμεων ισχύει η σχέση :

$$F_1 + F_3 = F_2 \quad \text{ή} \quad F_1 = F_2 - F_3$$

Όταν καταργηθεί η $\vec{F}_1$, ο κύβος Α αρχίζει να κινείται στην κατεύθυνση της δύναμης $\vec{F}_2$, με επιτάχυνση $\vec{a}_1$, μέτρου:

$$a_1 = \frac{\Sigma F}{m} = \frac{F_2 - F_3}{m} = \frac{F_1}{m} \quad , \quad (1)$$

Αρχικά ο κύβος Β, ισορροπεί ακίνητος πάνω στο λείο οριζόντιο δάπεδο. Όταν ασκείται σε αυτόν η δύναμη $\vec{F}_1$, ο κύβος Β αρχίζει να κινείται στην κατεύθυνση της δύναμης αυτής, με επιτάχυνση $\vec{a}_2$, μέτρου:

$$a_2 = \frac{F_1}{2 \cdot m} \quad , \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2), προκύπτει η σχέση:

$$\boldsymbol{a_1 = 2 \cdot a_2}$$

ΘΕΜΑ Β Ενδεικτικές απαντήσεις

B1

A) Σωστή απάντηση είναι η **ii**

B) Αιτιολόγηση

Όταν κρεμάσουν ένα σώμα και αυτό ισορροπεί προκαλώντας μια επιμήκυνση στο ελατήριο, στη θέση ισορροπίας συμβαίνει ισορροπία δυνάμεων.

Δηλαδή σε κάθε τέτοια θέση ισχύει: $\Sigma F = 0$, $F_{\varepsilon\lambda.} = B = m \cdot g$

Η δύναμη του ελατηρίου είναι κατά μέτρο ανάλογη της επιμήκυνσής του $F_{\varepsilon\lambda.} = k \cdot \Delta l$

Άρα στην ισορροπία κάθε σώματος στο άκρο του παραμορφωμένου ελατηρίου ισχύει: $\Delta l = \frac{m \cdot g}{k}$, όπου k η σταθερά του ελατηρίου.

Επειδή για τις μάζες των δύο σωμάτων ισχύει η σχέση $m_2 = 2 \cdot m_1$, για τις επιμηκύνσεις του ελατηρίου θα ισχύει αντίστοιχα η σχέση $\Delta l_2 = 2 \cdot \Delta l_1$.

Οι επιμηκύνσεις του ελατηρίου προσδιορίζονται από τις ενδείξεις του υποδεκάμετρου.

Έτσι αν το φυσικό μήκος του ελατηρίου είναι σε μια ένδειξη x_0 του υποδεκάμετρου ενώ οι δύο θέσεις ισορροπίας των σωμάτων δίνονται ότι αντίστοιχα για το m_2 και το m_1 βρίσκονται στις ενδείξεις $x_2 = 6\ cm$ και $x_1 = 4\ cm$, ισχύει η σχέση:

$$x_2 - x_0 = 2 \cdot (x_1 - x_0)$$
$$6\ cm - x_0 = 2 \cdot (4\ cm - x_0)$$
$$x_0 = 2\ \mathrm{cm}$$

Όταν το ελατήριο βρίσκεται στο φυσικό του μήκος, το κάτω άκρο του είναι στην ένδειξη 2 cm του υποδεκάμετρου. Φυσικά, αυτό δεν είναι το φυσικό μήκος του ελατηρίου, αφού το άνω άκρο του δεν αντιστοιχεί στο 0 της κλίμακας του υποδεκάμετρου.

B2

A) Σωστή απάντηση η **ii**

B) Αιτιολόγηση:

Για τις τιμές της επιτάχυνσης του σώματος, στη χρονική διάρκεια του δεδομένου διαγράμματος ταχύτητας-χρόνου ισχύουν:

$(0, t_1)$: $a_1 = \frac{\Delta \upsilon}{\Delta t} = \frac{2 \cdot \upsilon_0 - \upsilon_0}{t_1 - 0} = \frac{\upsilon_0}{t_1}$

$(t_1, 2t_1)$: $a_2 = \frac{\Delta \upsilon'}{\Delta t'} = 0$

$(2t_1, 4t_1)$: $a_3 = \frac{\Delta \upsilon''}{\Delta t''} = \frac{0 - 2 \cdot \upsilon_0}{4 \cdot t_1 - 2 \cdot t_1} = -\frac{\upsilon_0}{t_1}$

Έτσι εφαρμόζοντας τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής, για τις τιμές της συνισταμένης δύναμης που δέχεται το σώμα, στα παραπάνω χρονικά διαστήματα, προκύπτουν:

$(0, t_1)$: $\Sigma F = m \cdot a_1 = \frac{m \cdot \upsilon_0}{t_1} = F$

$(t_1, 2t_1)$: $\Sigma F = m \cdot a_2 = 0$

$(2t_1, 4t_1)$: $\Sigma F = m \cdot a_3 = -\frac{m \cdot \upsilon_0}{t_1} = -F$

Άρα το σωστό διάγραμμα είναι το β.

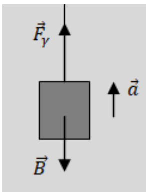
ΘΕΜΑΒ **Ενδεικτικές απαντήσεις**

<u>Β1</u>

Α) Σωστή απάντηση είναι η **ii**

Β) <u>Αιτιολόγηση</u>

Το κιβώτιο ανεβαίνει με την επίδραση της κατακόρυφης προς τα πάνω δύναμης που δέχεται από τον γερανό και της κατακόρυφης προς τα κάτω δύναμης από την έλξη της Γης, δηλαδή του βάρους του. Εφαρμόζουμε τον Θεμελιώδη Νόμο της Μηχανικής:



$$\Sigma F = m \cdot a\,, \quad F_\gamma - B = m \cdot a\,, \quad F_\gamma = m \cdot g + m \cdot \frac{g}{8}$$

Τελικά $$F_\gamma = \frac{9}{8} \cdot m \cdot g$$

<u>Β2</u>

Α) Σωστή απάντηση είναι η **ii**

Β) <u>Αιτιολόγηση</u>

Επειδή η κίνηση του οχήματος είναι ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη, η συνισταμένη δύναμη $\vec{F}$ είναι σταθερή. Εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργεια:

$$\Delta K = W_F = F \cdot x$$

$$F = \frac{\Delta K}{x} = \frac{64\,J}{8\,m} = 8\ \mathrm{N}$$

Η επιτάχυνση του οχήματος υπολογίζεται εφαρμόζοντας τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής:

$$a = \frac{F}{m} = 4\ \frac{m}{s^2}$$

Για την μετατόπιση του οχήματος στην ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνησή του ισχύει:

$$x = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot x}{a}} = 2\ \mathrm{s}$$

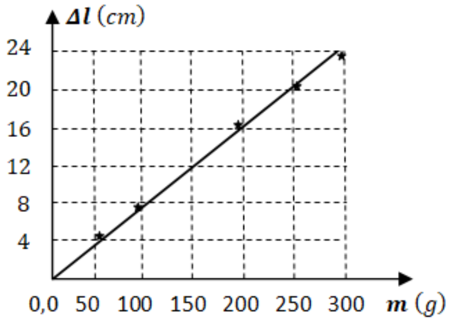
ΘΕΜΑ Β   Ενδεικτικές απαντήσεις

B1

Α)

Μάζα (g)	**50**	100	200	**250**	300
Επιμήκυνση ελατηρίου (cm)	4	8	**16**	20	**24**

Β)



B2

Α) Σωστή απάντηση είναι η **iii**

Β) Αιτιολόγηση

Επειδή στην κίνηση του βαγονιού με τα παιδιά, η μόνη δύναμη που παράγει έργο είναι το βάρος τους, ισχύει η αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας.
Ορίζοντας ως επίπεδο αναφοράς για την βαρυτική δυναμική ενέργεια το δάπεδο του λούνα-πάρκ ($U = 0$), έχουμε:

$$E^{A}_{\mu\eta\chi} = E^{B}_{\mu\eta\chi} = E^{\Gamma}_{\mu\eta\chi}$$

$$U_A = U_B + K_B = U_\Gamma + K_\Gamma$$

$m \cdot g \cdot h_A = m \cdot g \cdot h_B + K_B$, οπότε $K_B = m \cdot g \cdot (h_A - h_B) = \frac{m \cdot g \cdot h_A}{4}$

$m \cdot g \cdot h_A = m \cdot g \cdot h_\Gamma + K_\Gamma$, οπότε $K_\Gamma = m \cdot g \cdot (h_A - h_\Gamma) = \frac{3 \cdot m \cdot g \cdot h_A}{4}$

Διαιρούμε κατά μέλη τις δύο προηγούμενες εξισώσεις:

$$\frac{K_\Gamma}{K_B} = \frac{\frac{1}{2} \cdot m \cdot \upsilon_\Gamma^2}{\frac{1}{2} \cdot m \cdot \upsilon_B^2} = 3$$

Από τη σχέση αυτή, για τα μέτρα των ταχυτήτων προκύπτει:

$$\upsilon_\Gamma = \sqrt{3} \cdot \upsilon_B$$

ΘΕΜΑ Β **Ενδεικτικές απαντήσεις**

Β1.

Α) Σωστή απάντηση είναι η **ii**

Β) Αιτιολόγηση

Πρέπει αρχικά να κάνουμε μετατροπές μονάδων στο S.I

Η ταχύτητα του αεροπλάνου είναι $\upsilon = 720\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 720 \cdot \frac{1000}{3600}\ \mathrm{s} = 200\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

Η ισχύς του κινητήριου-προωθητικού μηχανισμού είναι $P = 40\ \mathrm{MW} = 40 \cdot 10^6\ \mathrm{W}$

Αν $\vec{F}_{\pi\rho.}$ συμβολίσουμε την προωστική δύναμη η οποία ωθεί το αεροπλάνο, για την προωθητική ισχύ του έχουμε:

$P = F_{\pi\rho.} \cdot \upsilon$, από την οποία προκύπτει $F_{\pi\rho.} = \frac{P}{\upsilon} = 2 \cdot 10^5\ \mathrm{N}$

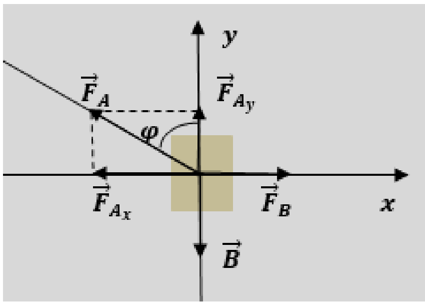
Επειδή το αεροπλάνο κινείται με σταθερή ταχύτητα, από τον πρώτο νόμο του Newton, πρέπει να υπάρχει ισορροπία δυνάμεων. Έτσι αν από τον αέρα δέχεται αντίρροπη δύναμη αντίστασης $\vec{F}_{\alpha\varepsilon\rho.}$, ισχύει:

$\Sigma F = F_{\pi\rho.} - F_{\alpha\varepsilon\rho.} = 0$ και τελικά για το μέτρο της δύναμης αντίστασης του αέρα στο αεροπλάνο: $F_{\alpha\varepsilon\rho} = F_{\pi\rho.} = 2 \cdot 10^5\ \mathrm{N}$

Β2.

Α) Σωστή απάντηση η **ii**

Β) Αιτιολόγηση



Δημιουργούμε ένα σύστημα ορθογωνίων αξόνων, οριζόντιο x΄x και κατακόρυφο y΄y. Αναλύουμε τη δύναμη $\vec{F}_A$ σε δύο συνιστώσες στους άξονες αυτούς.
Αν F_A το μέτρο της δύναμης αυτής, τα μέτρα των δύο συνιστωσών της είναι:

$$F_{A_x} = F_A \cdot \eta\mu\varphi = 0{,}8 \cdot F_A$$

Και $$F_{A_y} = F_A \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi = 0{,}6 \cdot F_A$$

Ισορροπία στον y΄y: $\Sigma F_y = F_{A_y} - B = 0$, οπότε $F_{A_y} = B = 180\ \mathrm{N}$

ή $0{,}6 \cdot F_A = 180\ N$ και τελικά $F_A = \frac{180\ N}{0{,}6} = 300\ \mathrm{N}$

Ισορροπία στον x΄x : $\Sigma F_x = F_B - F_{A_x} = 0$,

Οπότε $F_B = F_{A_x} = 0{,}8 \cdot F_A = 0{,}8 \cdot 300\ N = 240\ \mathrm{N}$

ΘΕΜΑ Β **Ενδεικτικές απαντήσεις**

Β1

Α) Σωστή απάντηση η **i**

Β) Αιτιολόγηση
Μετά το κόψιμο του νήματος, τα δύο σώματα κινούνται και η μόνη δύναμη που παράγει έργο στην κίνηση κάθε σώματος είναι το βάρος του. Γι αυτό ισχύει για κάθε σώμα η αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας. Μπορούμε να θεωρήσουμε ως επίπεδο αναφοράς για τη βαρυτική δυναμική ενέργεια το οριζόντιο δάπεδο στο οποίο θα καταλήξουν τα σώματα.
Έτσι για κάθε σώμα ισχύει:

$E_{μηχ,αρχ} = E_{μηχ,τελ}$ ή $U_{αρχ} = K_{τελ}$

$m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot m \cdot υ^2$, τελικά $υ = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$, ανεξάρτητα από τη μάζα του σώματος.

Άρα $\boldsymbol{υ_1 = υ_2}$

Β2

Α) Σωστή απάντηση η **ii**

Β) Αιτιολόγηση
Η μόνη οριζόντια δύναμη που κινεί το σύνολο των δύο μαζών, του διασώστη και του σκύλου, είναι εκείνη του σχοινιού που ασκείται στη ζώνη του διασώστη. Για το σύστημα των δύο αυτών σωμάτων ισχύει

$$F = (m_δ + m_σ) \cdot a$$

Άρα
$$a = \frac{F}{m_δ + m_σ} = \frac{F}{8 \cdot m_σ}$$

Η μόνη οριζόντια δύναμη που δέχεται ο σκύλος είναι από τον διασώστη, η οποία τον αναγκάζει να κινείται με την κοινή τους επιτάχυνση. Άρα ισχύει:

$$F_σ = m_σ \cdot a = m_σ \cdot \frac{F}{8 \cdot m_σ} = \frac{F}{8} = \mathbf{10\ N}$$

ΘΕΜΑ Β

<u>Β1</u>

Α) Σωστή απάντηση είναι η **ii**

Β) <u>Αιτιολόγηση</u>
Μπορούμε να υπολογίσουμε το μέτρο της μετατόπισης του οχήματος, από τη στιγμή που αντιλαμβάνεται το εμπόδιο μέχρι να σταματήσει, ως εμβαδόν του σχήματος που δημιουργείται στο διάγραμμα, από τη γραφική παράσταση ταχύτητας-χρόνου και από τον άξονα χρόνου, από τη στιγμή $t_0 = 0$, μέχρι τη στιγμή $t = 4{,}5\ \mathrm{s}$ που ακινητοποιείται. Είναι εμβαδόν τραπεζίου. Άρα:

$$\Delta x = \frac{(0{,}5 + 4{,}5) \cdot 20}{2}\ \mathrm{m} = 50\ \mathrm{m}$$

Άρα όταν το αυτοκίνητο σταματά, απέχει από το εμπόδιο:

$$d = 60\ \mathrm{m} - 50\ \mathrm{m} = \mathbf{10\ m}$$

<u>Β2</u>
Α)

Θέση	$\boldsymbol{U}$ (J)	$\boldsymbol{K}$ (J)	$\boldsymbol{E_{MHX}}$ (J)
Α	**100**	**0**	**100**
Β	80	20	**100**
Γ	**60**	40	**100**
Δ	0	**100**	**100**

Β) Επειδή το σφαιρίδιο κινείται μόνο με την επίδραση του βάρους του, δηλαδή εκτελεί ελεύθερη πτώση, ισχύει η αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας.

Από τη θέση Β βρίσκουμε $E_{MHX}^{B} = U_B + K_B = 100\ \mathrm{J}$

Άρα σε κάθε θέση θα είναι $E_{MHX}^{A} = E_{MHX}^{B} = E_{MHX}^{\Gamma} = E_{MHX}^{\Delta} = 100\ \mathrm{J}$
όπως φαίνεται στην τρίτη στήλη του πίνακα, μετά την συμπλήρωσή του.

Στη θέση Α το σφαιρίδιο «αφήνεται», δηλαδή δεν έχει ταχύτητα, άρα $K_A = 0$,
οπότε $U_A = E_{MHX}^{A} = 100\ \mathrm{J}$

Στη θέση Δ δίνεται μηδέν η δυναμική ενέργεια, που σημαίνει ότι έχει θεωρηθεί ως επίπεδο αναφοράς για τη δυναμική βαρυτική ενέργεια, το οριζόντιο έδαφος, στο οποίο καταλήγει πέφτοντας το σφαιρίδιο.

Οπότε $K_\Delta = E_{MHX}^{\Delta} = 100\ \mathrm{J}$

ΘΕΜΑ Β Ενδεικτικές απαντήσεις

<u>Β1</u>

Α) Σωστή απάντηση είναι η **ii**
Β) <u>Αιτιολόγηση</u>
Μπορούμε να υπολογίσουμε τα μέτρα των μετατοπίσεων των δύο σωμάτων, από τα εμβαδά των σχημάτων τα οποία δημιουργούνται από την αντίστοιχη γραφική παράσταση ταχύτητας – χρόνου και τον άξονα χρόνου, από τη στιγμή $t_0 = 0$, μέχρι τη στιγμή $t_1 = 4\ \mathrm{s}$.

$$\Delta x_A = 6 \cdot 4\ \mathrm{m} = 24\ \mathrm{m}$$

$$\Delta x_B = \frac{6 \cdot 4}{2}\ \mathrm{m} = 12\ \mathrm{m}$$

Επειδή τα δύο σώματα ήταν δίπλα-δίπλα τη στιγμή $t_0 = 0$, προκύπτει ότι τη στιγμή $t_1 = 4\ \mathrm{s}$, δε θα είναι και πάλι δίπλα-δίπλα, αλλά θα προπορεύεται το Α του Β κατά:

$$d = \Delta x_A - \Delta x_B = \mathbf{12\ m}$$

<u>Β2</u>

Α) Σωστή απάντηση είναι η **i**
Β) <u>Αιτιολόγηση</u>
Μπορούμε να υπολογίσουμε το μέτρο της μετατόπισης του μαρμάρινου όγκου, ως εμβαδόν του σχήματος που δημιουργείται από τη γραφική παράσταση ταχύτητας-χρόνου και τον άξονα του χρόνου, για τη χρονική διάρκεια της κίνησης (εμβαδόν τραπεζίου):

$$\Delta x = \frac{[(2 \cdot t_1 - t_1) + 3 \cdot t_1] \cdot \upsilon_1}{2} = 2 \cdot \upsilon_1 \cdot t_1$$

Το έργο της δύναμης του ανθρώπου, σε αυτή την μετατόπιση του σώματος είναι:

$$W_F = F \cdot \Delta x = 2 \cdot F \cdot \upsilon_1 \cdot t_1$$

Η μέση ισχύς της δύναμης του ανθρώπου σε αυτή την προσπάθειά του είναι:

$$P_\mu = \frac{W_F}{\Delta t} = \frac{2 \cdot F \cdot \upsilon_1 \cdot t_1}{3 \cdot t_1} = \frac{2}{3} \cdot F \cdot \upsilon_1 \qquad (1)$$

Η μέγιστη ισχύς της δύναμης του ανθρώπου αποδίδεται τη στιγμή που το σώμα κινείται με την μέγιστη ταχύτητα:

$$P_{max} = F \cdot \upsilon_1 \qquad (2)$$

Διαιρούμε κατά μέλη τις σχέσεις (2) και (1):

$$\frac{P_{max}}{P_\mu} = \frac{F \cdot \upsilon_1}{\frac{2}{3} \cdot F \cdot \upsilon_1} = \frac{3}{2}$$

Τελικά $\boldsymbol{P_{max} = 1,5 \cdot P_\mu}$

ΘΕΜΑ Α

Α1. γ.

Α2. β.

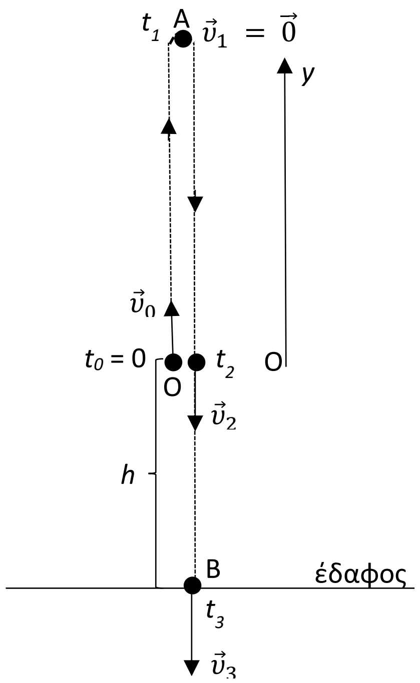
Α3. δ.

Α4. γ.

Α5. 1ε, 2α, 3β, 4γ, 5δ

Μονάδες 25

ΘΕΜΑ Γ



Γ1. Η μόνη δύναμη που ασκείται στο βλήμα, καθ' όλη τη διάρκεια της κίνησής του είναι το γήινο βάρος του. Έτσι, από τον Θεμελιώδη Νόμο της Μηχανικής:

$\sum \vec{F}_y = m \cdot \vec{a}$ ή, αν χρησιμοποιηθούν αλγεβρικές τιμές, με θετική φορά την προς τα άνω:

$-w = m \cdot a,\ m \cdot (-g) = m \cdot a,\ a = -g,\ a = -10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. (Μονάδα 1)

Για τις αλγεβρικές τιμές των ταχυτήτων ισχύει:

$\upsilon = \upsilon_0 + \alpha \cdot t$

Η ταχύτητά του, έστω υ_1 την στιγμή t_1 θα είναι 0 Έχουμε λοιπόν:

$\upsilon_1 = \upsilon_0 + \alpha \cdot t_1,\ t_1 = \frac{\upsilon_1 - \upsilon_0}{\alpha},\ t_1 = 1$ s. (Μονάδες 2)

Για τη θέση ισχύει:

$y = y_0 + \upsilon_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2,\ y_1 = \upsilon_0 \cdot t_1 + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_1^2,\ y_1 = 5$ m. (Μονάδες 2)

Για το μέγιστο ύψος από το έδαφος ισχύει: $h_{max} = h + y_1,\ h_{max} = 5{,}5$ m (Μονάδα 1)

Μονάδες 6

Γ2. Ισχύει: $y = y_0 + \upsilon_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2,\ y_2 = \upsilon_0 \cdot t_2 + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_2^2,$

$0 = 10 \cdot t_2 - 5 \cdot t_2^2$ (S.I.), $5 \cdot t_2 \cdot (2 - t_2) = 0$ (S.I.), $t_2 = 2$ s. (Μονάδες 3)

Ισχύει ακόμη: $\upsilon = \upsilon_0 + \alpha \cdot t$, $\upsilon_2 = \upsilon_0 + \alpha \cdot t_2$, $\upsilon_2 = -10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. (Μονάδες 3)
Συνεπώς: $\vec{\upsilon}_2 = -\vec{\upsilon}_0$.

Μονάδες 6

Γ3.

Γ3.1. Ισχύει: $y = y_0 + \upsilon_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2$, $y_3 = \upsilon_0 \cdot t_3 + \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t_3^2$,

$-h = \upsilon_0 \cdot t_3 + \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t_3^2$, $-2{,}2 = 10 \cdot t_3 - 5 \cdot t_3^2$ (S.I.),

$t_3^2 - 2 \cdot t_3 - 0{,}44 = 0$ (S.I.), $t_3 = 2{,}2$ s. (Μονάδες 3)

Η αρνητική ρίζα της προηγούμενης εξίσωσης απορρίπτεται, αφού αναφέρεται σε χρονική στιγμή πριν την εκτόξευση του βλήματος.

Ισχύει ακόμη: $\upsilon = \upsilon_0 + \alpha \cdot t$, $\upsilon_3 = \upsilon_0 + \alpha \cdot t_3$, $\upsilon_3 = -12\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. (Μονάδες 3)

Μονάδες 6

Γ3.2. Ισχύει: $\Delta\upsilon = \upsilon_3 - \upsilon_0 = -12\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - 10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = -22\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, με το αρνητικό πρόσημο να δηλώνει ότι το διάνυσμα $\Delta\vec{\upsilon}$ έχει κατεύθυνση κατακόρυφη, προς τα κάτω.

Μονάδες 7

Άλλη πρόταση βαθμολόγησης: Τα μέτρα των ζητούμενων ταχυτήτων θα μπορούσαν να υπολογιστούν και ενεργειακά. Η μηχανική ενέργεια του βλήματος, καθ' όλη τη διάρκεια της κίνησής του, διατηρείται σταθερή, επειδή ασκείται σ' αυτό μόνο το γήινο βάρος του. Για τις αλγεβρικές τιμές των ζητούμενων ταχυτήτων αρκεί σχολιασμός.

13269

ΘΕΜΑ Β

Β1.

Α. α)

Μονάδες 4

Β. Η κοπέλα δέχεται το βάρος της $\vec{w}_1$ και δύναμη από το κινητό τμήμα δαπέδου $\vec{N}_1$. Η κοπέλα ισορροπεί, οπότε, σύμφωνα με τον 1^{ο} νόμο του Newton, η συνισταμένη των δυνάμεων που της ασκούνται θα πρέπει να είναι μηδενική. Για να συμβαίνει αυτό θα πρέπει το μέτρο του βάρους της w_1 και το μέτρο N_1 της δύναμης $\vec{N}_1$ να είναι ίσα: $w_1 = N_1$ [1]. Το κινητό τμήμα του δαπέδου δέχεται το βάρος του $\vec{w}_2$, δύναμη $\vec{N}_2$ από την κοπέλα (είναι η αντίδραση της $\vec{N}_1$) και την τάση του νήματος $\vec{T}$. Οι δυνάμεις $\vec{N}_1$ και $\vec{N}_2$ είναι δυνάμεις δράσης – αντίδρασης, οπότε, σύμφωνα με τον 3^{ο} νόμο του Newton, τα μέτρα τους, N_1 και N_2 αντίστοιχα, είναι ίσα: $N_1 = N_2$ [2]. Το κινητό τμήμα του δαπέδου ισορροπεί, οπότε, σύμφωνα με τον 1^{ο} νόμο του Newton, η συνισταμένη των δυνάμεων που του ασκούνται θα πρέπει να είναι μηδενική. Για να συμβαίνει αυτό θα πρέπει το μέτρο του βάρους του w_2, το μέτρο N_2 της δύναμης $\vec{N}_2$ και το μέτρο T της τάσης του νήματος $\vec{T}$ να ικανοποιούν τη σχέση: $w_2 + N_2 = T$ [3]. Από τις σχέσεις [1], [2] και [3] προκύπτει: $T = w_1 + w_2 = 700$ N.

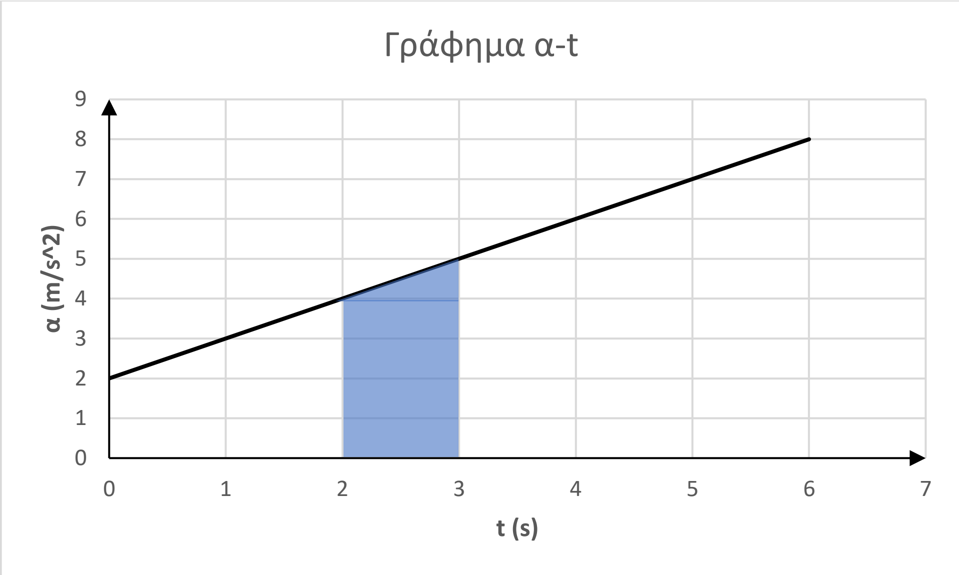
Μονάδες 8

Β2.

Α. β)

Μονάδες 4

Β. Σε κάθε διάγραμμα α-t, το εμβαδόν εκφράζει την απόλυτη τιμή, της μεταβολής, της αλγεβρικής τιμής της ταχύτητας του κινητού.



Στο διάγραμμα, το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τη γραφική παράσταση, τον άξονα του χρόνου και τις ευθείες $t_1 = 2$ s και $t_2 = 3$ s είναι: $\frac{4+5}{2} \cdot 1\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 4{,}5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Οπότε: $|\Delta\upsilon| = 4{,}5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ (μονάδες 3). Ισχύει: $\upsilon_1 > 0$ (μονάδες 2) και από τη χρονική στιγμή $t_1 = 2$ s μέχρι τη χρονική στιγμή $t_2 = 3$ s $\alpha > 0$ (μονάδες 2), οπότε η κίνηση είναι επιταχυνόμενη και η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας από τη χρονική στιγμή $t_1 = 2$ s μέχρι τη χρονική στιγμή $t_2 = 3$ s διαρκώς θετική.

Έτσι: $\Delta\upsilon = 4{,}5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, $\upsilon_2 - \upsilon_1 = 4{,}5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, $\upsilon_2 = 14{,}5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ (μονάδες 2)

Μονάδες 9

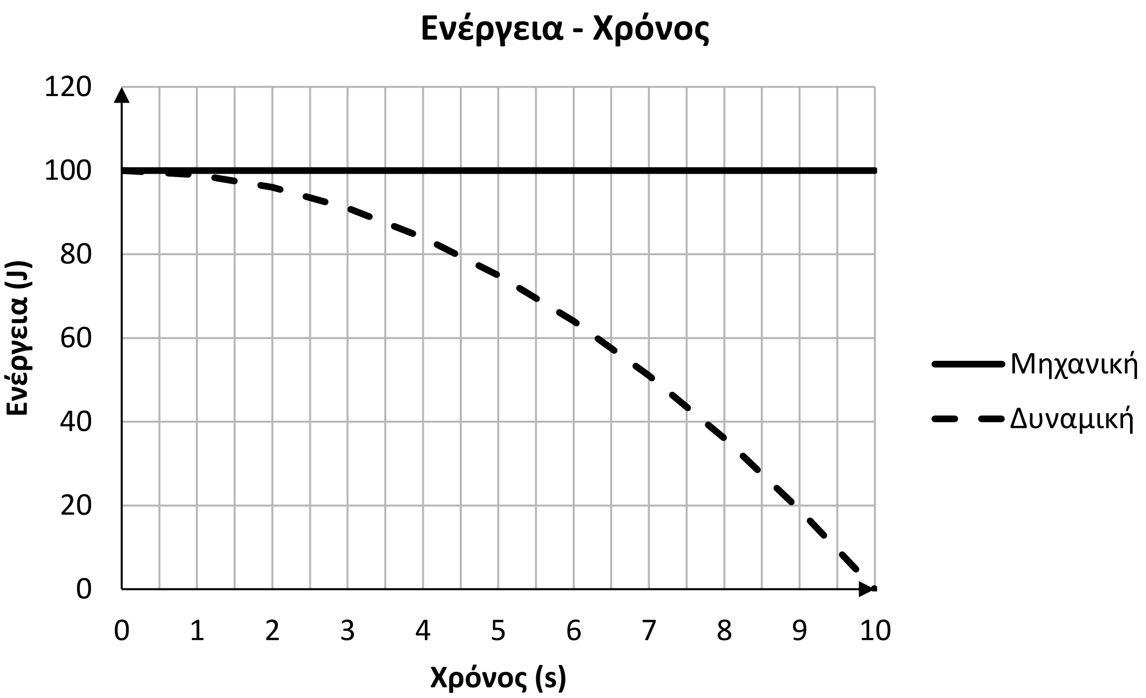
ΘΕΜΑ Β

Β1.

Α. β)

Μονάδες 4

Β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



Από το διάγραμμα προκύπτει ότι το σημειακό αντικείμενο χρειάζεται χρονικό διάστημα Δt = 10 s για να προσεδαφιστεί. Έτσι, το σημειακό αντικείμενο ελευθερώνεται από ύψος: $h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot (\Delta t)^2 = 500 \text{ m}$.

Μονάδες 8

Β2.

Α. β)

Μονάδες 4

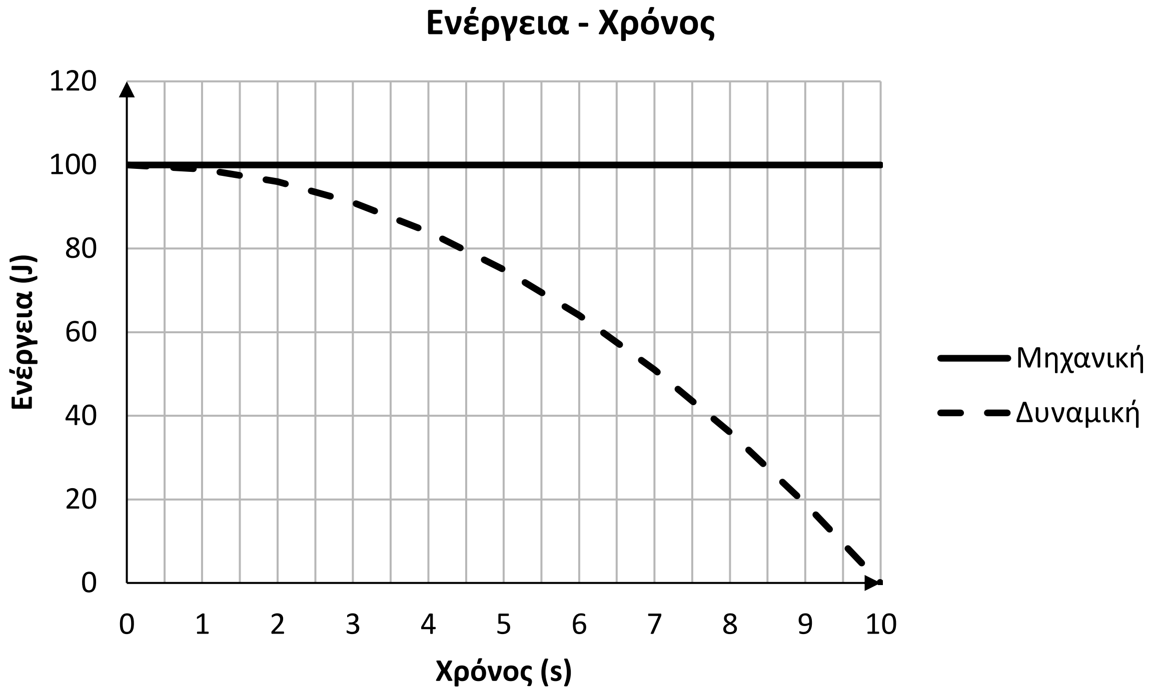
Β.

Το ελάχιστο χρονικό διάστημα $t_{ολ}$ που απαιτείται για την ακινητοποίηση ενός αυτοκινήτου κινούμενου με ταχύτητα υ_0 είναι: $t_{ολ} = \frac{\upsilon_0}{\alpha}$, όπου α το μέτρο της μέγιστης επιβράδυνσης, που μπορεί να αναπτύξει το σύστημα πέδησης. Για το αυτοκίνητο Α ισχύει: $2 \cdot t_B = \frac{\upsilon_0}{\alpha_A}$ [1], ενώ για το αυτοκίνητο Β ισχύει: $t_B = \frac{\upsilon_0}{\alpha_B}$ [2]. Διαιρώντας κατά μέλη τις εξισώσεις [1] και [2] προκύπτει: $2 = \frac{\alpha_B}{\alpha_A}$, $\alpha_B = 2 \cdot \alpha_A$. Από τον Θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής: $F_B = m \cdot a_B = m \cdot 2 \cdot a_A = 2 \cdot F_A$.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Β

Β1.



Α. γ)

Μονάδες 4

Β. Από το διάγραμμα προκύπτει ότι το σημειακό αντικείμενο χρειάζεται χρονικό διάστημα *Δt* = 10 s για να προσεδαφιστεί. Έτσι, το σημειακό αντικείμενο ελευθερώνεται από ύψος: $h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot (\Delta t)^2 = 500\,\mathrm{m}$. Η δυναμική ενέργεια του σημειακού αντικειμένου, τη χρονική στιγμή που ελευθερώνεται, όπως προκύπτει από το διάγραμμα, είναι: $U_0 = 100\,\mathrm{J}$. Ισχύει: $U_0 = m \cdot g \cdot h$, $m = \frac{U_0}{g \cdot h}$, $m = 0{,}02\,\mathrm{Kg}$.

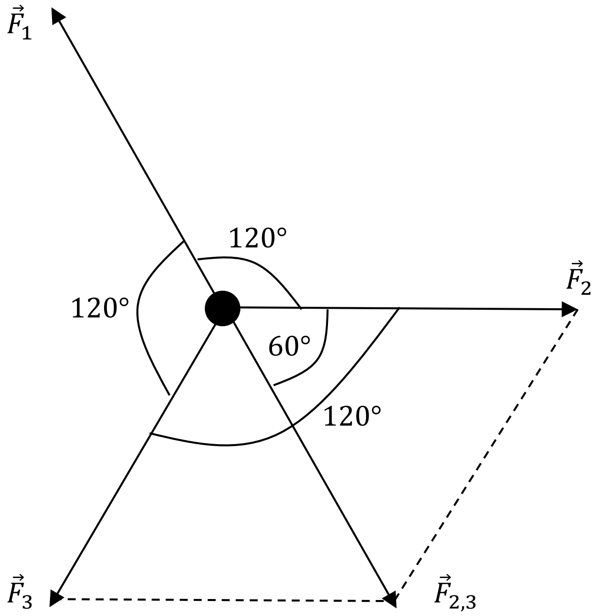
Μονάδες 8

Β2.

Α. α)

Μονάδες 4

Β.



Για τα μέτρα *F1*, *F2* και *F3* των δυνάμεων $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ και $\vec{F}_3$ αντίστοιχα, ισχύει: $F_1 = F_2 = F_3 = F$. Η συνισταμένη $\vec{F}_{2,3}$ των δυνάμεων $\vec{F}_2$ και $\vec{F}_3$ έχει μέτρο:

$$F_{2,3} = \sqrt{F_2^2 + F_3^2 + 2 \cdot F_2 \cdot F_3 \cdot \sigma\upsilon\nu(120°)} = \sqrt{F^2 + F^2 + 2 \cdot F \cdot F \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = F$$

ενώ η κατεύθυνσή της είναι αντίθετη από την κατεύθυνση της δύναμης $\vec{F}_1$, επειδή το παραλληλόγραμμο των δυνάμεων $\vec{F}_2$ και $\vec{F}_3$ είναι ρόμβος (έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες: $F_2 = F_3$) και οι διαγώνιοι του ρόμβου διχοτομούν τις γωνίες του. Έτσι, η συνισταμένη των δυνάμεων $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ και $\vec{F}_3$ είναι μηδέν.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Β

Β1.

Α.

t(s)	U(J)	K(J)
0	100	0
4	84	16
6	64	36
10	0	100

Μονάδες 4

Β. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$, η κινητική ενέργεια του σημειακού αντικειμένου είναι μηδενική, αφού αφήνεται ελεύθερο. Η μηχανική ενέργεια του σημειακού αντικειμένου τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ είναι: $E = K + U = 100$ J και διατηρείται σταθερή, σημειακό αντικείμενο δέχεται μόνο την επίδραση του βάρους του.

Τη χρονική στιγμή $t_1 = 4$ s, η κινητική ενέργεια του σημειακού αντικειμένου υπολογίζεται ως εξής: $E = K + U$, $K = E - U = 16$ J.

Τη χρονική στιγμή $t_2 = 6$ s, η δυναμική ενέργεια του σημειακού αντικειμένου υπολογίζεται ως εξής: $E = K + U$, $U = E - K = 64$ J.

Τη χρονική στιγμή $t_3 = 10$ s, η δυναμική ενέργεια του σημειακού αντικειμένου υπολογίζεται ως εξής: $E = K + U$, $U = E - K = 0$.

Μονάδες 8

Β2.

Α. α)

Μονάδες 4

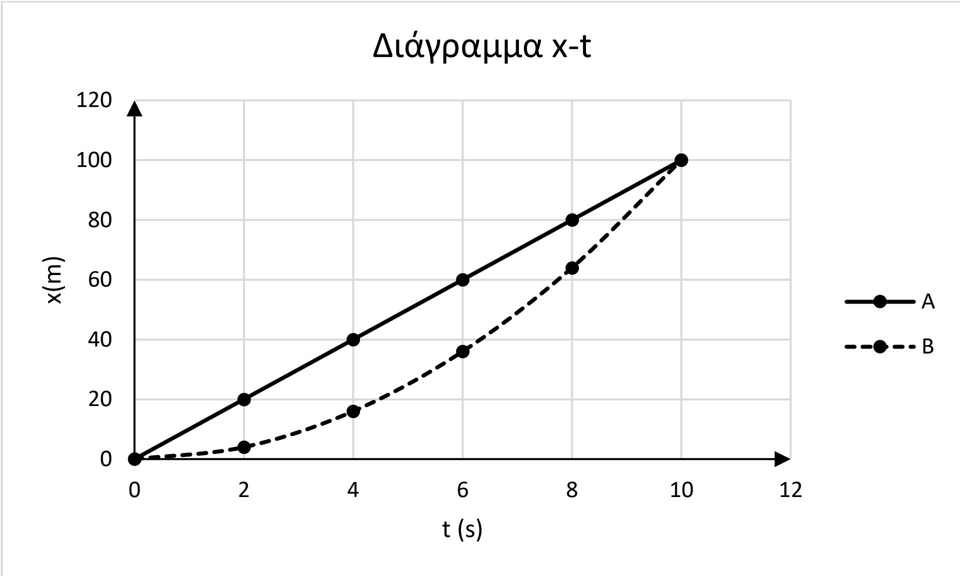
Β. Από τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής: $\sum F = m \cdot a$, $\sum F = m \cdot \frac{\Delta\upsilon}{\Delta t}$, $\Delta\upsilon = \frac{\sum F}{m} \cdot \Delta t$

Μονάδες 9

B1.

A. α)

B.



Όπως φαίνεται από το διάγραμμα, το κινητό Α εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση, με σταθερή ταχύτητα μέτρου: $\upsilon_A = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{100\ \mathrm{m}}{10\ \mathrm{s}} = 10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Η ταχύτητα του κινητού Β, τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$, έχει αλγεβρική τιμή: $\upsilon_{B,0} = \frac{\upsilon_A}{2} = 5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Το κινητό Β εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση και συνεπώς:

$$\Delta x = \upsilon_{B,0} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a_B \cdot t^2\ ,\ a_B = \frac{\Delta x - \upsilon_{B,0} \cdot t}{\frac{1}{2} \cdot t^2} = 1\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

B2.

A. α)

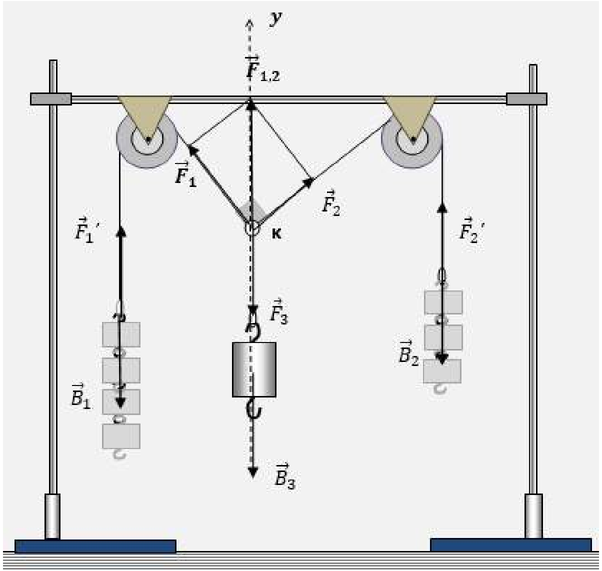
Μονάδες 4

B. Ισχύουν: $\left\{\begin{matrix} K_A = \frac{1}{2} \cdot m_A \cdot \upsilon_A^2 \\ K_B = \frac{1}{2} \cdot m_B \cdot \upsilon_B^2 \end{matrix}\right\}$, $\left\{\begin{matrix} K_A = \frac{1}{2} \cdot m_A \cdot 4 \cdot \upsilon_B^2 \\ K_B = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot m_A \cdot \upsilon_B^2 \end{matrix}\right\}$, $K_A = K_B$.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Β Ενδεικτικές απαντήσεις

Β1.
Α) Σωστή η απάντηση **γ)**
Β) Αιτιολόγηση



Τα επτά όμοια βαρίδια έχουν ίσες μάζες $m = 100\ \mathrm{g}$ το καθένα και βάρος μέτρου $\beta = m \cdot g$.

Στο νήμα (1) είναι δεμένα τέσσερα από αυτά και έτσι το νήμα (1) μεταφέρει στον κρίκο κ δύναμη $\vec{F}_1$, μέτρου

$$F_1 = B_1 = 4 \cdot \beta = 4 \cdot m \cdot g$$

Στο νήμα (2) είναι δεμένα τρία από αυτά και έτσι το νήμα (2) μεταφέρει στον κρίκο κ δύναμη $\vec{F}_2$, μέτρου

$$F_2 = B_2 = 3 \cdot \beta = 3 \cdot m \cdot g$$

Το νήμα (3) μεταφέρει στον κρίκο κ κατακόρυφη δύναμη $\vec{F}_3$ ίση με το βάρος $\vec{B}_3$ που είναι κρεμασμένο από το νήμα αυτό.
Για το μέτρο της δύναμης $\vec{F}_3$ δηλαδή, ισχύει:

$$F_3 = B_3 = M \cdot g$$

Τα νήματα (1) και (2), είναι μεταξύ τους κάθετα, με αποτέλεσμα οι δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ ασκούνται στον κρίκο κ κάθετα μεταξύ τους, με συνισταμένη $\vec{F}_{1,2}$, μέτρου:

$$F_{1,2} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = \sqrt{(4 \cdot \beta)^2 + (3 \cdot \beta)^2} = 5 \cdot \beta = 5 \cdot m \cdot g$$

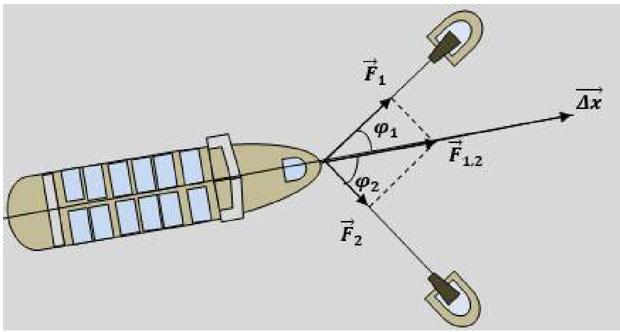
Η δύναμη $\vec{F}_{1,2}$, πρέπει να είναι κατακόρυφη προς τα πάνω και για να ισορροπεί ο κρίκος κ να εξουδετερώνει τη δύναμη $\vec{F}_3$.

Δηλαδή πρέπει $F_{1,2} = F_3 = M \cdot g$

Τελικά $M \cdot g = 5 \cdot m \cdot g$

Οπότε $M = 5 \cdot m = \mathbf{500\ g}$

Β2.
Α) Σωστή η απάντηση **α)**
Β) Αιτιολόγηση



Η κατεύθυνση κίνησης του πλοίου, είναι αυτή της συνισταμένης των δυνάμεων που του ασκούν τα δύο ρυμουλκά.
Στη χρονική διάρκεια που περιγράφεται από τα δεδομένα, οι δύο αυτές δυνάμεις είναι σταθερές, είναι συνεχώς κάθετη η μια στην άλλη και η κατεύθυνση κίνησης του πλοίου σταθερή.
Για τα έργα των δύο δυνάμεων, κατά την μετατόπιση του πλοίου σε αυτή τη χρονική διάρκεια ισχύουν:

$$W_{F_1} = F_1 \cdot \Delta x \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi_1$$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο: $\sigma\upsilon\nu\varphi_1 = \frac{F_1}{F_{1,2}}$

Οπότε $W_{F_1} = F_1 \cdot \Delta x \cdot \frac{F_1}{F_{1,2}} = \frac{F_1^2 \cdot \Delta x}{F_{1,2}}$ (1)

Και $W_{F_2} = F_2 \cdot \Delta x \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi_2$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο: $\sigma\upsilon\nu\varphi_2 = \frac{F_2}{F_{1,2}}$

Οπότε $W_{F_2} = F_2 \cdot \Delta x \cdot \frac{F_2}{F_{1,2}} = \frac{F_2^2 \cdot \Delta x}{F_{1,2}}$ (2)

Διαιρώντας κατά μέλη της εξισώσεις (1) και (2) :

$$\frac{W_{F_1}}{W_{F_2}} = \frac{\frac{F_1^2}{F_{1,2}} \cdot \Delta x}{\frac{F_2^2}{F_{1,2}} \cdot \Delta x} = \left(\frac{F_1}{F_2}\right)^2 = \left(\frac{2 \cdot F_2}{F_2}\right)^2 = 4$$

Άρα τελικά: $\boldsymbol{W_1 = 4 \cdot W_2}$

ΘΕΜΑ Β

Ενδεικτικές απαντήσεις

Β1.

Α) Δίνεται δίπλα ο πίνακας με συμπληρωμένες τις τιμές που έλειπαν από τον αρχικό.

$\boldsymbol{x}$ (m)	$\boldsymbol{\Delta x}$ (m)	$\boldsymbol{t}$ (s)
$-\mathbf{6}$	0	0
-2	4	2
0	**6**	4
4	10	6
8	**14**	8

Β) <u>Αιτιολόγηση</u>

Έστω x_0 η αρχική θέση του σημειακού αντικειμένου στον άξονα, δηλαδή η θέση του τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$.

Αν x η θέση του στον άξονα τη χρονική στιγμή t , η τιμή της μετατόπισης υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\Delta x = x - x_0 \qquad (1)$$

- Εφαρμόζουμε την (1) για τη χρονική στιγμή $t_1 = 2\,\mathrm{s}$ χρησιμοποιώντας και τις δεδομένες τιμές του πίνακα για τη στιγμή αυτή:
  $$\Delta x_1 = x_1 - x_0, \text{ ή } \quad 4\,m = -2\,\mathrm{m} - \mathrm{x}_0$$
  Απ' όπου προκύπτει $\quad x_0 = -6\,\mathrm{m}$

- Εφαρμόζουμε την (1) για τη χρονική στιγμή $t_2 = 4\,\mathrm{s}$ χρησιμοποιώντας και τις δεδομένες τιμές του πίνακα για τη στιγμή αυτή:
  $$\Delta x_2 = x_2 - \mathrm{x}_0 = 0 — (-6\,\mathrm{m}) = 6\,\mathrm{m}$$

- Εφαρμόζουμε την (1) για τη χρονική στιγμή $t_3 = 6\,\mathrm{s}$ χρησιμοποιώντας και τις δεδομένες τιμές του πίνακα για τη στιγμή αυτή:
  $$\Delta x_3 = x_3 - \mathrm{x}_0\,, \quad \text{ή} \quad x_3 = \Delta x_3 + x_0 = 10\,\mathrm{m} - 6\,\mathrm{m} = 4\,\mathrm{m}$$

- Εφαρμόζουμε την (1) για τη χρονική στιγμή $t_4 = 8\,\mathrm{s}$ χρησιμοποιώντας και τις δεδομένες τιμές του πίνακα για τη στιγμή αυτή:
  $$\Delta x_4 = x_4 - \mathrm{x}_0 = 8 — (-6\,\mathrm{m}) = 14\,\mathrm{m}$$

Β2.

Α) Σωστή η απάντηση **γ)**

Β) <u>Αιτιολόγηση</u>

Η καρίνα του σκάφους δέχεται από το νερό δύναμη κάθετη προς την κατεύθυνση πλεύσης και δύναμη αντίθετη προς την κατεύθυνση πλεύσης. Η κατεύθυνση πλεύσης όμως καθορίζεται από τη δύναμη του αέρα στο πανί $\vec{F}_{\alpha\varepsilon\rho}$ και την δύναμη στην καρίνα που είναι κάθετη στην πλεύση του $\vec{F}_{\kappa}$, όπως φαίνεται και στο σχήμα.

Θεωρούμε ορθογώνιους άξονες, $y'y$ στην κατεύθυνση πλεύσης και $x'x$ κάθετα σε αυτήν. Η κίνηση είναι ευθύγραμμη και κάθετα στην διεύθυνση κίνησης οι δυνάμεις ισορροπούν. Άρα:

$$\Sigma F_x = 0, \quad \text{ή} \quad F_{\alpha\varepsilon\rho,x} - F_{\kappa} = 0$$

$$\text{Άρα} \quad F_{\kappa} = F_{\alpha\varepsilon\rho,x} = F_{\alpha\varepsilon\rho.} \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi = 2 \cdot 10^4 \cdot 0{,}8\,\mathrm{N} = \mathbf{1{,}6 \cdot 10^4\,N}$$

ΘΕΜΑ Β **Ενδεικτικές απαντήσεις**

Β1.

Α) Σωστή η απάντηση **α)**

Β) Αιτιολόγηση

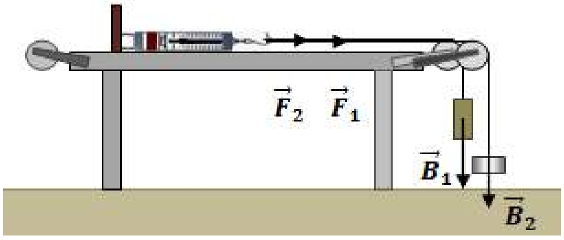
Καθώς τα σώματα ισορροπούν κρεμασμένα στα κατακόρυφα άκρα των νημάτων, στον γάντζο του δυναμόμετρου μεταφέρονται δυνάμεις κατά μέτρο ίσες με τα βάρη των σωμάτων, επειδή τα νήματα θεωρούνται αβαρή και μηδενικές οι δυνάμεις τριβής μεταξύ αυτών και των τροχαλιών.

Η ένδειξη του δυναμόμετρου F_{Δ} σε κάθε περίπτωση είναι ίση με την συνισταμένη των δυνάμεων αυτών.

1η περίπτωση

Οι δυνάμεις στον γάντζο του δυναμόμετρου, είναι συγγραμμικές και ομόρροπες.

Για την ένδειξη του δυναμόμετρου ισχύει:



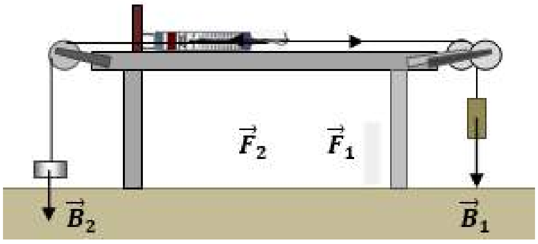
$$F_{\Delta} = F_1 + F_2 = B_1 + B_2$$

$$B_1 + B_2 = 16\ \text{N} \qquad (1)$$

2η περίπτωση

Οι δυνάμεις στον γάντζο του δυναμόμετρου, είναι συγγραμμικές και αντίρροπες.

Για την ένδειξη του δυναμόμετρου ισχύει:



$$F_{\Delta} = F_1 - F_2 = B_1 - B_2$$

$$B_1 - B_2 = 4\ \text{N} \qquad (2)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις εξισώσεις (1) και (2), προκύπτει:

$$2 \cdot B_1 = 20\ \text{N}\,, \quad \text{ή} \quad \boldsymbol{B_1 = 10\ \text{N}}$$

Οπότε από τη σχέση (1) προκύπτει $\boldsymbol{B_2 = 6\ \text{N}}$

Β2.

Α) Σωστή η απάντηση **β)**

Β) Αιτιολόγηση

Ο επιπλέον χρόνος αντίδρασης του δεύτερου οδηγού σε σχέση με τον χρόνο αντίδρασης του πρώτου, θα μπορούσε το πολύ να είναι τόσος, ώστε το αυτοκίνητο κινούμενο με την αρχική σταθερή ταχύτητά του να διανύσει επιπλέον $10\ \text{m}$.

Αυτό σημαίνει μέγιστο πρόσθετο χρόνο αντίδρασης:

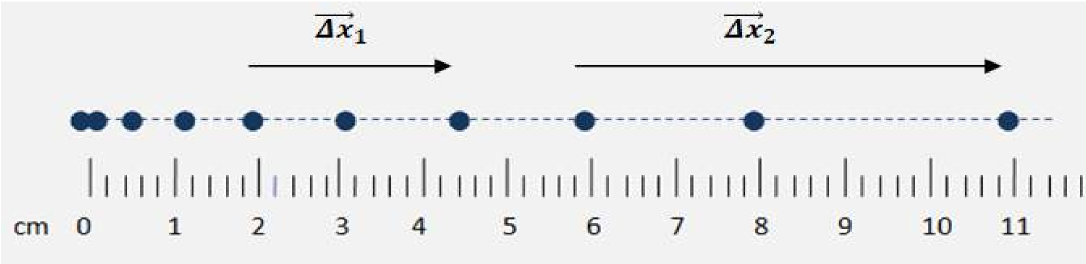
$$\Delta t_{αντ}^{max} = \frac{\Delta x_{max}}{υ} = \frac{10}{20}\ s = 0{,}5\ s$$

Επειδή ο πρώτος οδηγός είχε χρόνο αντίδρασης $t_{αντ} = 0{,}7\ s$, προκύπτει μέγιστος χρόνος αντίδρασης για τον δεύτερο οδηγό:

$$t_{αντ}^{max} = (0{,}7 + 0{,}5)\ \text{s} = \mathbf{1{,}2\ s}$$

ΘΕΜΑ Β **Ενδεικτικές απαντήσεις**

Β1.
Α) Σωστή η απάντηση **β)**
Β) Αιτιολόγηση



Η κουκίδα στη θέση $x_1 = 3\text{ cm}$, είναι η έκτη κουκίδα. Θα βρούμε τη στιγμιαία ταχύτητα του σώματος στη θέση αυτή, ως μέση ταχύτητα αυτού κατά την μετατόπισή του από την πέμπτη, μέχρι την έβδομη κουκίδα. Κατά προσέγγιση παρατηρώντας την χαρτοταινία, αυτή η μετατόπιση φαίνεται να είναι από 2 cm, μέχρι 4,2 cm.
Ο χρόνος για την μετατόπιση αυτή είναι ο χρόνος για να καταγραφούν δύο κουκίδες από τον μηχανισμό, δηλαδή 0,4 s.
Οπότε $\upsilon_1 = \bar{\upsilon} = \frac{\Delta x_1}{\Delta t} = \frac{(4{,}2-2)\text{ cm}}{0{,}4\text{ s}} = \frac{2{,}2\text{ cm}}{0{,}4\text{ s}}$ (1)

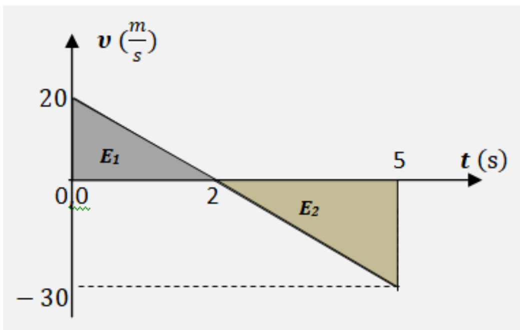
Η κουκίδα στη θέση $x_2 = 8\text{ cm}$, είναι η ένατη κουκίδα. Θα βρούμε τη στιγμιαία ταχύτητα του σώματος στη θέση αυτή, ως μέση ταχύτητα αυτού κατά την μετατόπισή του από την όγδοη, μέχρι την δέκατη κουκίδα. Κατά προσέγγιση παρατηρώντας την χαρτοταινία, αυτή η μετατόπιση φαίνεται να είναι από 6 cm, μέχρι 11 cm.
Ο χρόνος για την μετατόπιση αυτή είναι ίδιος, δηλαδή 0,4 s.
Οπότε $\upsilon_2 = \overline{\upsilon'} = \frac{\Delta x_2}{\Delta t} = \frac{(11-6)\text{ cm}}{0{,}4\text{ s}} = \frac{5\text{ cm}}{0{,}4\text{ s}}$ (2)

Διαιρώντας κατά μέλη τις εξισώσεις (1) και (2):

$$\frac{\upsilon_1}{\upsilon_2} = \frac{2{,}2}{5} = \frac{22}{50} = \frac{44}{100} = 0{,}44$$

Β2.
Α) Σωστή απάντηση η **α)**
Β) Αιτιολόγηση

Με θετική την προς τα πάνω φορά, θα υπολογίσουμε την αλγεβρική τιμή της μετατόπισης της μπαλίτσας, από την στιγμή της εκτόξευσης μέχρι την πτώση της στο έδαφος, ως αλγεβρικό άθροισμα εμβαδών στο διάγραμμα ταχύτητας-χρόνου, των τριγώνων που δημιουργούνται από την γραφική παράσταση και των άξονα χρόνου.



$$\Delta x = E_1 - E_2 = \frac{20 \cdot 2}{2}\ \mathrm{m} - \frac{30 \cdot 3}{2}\ \mathrm{m} = -25\ \mathrm{m}$$

Δηλαδή η μετατόπιση της μπαλίτσας έχει κατεύθυνση κατακόρυφη και προς τα κάτω, όπως και το βάρος της. Για το έργο του βάρους της μπαλίτσας, στην συνολική αυτή μετατόπισή της:

$$W_B = B \cdot |\Delta x| = 2 \cdot 25\ \mathrm{J} = \mathbf{50\ J}$$

ΘΕΜΑ Α

Απαντήσεις

Α1 γ

Α2 γ

Α3 β

Α4 α

Α5 α (Σ) , β (Σ) , γ (Λ) , δ (Σ) , ε (Λ)

ΘΕΜΑ Γ **Ενδεικτικές απαντήσεις**

Γ1. Για την ελεύθερη πτώση της σφαίρας από την ταράτσα του κτιρίου μέχρι το έδαφος ισχύει:

$$H = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

ή $$t = \sqrt{\frac{2 \cdot H}{g}} = 3\ \mathrm{s}$$

Γ2. Στο έδαφος φτάνει με ταχύτητα μέτρου:

$$\upsilon = g \cdot t = 30\ \frac{m}{s}$$

Γ3. Τη χρονική στιγμή $t_1 = 2\ s$, η σφαίρα έχει πέσει κατά ύψος:

$$y_1 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_1^2 = 20\ m$$

Άρα την στιγμή εκείνη απέχει από το έδαφος:

$$h_1 = H - y_1 = 25\ \mathrm{m}$$

Γ4. Το δεύτερο δευτερόλεπτο της κίνησης έχει χρονική διάρκεια $\Delta t = 1\ \mathrm{s}$ και διαρκεί από την χρονική στιγμή $t' = 1\ s$, μέχρι την χρονική στιγμή $t'' = 2\ s$.

Την χρονική στιγμή $t' = 1\ s$ η σφαίρα έχει πέσει κατακόρυφα κατά

$$y' = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t'^2 = 5\ m$$

Την χρονική στιγμή $t'' = 2\ s$ η σφαίρα έχει πέσει κατακόρυφα κατά

$$y'' = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t''^2 = 20\ m$$

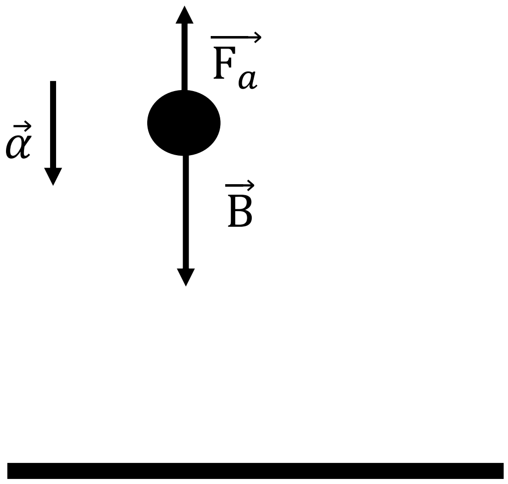
Έτσι το μέτρο της μετατόπισης της σφαίρας στη διάρκεια του δεύτερου δευτερολέπτου της πτώσης της είναι:

$$\Delta y = y'' - y' = 15\ m$$

Β1

Α. Σωστή η απάντηση **(α)** (***Μονάδες 4)***

Β. Ενδεικτική Δικαιολόγηση



Σχήμα- Δυνάμεις-Διάνυσμα επιτάχυνσης

(***Μονάδες 3)***

Υπολογίζουμε την μάζα του σώματος:

$$B = m \cdot g \Rightarrow m = \frac{B}{g} \Rightarrow m = \frac{100N}{10 \, {}^{m}/_{s^2}}$$
$$\Rightarrow \boldsymbol{m = 10Kg}$$

(***Μονάδες 2)***

Επομένως

$$\Sigma F = m \cdot a \Rightarrow B - F_a = m \cdot a$$

$$\Rightarrow 100N - F_a = 10kg \cdot 4 \, {}^{m}/_{s^2} \Rightarrow \boldsymbol{F_a = 60N}$$

(***Μονάδες 3)***

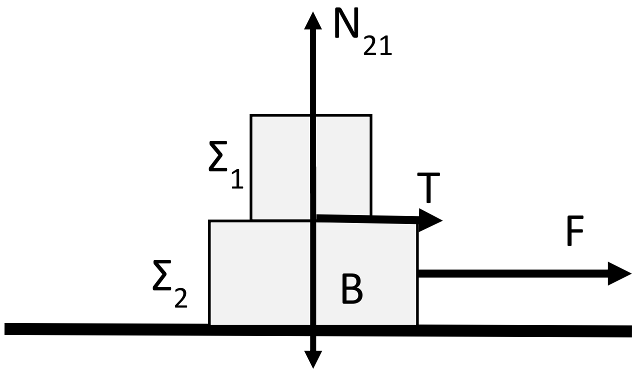
Β2

Α. Σωστή η απάντηση **(α)** (***Μονάδες 4)***

Β. Ενδεικτική Δικαιολόγηση

Καθώς ο μαθητής τραβά απότομα προς τα δεξιά το κιβώτιο Σ_2 επάνω στο λείο οριζόντιο δάπεδο, το κιβώτιο Σ_1 **λόγω αδράνειας *(Μον. 1)*** τείνει να διατηρήσει την αρχική κινητική του κατάσταση, δηλ. να παραμείνει ακίνητο. Άρα τείνει να κινηθεί προς τα αριστερά σε σχέση με το Σ_2. Για να κινηθούν και τα δύο κιβώτια μαζί ως ένα σώμα θα πρέπει το κιβώτιο Σ_1 να δεχθεί από το Σ_2 δύναμη **στατικής τριβής *(Μον. 1)*** κατά την διεύθυνση της επιφάνειας επαφής και με **φορά προς τα δεξιά *(Μον. 1)***.

Άρα οι δυνάμεις που δέχεται το Σ_1 θα είναι:



(Μονάδες 2)

Για το σύστημα των δύο κιβωτίων κατά τον άξονα της κίνησης:

$$\Sigma F = (m_1 + m_2) \cdot a \Rightarrow \ 80N = (3Kg + 5Kg) \cdot a \Rightarrow \boldsymbol{a = 10 \, {}^{m}/_{s^2}}$$

(Μονάδες 2)

Για το κιβώτιο Σ_1 κατά τον άξονα της κίνησης:

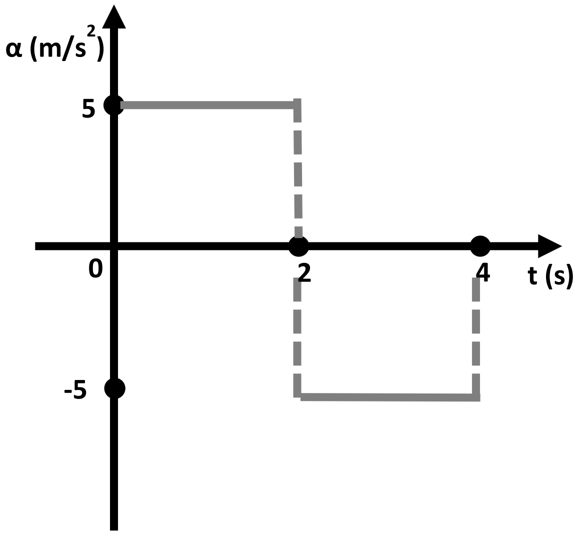
$$\Sigma F_1 = m_1 \cdot a \Rightarrow \ T = 3Kg \cdot 10 \, {}^{m}/_{s^2} \Rightarrow \boldsymbol{T = 30N}$$

(Μονάδα 2)

Β1

Α. Σωστή απάντηση είναι η **(β)**. **(*Μονάδες 4)***

Ενδεικτική Δικαιολόγηση



Σύμφωνα με το διάγραμμα, το κινητό εκτελεί:

- Από **0 s-2 s**,
  Ευθύγραμμη Ομαλά Επιταχυνόμενη Κίνηση με $\alpha = 5m/s^2$

Η τιμή της ταχύτητας τη χρονική στιγμή 2s είναι:

$$\upsilon = \alpha \cdot \Delta t \Rightarrow \upsilon = 5\, {}^{m}/_{s^2} \cdot 2s \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon = 10\, {}^{m}/_{s}}$$

(*Μονάδες 4)*

- Από **2 s-4 s**,
  Ευθύγραμμη Ομαλά Επιβραδυνόμενη Κίνηση με $\alpha = -5m/s^2$ και αρχική ταχύτητα υ=10m/s
  Οπότε την χρονική στιγμή t_1 =4s

$$\upsilon' = \upsilon - |\alpha| \cdot \Delta t \Rightarrow \upsilon' = 10\, {}^{m}/_{s} - 5\, {}^{m}/_{s^2} \cdot 2s \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon' = 0\, {}^{m}/_{s}}$$

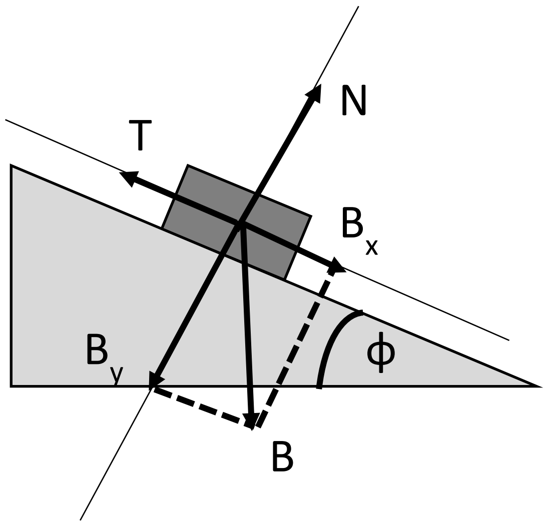
(*Μονάδες 4)*

Β2

Α. Σωστή απάντηση είναι η **(γ)**. **(*Μονάδες 4)***

Ενδεικτική Δικαιολόγηση

Σχεδίαση δυνάμεων-Ανάλυση σε άξονες (***Μονάδες 5)***



Για να ισορροπεί το σώμα επάνω στο κεκλιμένο επίπεδο θα πρέπει:

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow B_x = T_\sigma \Rightarrow mg\eta\mu 30^0 = T_\sigma \ (1)$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow B_y = N \Rightarrow mg\sigma\upsilon\nu 30^0 = N \ (2)$$

(***Μονάδες 2)***

Για την στατική τριβή ισχύει:

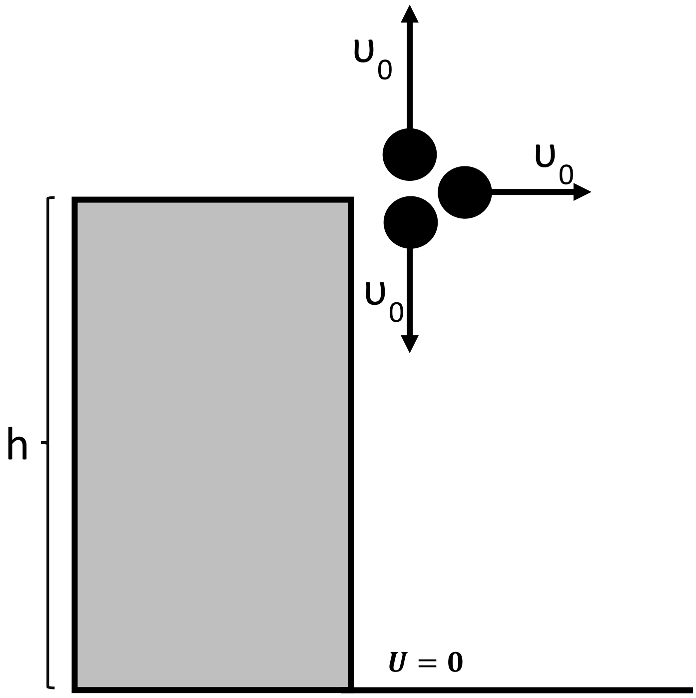
$$T_\sigma \leq T_{o\rho} \Rightarrow T_\sigma \leq \mu_{o\rho} N \xRightarrow{(1),(2)} mg\eta\mu 30^0 \leq \mu_{o\rho} mg\sigma\upsilon\nu 30^0$$

$$\Rightarrow \mu_{o\rho} \geq \varepsilon\varphi 30^0 \Rightarrow \boldsymbol{\mu_{o\rho}} \geq \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \cong \mathbf{0,59}$$ (***Μονάδες 2)***

Β1.

Α. Σωστή η απάντηση **(γ)** **(*Μονάδες 4)***

Β. Ενδεικτική Δικαιολόγηση



Εφόσον αγνοείται η αντίσταση του αέρα, η μοναδική δύναμη, που δέχεται κάθε σφαίρα είναι το βάρος της, που είναι συντηρητική δύναμη, άρα η Μηχανική Ενέργεια κάθε σφαίρας διατηρείται. **(Μονάδες 2)**

Λαμβάνουμε ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το έδαφος.

Για κάθε μία από τις τρεις μπάλες ισχύει:

$$E_{MHX\,\alpha\rho\chi} = E_{MHX\,\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow K_{\alpha\rho\chi} + U_{\alpha\rho\chi} = K_{\tau\varepsilon\lambda} + U_{\tau\varepsilon\lambda}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 + mgh = \frac{1}{2}m\upsilon^2 \Rightarrow \upsilon = \sqrt{\upsilon_0^2 + 2gh}$$

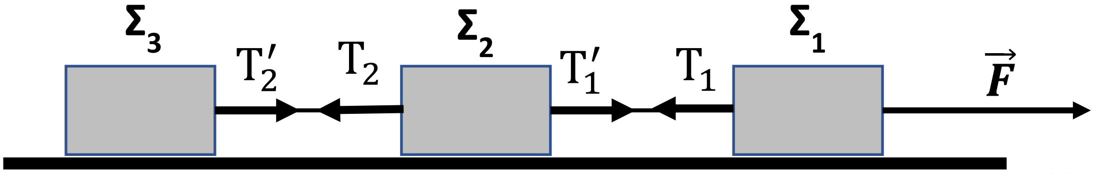
Όπου υ το μέτρο της ταχύτητας με την οποία κάθε μπάλα φθάνει στο έδαφος.

Άρα $\upsilon_1 = \upsilon_2 = \upsilon_3 = \upsilon$. **(Μονάδες 6)**

Β2.

Α. Σωστή η απάντηση **(β)** **(*Μονάδες 4)***

Β. Ενδεικτική Δικαιολόγηση



Σχεδίαση δυνάμεων στον άξονα xx’ **(Μονάδες 2).**

Για το σύστημα των τριών σωμάτων έχουμε:

$$F = 3ma \Rightarrow ma = \frac{F}{3} \quad (1)$$ **(Μονάδες 2)**

Για το σώμα $Σ_1$ έχουμε:

$$F - T_1 = ma \overset{(1)}{\Rightarrow} T_1 = F - \frac{F}{3} \Rightarrow T_1 = \frac{2F}{3} = 200N > 180N \ (2)$$ **(Μονάδες 3)**

Άρα κόβεται το νήμα μεταξύ των σωμάτων $Σ_1$ και $Σ_2$.

Για το σώμα $Σ_2$ έχουμε:

$T_1' = T_1$ και

$$T_1' - T_2 = ma \xRightarrow{(1),(2)} \frac{2F}{3} - T_2 = \frac{F}{3} \Rightarrow T_2 = \frac{F}{3} = 100N = T_2' < 180N$$

Άρα δεν κόβεται το νήμα μεταξύ των σωμάτων $Σ_2$ και $Σ_3$.

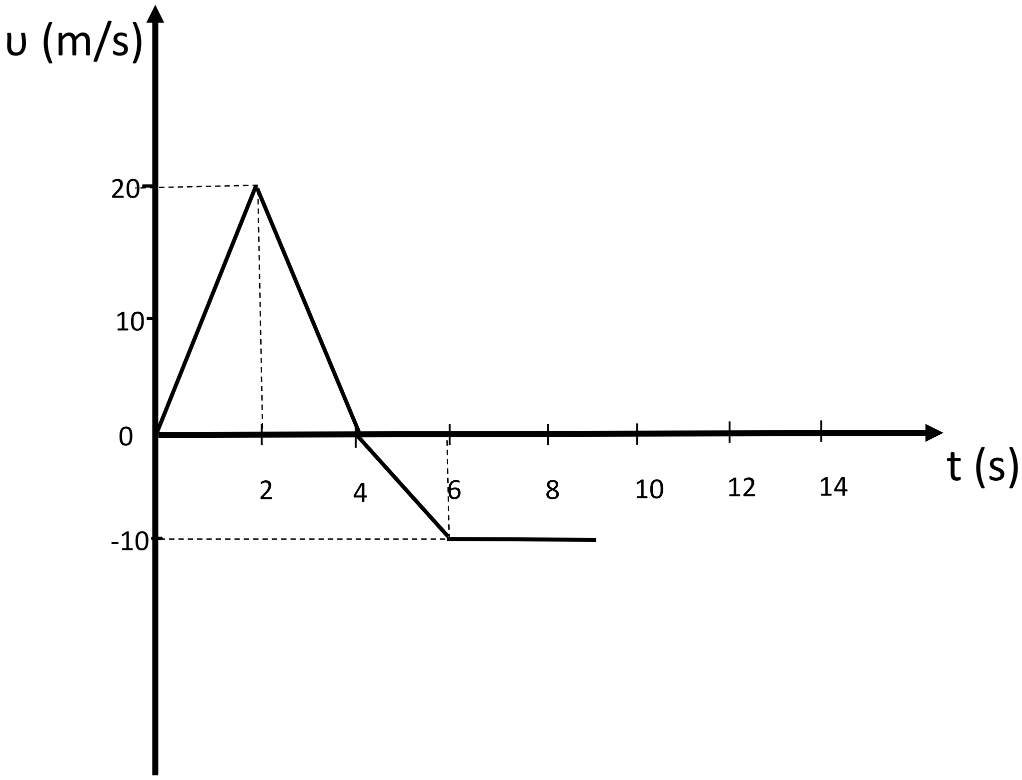
(Μονάδες 2)

Β1.

13467

Α. Σωστή η απάντηση **(γ). (*Μονάδες 4)***

Β. Ενδεικτική Δικαιολόγηση



Από 0 s - 4 s το κινητό κινείται κατά την θετική φορά του άξονα και συγκεκριμένα:

Από 0 s - 2 s επιταχύνεται ομαλά ενώ από 2 s-4 s επιβραδύνεται ομαλά και την χρονική στιγμή $4\ s$ η ταχύτητά του μηδενίζεται.

Από 0 s - 4 s το διάστημα που διανύει υπολογίζεται από το εμβαδόν του τριγώνου (ως η απόλυτη τιμή της μετατόπισης):

$$s = \frac{4s \cdot 20^{m}/_{s}}{2} = 40m$$ **(Μονάδες 4)**

Από την χρονική στιγμή 4 s και μετά το κινητό κινείται κατά την αρνητική φορά του άξονα επιστρέφοντας προς το σημείο από το οποίο ξεκίνησε. **(Μονάδες 1)**

Το διάστημα που διανύει επιστρέφοντας και για το χρονικό διάστημα 4 s – 8 s είναι (ως η απόλυτη τιμή της μετατόπισης):

$$s' = \frac{(4s+2s) \cdot 10^{m}/_{s}}{2} = 30m$$ (Εμβαδόν τραπεζίου)

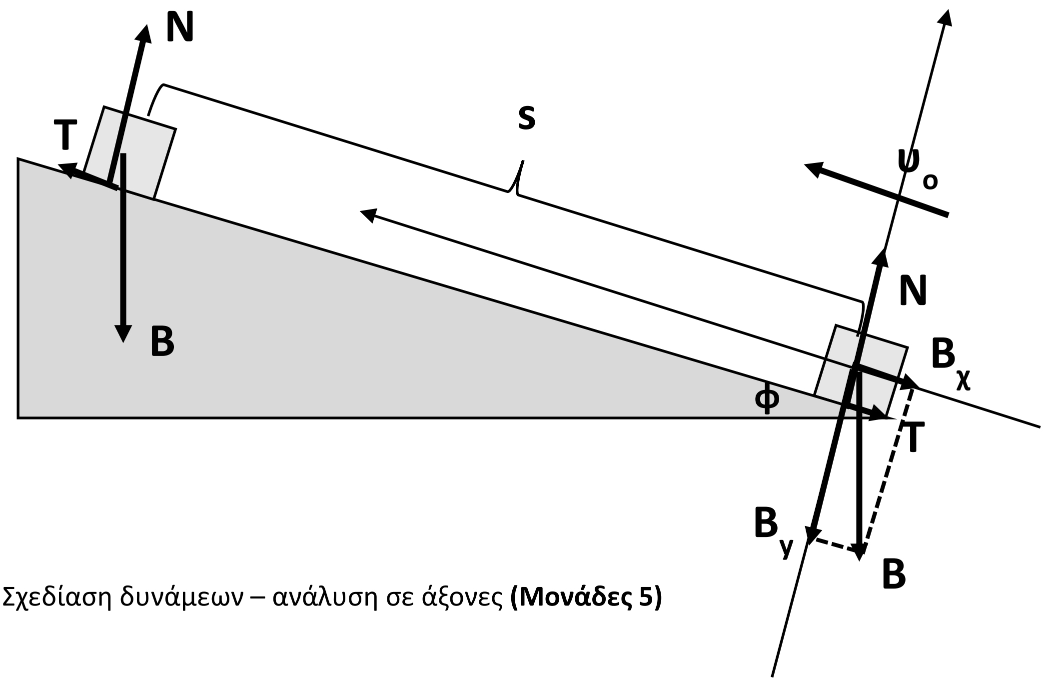
Δηλ. την στιγμή 8s βρίσκεται στην θέση $(40 - 30)m = 10m$ και συνεχίζει να κινείται προς τα αριστερά.

Άρα επιστρέφει στο σημείο από το οποίο ξεκίνησε μετά την χρονική στιγμή $8s$. **(Μονάδες 3)**

B2.

Α. Σωστή η απάντηση **(α)** ***(Μονάδες 4)***

Β. Ενδεικτική Αιτιολόγηση



Σχεδίαση δυνάμεων – ανάλυση σε άξονες **(Μονάδες 5)**

Το σώμα κινούμενο από την βάση του κεκλιμένου επιπέδου προς το σημείο όπου σταματά στιγμιαία και επιστρέφοντας ξανά στην βάση, διανύει μια κλειστή διαδρομή.

Εφαρμόζουμε το θεώρημα έργου ενέργειας:

$W_{\beta\alpha\rho} = 0$ (Επειδή το βάρος είναι συντηρητική δύναμη) **(Μονάδες 1)**

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = mg\sigma\upsilon\nu\varphi \ (1)$$

$$T = \mu N \overset{(1)}{\Rightarrow} T = \mu mg\sigma\upsilon\nu\varphi \ (2)$$

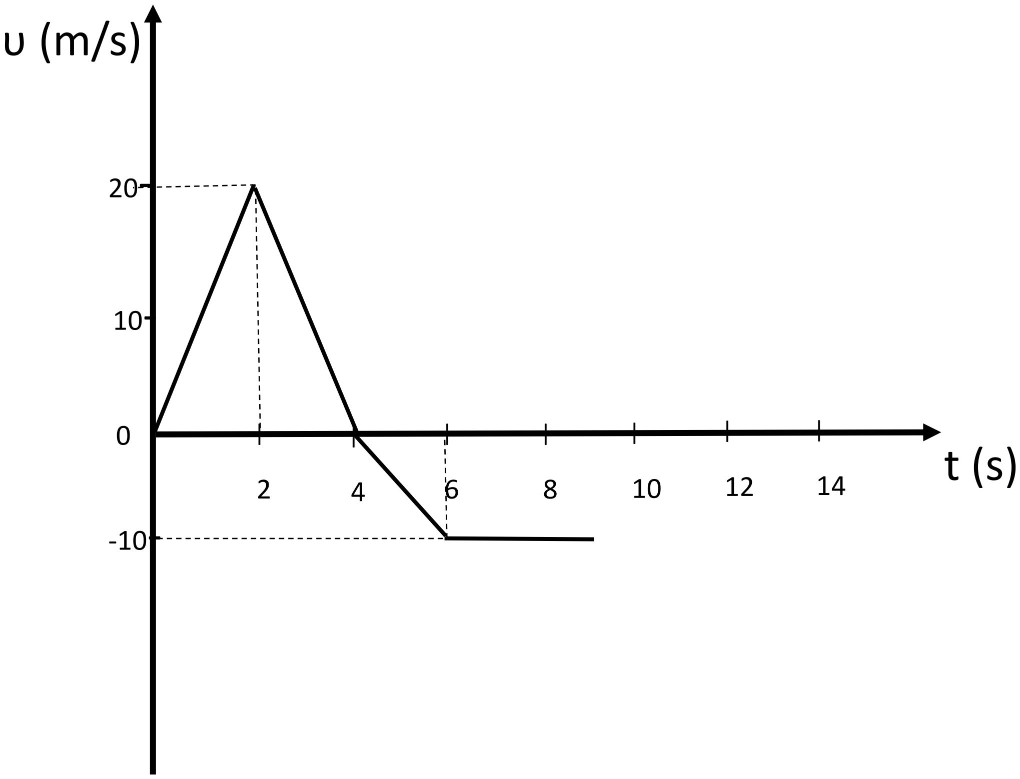
$$K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = W_{o\lambda} \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 = W_{\beta\alpha\rho} + W_T$$

$\overset{(2)}{\Rightarrow} \frac{1}{2}m\upsilon^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 = 0 - 2\mu mg\sigma\upsilon\nu\varphi . s \Rightarrow \upsilon = \sqrt{\upsilon_0^2 - 2\mu g\sigma\upsilon\nu\varphi s} \Rightarrow \upsilon < \upsilon_0$ **(Μονάδες 3)**

Β1.

13468

Α.



Χρονικό Διάστημα (Δt) (s)	**Είδος και φορά κίνησης**	**Επιτάχυνση (α) $\left(\frac{m}{s^2}\right)$**
0-2	Ευθύγραμμη Ομαλά Επιταχυνόμενη Κίνηση προς την θετική κατεύθυνση του άξονα	**+10**
2-4	Ευθύγραμμη Ομαλά Επιβραδυνόμενη Κίνηση προς την θετική κατεύθυνση του άξονα	**-10**
4-6	Ευθύγραμμη Ομαλά Επιταχυνόμενη Κίνηση προς την αρνητική κατεύθυνση του άξονα	**-5**
6-8	Ευθύγραμμη Ομαλή προς την αρνητική κατεύθυνση του άξονα	**0**

(Μονάδες 4)

Β.

0 s-2 s, σύμφωνα με το διάγραμμα ταχύτητας-χρόνου, η ταχύτητα είναι θετική και το μέτρο της αυξάνεται με σταθερό ρυθμό (η γραφική παράσταση είναι ευθεία γραμμή, που τέμνει τον οριζόντιο άξονα άρα η κλίση είναι σταθερή,). **Άρα το κινητό εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση** κατά την θετική φορά του άξονα xx' .

2 s-4 s, σύμφωνα με το διάγραμμα ταχύτητας-χρόνου, το μέτρο της ταχύτητας μειώνεται με σταθερό ρυθμό (η γραφική παράσταση είναι ευθεία γραμμή, που τέμνει τον οριζόντιο άξονα άρα η κλίση είναι σταθερή,) και την χρονική στιγμή 4 s, το μέτρο της ταχύτητας μηδενίζεται. Άρα η κίνηση είναι **ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη** κατά την θετική φορά του άξονα xx' .

4 s-6 s, σύμφωνα με το διάγραμμα ταχύτητας-χρόνου, το μέτρο της ταχύτητας αυξάνεται με σταθερό ρυθμό (η γραφική παράσταση είναι ευθεία γραμμή, που τέμνει τον οριζόντιο άξονα άρα η κλίση είναι σταθερή,), αλλά το κινητό κινείται προς την αρνητική κατεύθυνση του άξονα (η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας είναι αρνητική). Άρα η κίνηση είναι **ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη** και το κινητό κινείται κατά την αρνητική φορά του άξονα**.**

6 s-8 s, σύμφωνα με το διάγραμμα ταχύτητας-χρόνου, το μέτρο της ταχύτητας παραμένει σταθερό (η γραφική παράσταση είναι ευθεία γραμμή , και παράλληλη προς τον οριζόντιο άξονα). Άρα η κίνηση είναι **ευθύγραμμη ομαλή.**

(Μονάδες 4Χ1=4)

0-2s: $\alpha_1 = \frac{\Delta\upsilon}{\Delta t} \Rightarrow \alpha_1 = \frac{\upsilon_{\tau\varepsilon\lambda}-\upsilon_{\alpha\rho\chi}}{\Delta t} \Rightarrow \alpha_1 = \frac{20\,m/s-0}{2s} = 10\,m/s^2$

2-4s: $\alpha_2 = \frac{\Delta\upsilon}{\Delta t} \Rightarrow \alpha_2 = \frac{\upsilon_{\tau\varepsilon\lambda}-\upsilon_{\alpha\rho\chi}}{\Delta t} \Rightarrow \alpha_2 = \frac{0-20\,m/s}{2s} = -10\,m/s^2$

4-6s: $\alpha_3 = \frac{\Delta\upsilon}{\Delta t} \Rightarrow \alpha_3 = \frac{\upsilon_{\tau\varepsilon\lambda}-\upsilon_{\alpha\rho\chi}}{\Delta t} \Rightarrow \alpha_3 = \frac{-10\,m/s-0}{2s} = -5\,m/s^2$

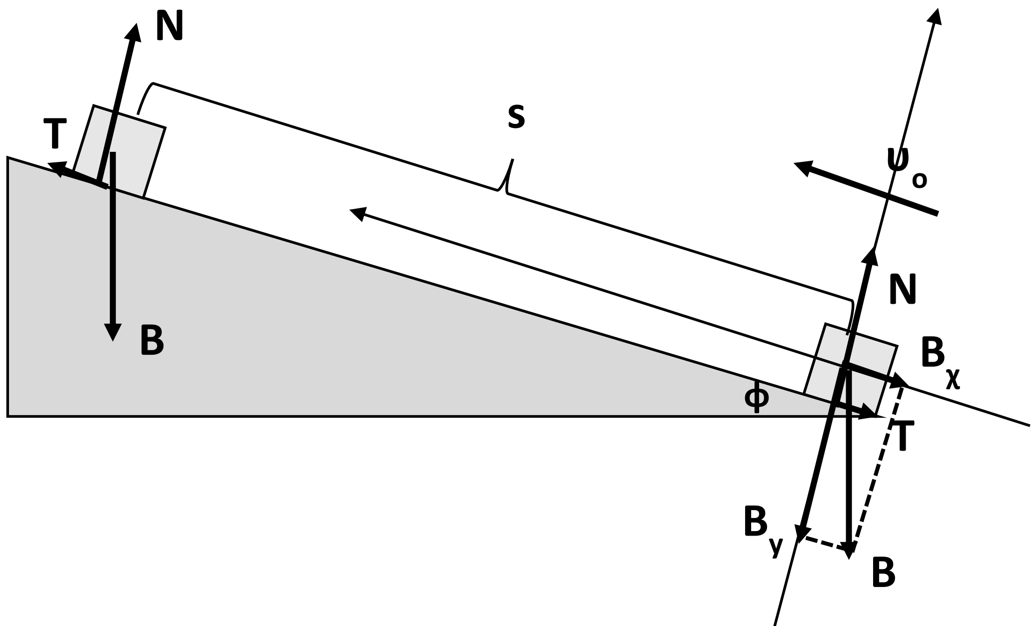
6-8s: $\alpha_4 = 0\,m/s^2$

(Μονάδες 4Χ1=4)

Β2.

Α. Σωστή η απάντηση **(α)** ***(Μονάδες 4)***

Β. Ενδεικτική Δικαιολόγηση



Σχεδίαση δυνάμεων – ανάλυση σε άξονες **(Μονάδες 5)**

Κατά την άνοδο του σώματος:

$$\Sigma F_x = m\alpha_1 \Rightarrow mg\eta\mu\varphi + T = m\alpha_1$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \frac{mg\eta\mu\varphi + T}{m} \quad (1)$$

Κατά την κάθοδο του σώματος:

$$\Sigma F_x = m\alpha_2 \Rightarrow mg\eta\mu\varphi - T = m\alpha_2$$

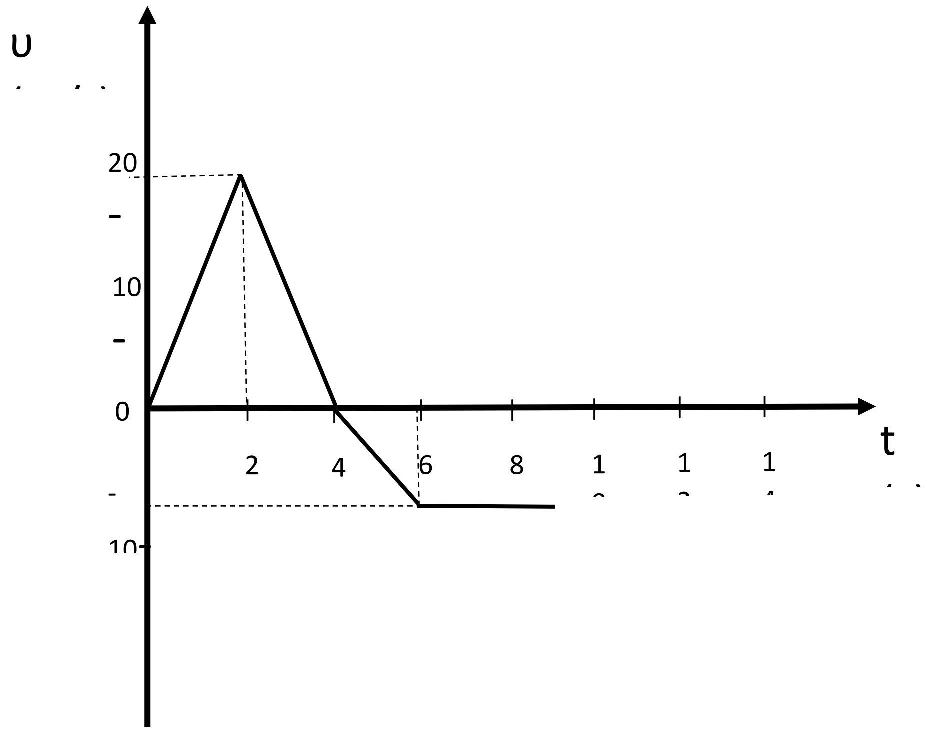
$$\Rightarrow \alpha_2 = \frac{mg\eta\mu\varphi - T}{m} \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι: $\alpha_1 > \alpha_2$

(Μονάδες 2Χ2=4)

Β1.

Α. Σωστή απάντηση είναι η **(β). (Μονάδες 4)**



Από 0 s-4 s το κινητό κινείται κατά την θετική φορά του άξονα και συγκεκριμένα:

Από 0 s -2 s επιταχύνεται ομαλά ενώ από 2 s- 4 s επιβραδύνεται ομαλά και την χρονική στιγμή 4 s η ταχύτητά του μηδενίζεται. **(Μονάδες 1)**

Από 0 s-4 s η μετατόπιση υπολογίζεται από το εμβαδόν του τριγώνου:

$$\Delta x' = \frac{4s\cdot(+20 ^{m}/_{s})}{2} = +40\ m$$ **(Μονάδες 2)**

Από την χρονική στιγμή 4 s και μετά το κινητό κινείται κατά την αρνητική φορά του άξονα επιστρέφοντας προς το σημείο από το οποίο ξεκίνησε. **(Μονάδες 1)**

Για τη μετατόπιση που διανύει επιστρέφοντας και για το χρονικό διάστημα 4 s – 8 s είναι:

$$\Delta x' = \frac{(4s+2s)\cdot(-10 ^{m}/_{s})}{2} = -30\ m$$ (Εμβαδόν τραπεζίου κατ΄απόλυτη τιμή) **(Μονάδες 2)**

Άρα την χρονική στιγμή $t = 8$ s, η μετατόπιση του κινητού θα είναι

$$\Delta x_{ολικο} = \Delta x + \Delta x' \Rightarrow \Delta x_{ολικο} = (+40) + (-30) \Rightarrow \Delta x_{ολικο} = +10\ m$$

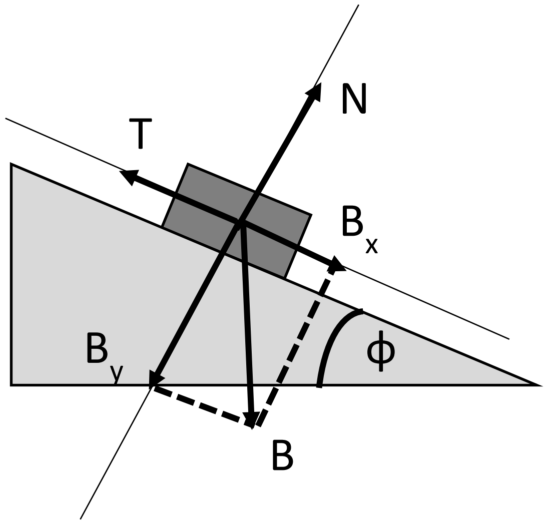
και το διάστημα που έχει διανύσει

$$S = |\Delta x| + |\Delta x'| = 70\ m$$

(Μονάδες 2Β2

Α. Σωστή η απάντηση **(β)** ***Μονάδες 4)***

Β. Ενδεικτική Αιτιολόγηση



Σχεδίαση δυνάμεων-Ανάλυση σε άξονες (***Μονάδες 4)***

Το κεκλιμένο επίπεδο δεν μπορεί να είναι λείο γιατί στην περίπτωση αυτή $T_{ολ} = 0$ και το σώμα θα κατέβαινε επιταχυνόμενο λόγω της B_x. (***Μονάδα 1)***

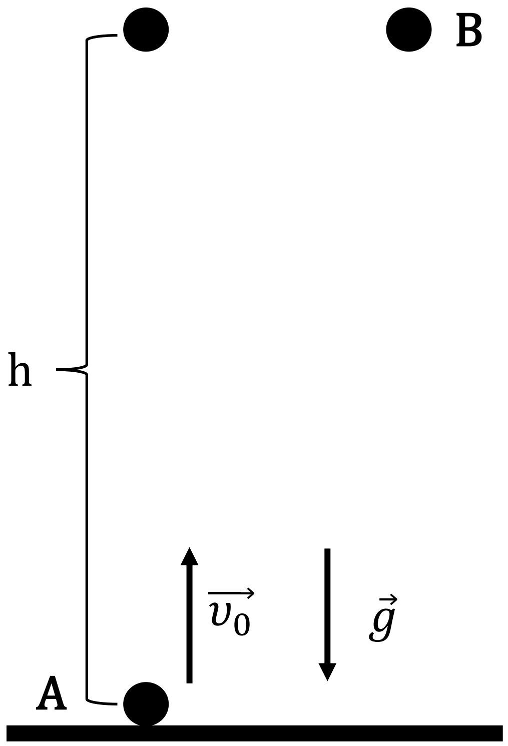
Εφόσον το σώμα κατεβαίνει, ολισθαίνοντας επάνω στο κεκλιμένο επίπεδο, με σταθερή ταχύτητα θα πρέπει:

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma F_x = 0 \Rightarrow B_x = T_{ολ} \Rightarrow mgημ30^0 = T_{ολ} \ (1) \\ \\ \Sigma F_y = 0 \Rightarrow B_y = N \Rightarrow mgσυν30^0 = N \ (2) \end{array}\right\}$$ (***Μονάδες 2)***

$$T_{ολ} = \mu_o N \xrightarrow{(1),(2)} mgημ30^0 = \mu_o mgσυν30^0 \Rightarrow \mu_o = εφ30^0$$ (***Μονάδες 2)***

B1

Α. Σωστή απάντηση είναι η **(γ)**. **(*Μονάδες 4)***



Β.Το σφαιρίδιο Α κινούμενο κατακόρυφα προς τα επάνω, εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση. ***(Μονάδα 1)***

$$\upsilon = \upsilon_0 - g \cdot \Delta t \overset{\upsilon=0}{\Longrightarrow} 0 = \upsilon_0 - g \cdot \Delta t_1 \Rightarrow \Delta t_1 = \frac{\upsilon_0}{g} \ (1)$$

(*Μονάδες 2)*

Για τον υπολογισμό του μέγιστου ύψους στο οποίο φθάνει το σφαιρίδιο Α εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. :

$$K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = W_{o\lambda} \Rightarrow 0 - \frac{1}{2}m \cdot \upsilon_0^2 = -m \cdot g \cdot h$$

$$\Rightarrow h = \frac{\upsilon_0^2}{2 \cdot g} \ (2)$$ **(*Μονάδες 2)***

Το σφαιρίδιο Β εκτελεί ελεύθερη πτώση από ύψος h.

$$h = \frac{1}{2}g \cdot (\Delta t_2)^2 \overset{(2)}{\Rightarrow} \frac{\upsilon_0^2}{2 \cdot g} = \frac{1}{2}g \cdot (\Delta t_2)^2$$

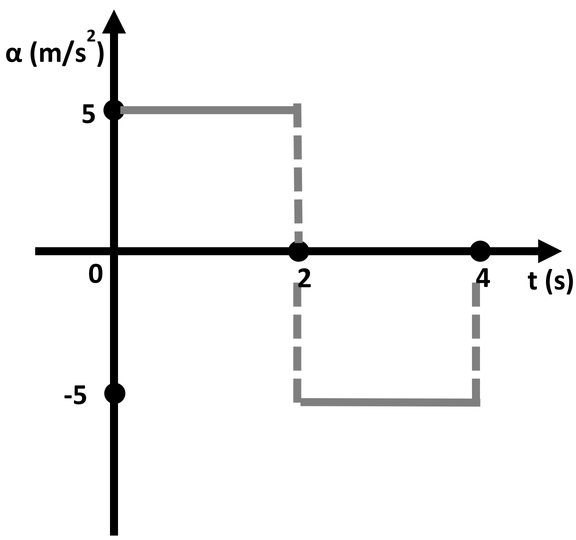
$$\Rightarrow (\Delta t_2)^2 = \frac{\upsilon_0^2}{g^2} \Rightarrow \Delta t_2 = \frac{\upsilon_0}{g} \ (3)$$ **(*Μονάδες 3)***

Από τις (1) και (3) προκύπτει ότι $\Delta t_1 = \Delta t_2$

B2

Α. Σωστή απάντηση είναι η **(α)**. **(*Μονάδες 4)***

<u>Ενδεικτική Δικαιολόγηση</u>



Σύμφωνα με το διάγραμμα, το κινητό εκτελεί:

- Από **0 s-2 s**,
  Ευθύγραμμη Ομαλά Επιταχυνόμενη Κίνηση με α = 5m/s^2

  Η τιμή της μετατόπισης είναι

  $\Delta x = \frac{1}{2}\alpha \cdot (\Delta t)^2$

  $$\Rightarrow \Delta x = \frac{1}{2}5\,{}^{m}/_{s^2} \cdot (2s)^2 \Rightarrow \boldsymbol{\Delta x = +10m}$$

  (*Μονάδες 2)*

  Η τιμή της ταχύτητας τη χρονική στιγμή 2s είναι:

  $$\upsilon = \alpha \cdot \Delta t \Rightarrow \upsilon = 5\,{}^{m}/_{s^2} \cdot 2s \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon = 10\,{}^{m}/_{s}}$$

  (*Μονάδες 2)*

- Από **2 s-4 s**,
  Ευθύγραμμη Ομαλά Επιβραδυνόμενη Κίνηση με α = -5m/s^2 και αρχική ταχύτητα υ=10m/s
  Οπότε την χρονική στιγμή t_1=4s

$$\Delta x' = \upsilon \cdot \Delta t - \frac{1}{2}|\alpha| \cdot (\Delta t)^2 \Rightarrow \Delta x' = 20m - \frac{1}{2} 5\, {}^{m}/_{s^2} \cdot (2s)^2 \Rightarrow \boldsymbol{\Delta x' = +10m}$$

(*Μονάδες 2)*

$$\upsilon' = \upsilon - |\alpha| \cdot \Delta t \Rightarrow \upsilon' = 10\, {}^{m}/_{s} - 5\, {}^{m}/_{s^2} \cdot 2s \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon' = 0\, {}^{m}/_{s}}$$

(*Μονάδες 2)*

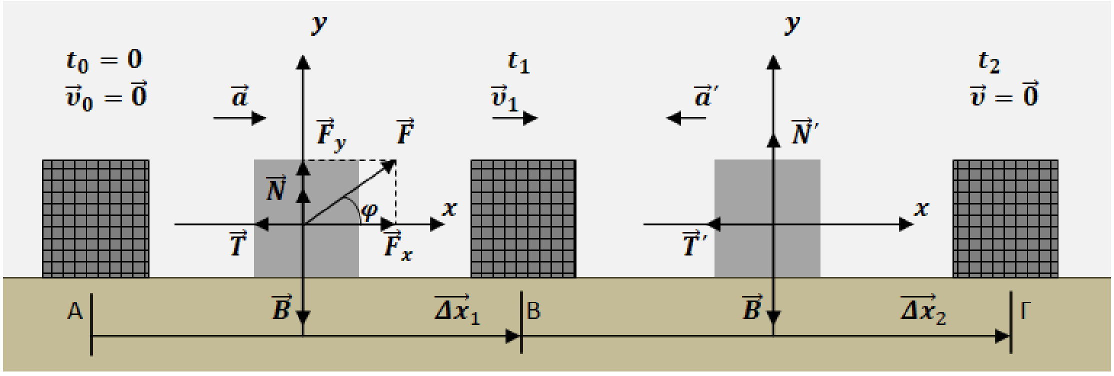
Άρα η τιμή της συνολικής μετατόπισης είναι $\boldsymbol{\Delta x + \Delta x' = +20\ m}$
και της ταχύτητας είναι $\upsilon' = 0\, {}^{m}/_{s}$

(*Μονάδα 1)*

Εναλλακτικά, το εμβαδό που περικλείεται από το διάγραμμα ισούται με την μεταβολή της ταχύτητας. Το εμβαδό αυτό ισούται με 0, άρα $\Delta\upsilon = 0$ και $\upsilon' = \upsilon = 0$.

(*Μονάδες 2)*

ΘΕΜΑ 4



4.1. Το βάρος του κύβου έχει μέτρο $B = m \cdot g = 20\ \text{N}$

Κίνηση του κύβου από τη στιγμή $t_0 = 0$ μέχρι τη στιγμή $t_1 = 2\ \text{s}$

Θεωρούμε ένα σύστημα ορθογωνίων αξόνων, με οριζόντιο άξονα $x'x$ και κατακόρυφο άξονα $y'y$, σχεδιάζουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στον κύβο και αναλύουμε τη δύναμη του ανθρώπου $\vec{F}$ σε οριζόντια συνιστώσα $\vec{F}_x$ και κατακόρυφη συνιστώσα $\vec{F}_y$, για τα μέτρα των οποίων ισχύουν:

$F_x = F \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi = 16\ \text{N}$ και $F_y = F \cdot \eta\mu\varphi = 12\ \text{N}$

Επειδή προέκυψε $F_y < B$, ο κύβος δεν χάνει την επαφή του με το οριζόντιο δάπεδο.

Στην κατακόρυφη διεύθυνση έχουμε ισορροπία δυνάμεων. Άρα ισχύει:

$\Sigma F_y = 0$, δηλαδή $N + F_y - B = 0$ και τελικά $N = B - F_y = 8\ \text{N}$

Υπολογίζουμε τώρα το μέτρο της τριβής ολίσθησης $T = \mu \cdot N = 4\ \text{N}$

Επειδή προέκυψε $F_x > T$, συμπεραίνουμε ότι ο κύβος τη στιγμή $t_0 = 0$ αρχίζει να κινείται.

4.2. Για την κίνηση του κύβου από τη στιγμή $t_0 = 0$ μέχρι τη στιγμή $t_1 = 2\ \text{s}$, στον οριζόντιο άξονα ισχύει $\Sigma F_x = m \cdot a$. Ο κύβος στην οριζόντια κίνησή του σε αυτό το χρονικό διάστημα αποκτά επιτάχυνση μέτρου

$$a = \frac{\Sigma F_x}{m} = \frac{F_x - T}{m} = 6\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Έτσι τη στιγμή t_1 έχει αποκτήσει ταχύτητα $\vec{v}_1$ μέτρου $v_1 = a \cdot t_1 = 12\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$
Και έχει πραγματοποιήσει μετατόπιση $\vec{\Delta x}_1$, μέτρου $\Delta x_1 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_1^2 = 12\ \text{m}$

Η ενέργεια που μεταφέρθηκε στον κύβο είναι ίση με το έργο της δύναμης $\vec{F}$.

Δηλαδή $E_{\pi\rho o\sigma\varphi} = W_F = F \cdot \Delta x_1 \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi = 192\ \text{J}$

4.3. Η μετατροπή ενέργειας σε θερμική, γίνεται μέσω του έργου της τριβής. Το ενεργειακό αυτό ποσόν είναι ίσο με το έργο της τριβής κατ΄ απόλυτη τιμή. Δηλαδή ισχύει:

$$Q = |W_T| = |-T \cdot \Delta x_1| = 48\text{J}$$

Το ποσοστό της προσφερόμενης από τον άνθρωπο ενέργειας στον κύβο, το οποίο μετατράπηκε σε θερμική ενέργεια, είναι:

$$\pi = \frac{Q}{E_{\pi\rho o\sigma\varphi\,.}} \cdot 100\% = \frac{48}{192} \cdot 100\% = 25\%$$

4.4. <u>Κίνηση του κύβου από τη στιγμή $t_1 = 2$ s μέχρι τη στιγμή t_2 που ακινητοποιείται.</u>

Μετά τη στιγμή t_1 κατά την οποία καταργήθηκε η δύναμη $\vec{F}$ του ανθρώπου και μέχρι να ακινητοποιηθεί ο κύβος, για τις δυνάμεις που δέχεται ισχύουν:

$\Sigma F_y = 0$, δηλαδή $N' - B = 0$, οπότε $N' = B = 20\ \mathrm{N}$
Άρα για το μέτρο της τριβής ολίσθησης ισχύει $T' = \mu \cdot N' = 10\ \mathrm{N}$

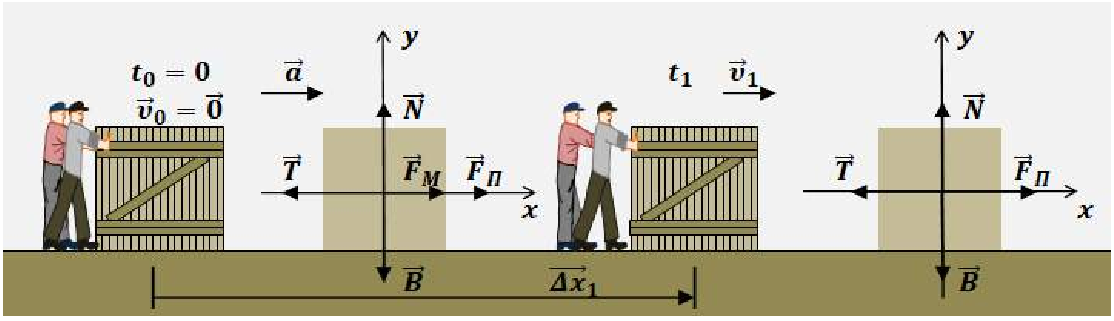
Εφαρμόζοντας το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας για το χρονικό αυτό διάστημα έχουμε:

$\Delta K = W_{o\lambda}$, αναλυτικά $0 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot \upsilon_1^2 = -T' \cdot \Delta x_2$ και τελικά $\Delta x_2 = 14{,}4\ \mathrm{m}$

Έτσι η συνολική μετατόπιση του κύβου από τη στιγμή $t_0 = 0$ μέχρι να σταματήσει είναι:

$$\Delta x_{o\lambda} = \Delta x_1 + \Delta x_2 = 26{,}4\ \mathrm{m}$$

ΘΕΜΑ 4 (Ενδεικτικές απαντήσεις)



4.1. Δημιουργούμε έναν οριζόντιο άξονα $x'x$, με θετικά στην κατεύθυνση της κίνησης του κιβωτίου και ένα κατακόρυφο άξονα $y'y$, με θετικά προς τα πάνω.
Κατακόρυφα οι δυνάμεις ισορροπούν και ισχύει

$$\Sigma F_y = 0 \text{ δηλαδή } N - B = 0, \text{ άρα } N = B = m \cdot g = 500\ \mathrm{N}$$

Η τριβή ολίσθησης που δέχεται το κιβώτιο από το δάπεδο έχει μέτρο

$$T = \mu \cdot N = 0{,}4 \cdot 500\ \mathrm{N} = 200\ \mathrm{N}$$

4.2. Οριζόντια το κιβώτιο κινείται, ισχύει ο θεμελιώδης νόμος της μηχανικής και για το χρονικό διάστημα από τη στιγμή $t_0 = 0$, μέχρι τη στιγμή t_1, έχουμε:

$\Sigma F_x = m \cdot a$, δηλαδή $F_\Pi + F_M - T = m \cdot a$ και προκύπτει:

$$a = \frac{F_\Pi + F_M - T}{m} = \frac{50\ \mathrm{N}}{50\ \mathrm{kg}} = 1\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Στη χρονική διάρκεια $\Delta t = t_1 - 0 = t_1$, το κιβώτιο μετατοπίστηκε κατά Δx_1, με ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση χωρίς αρχική ταχύτητα. Ισχύει:

$\Delta x_1 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_1^2$ και έτσι μπορούμε να υπολογίσουμε τη χρονική στιγμή t_1:

$$t_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot \Delta x_1}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2}{1}}\ s = 2\ \mathrm{s}$$

4.3. Τη χρονική στιγμή $t_1 = 2$ s, το κιβώτιο έχει αποκτήσει ταχύτητα $\vec{v}_1$, μέτρου :

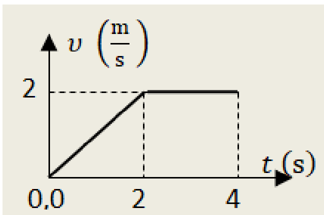
$$v_1 = a \cdot t_1 = 2\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Μετά τη χρονική στιγμή $t_1 = 2$ s, καταργείται η δύναμη του Μάριου και για την κίνηση του σώματος ισχύει:

$$\Sigma F_x{}' = F_\Pi - T = 0$$

Έτσι το κιβώτιο κινείται ευθύγραμμα και ομαλά με σταθερή ταχύτητα μέτρου $v_1 = 2\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

Η γραφική παράσταση που αποδίδει το μέτρο της ταχύτητας του κιβωτίου σε συνάρτηση με το χρόνο από τη στιγμή $t_0 = 0$, μέχρι τη στιγμή $t_2 = 4$ s αποδίδεται στο διπλανό διάγραμμα βαθμολογημένων αξόνων:



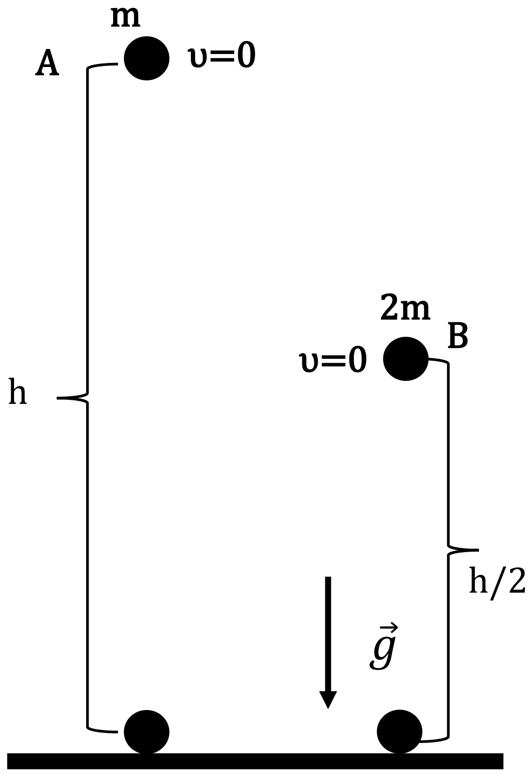
4.4. Η ενέργεια που προσέφερε ο Μάριος στο κιβώτιο, είναι ίση με το έργο της δύναμης που ασκούσε σε αυτό:

$$E_M = W_{F_M} = F_M \cdot \Delta x_1 = 50 \cdot 2\ \mathrm{J} = 100\ \mathrm{J}$$

2.1

Α. Σωστή είναι η απάντηση **(α). Μονάδες 4**

Β. Ενδεικτική δικαιολόγηση:



Εφόσον θεωρούμε αμελητέα την αντίσταση του αέρα, δηλ. η μοναδική δύναμη που ασκείται σε κάθε σώμα είναι το βάρος του, άρα η Μηχανική Ενέργεια κάθε σώματος διατηρείται σταθερή. **(Μονάδα 1)**

Για το σώμα Α έχουμε:

$$K_{αρχ(A)} + U_{αρχ(A)} = K_{τελ(A)} + U_{τελ(A)}$$

$$\Rightarrow 0 + mgh = \frac{1}{2}mv_A^2 + 0 \Rightarrow \boldsymbol{v_A} = \sqrt{\boldsymbol{2gh}} \;\; (1)$$

(Μονάδες 3)

Για το σώμα Β έχουμε:

$$K_{αρχ(B)} + U_{αρχ(B)} = K_{τελ(B)} + U_{τελ(B)}$$

$$\Rightarrow 0 + 2mg\frac{h}{2} = \frac{1}{2}2mv_B^2 + 0 \Rightarrow \boldsymbol{v_B} = \sqrt{\boldsymbol{gh}} \;\; (2)$$

(Μονάδες 3)

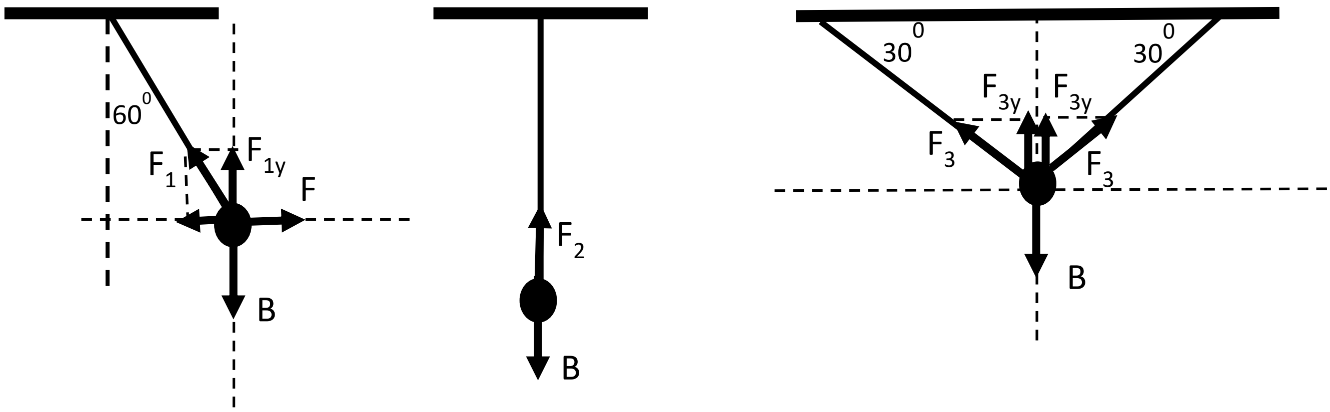
Διαιρώντας τις (1) και (2) κατά μέλη προκύπτει:

$\frac{v_A}{v_B} = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{gh}} \Rightarrow \frac{v_A}{v_B} = \sqrt{2}$ **(Μονάδα 1)**

2.2

Α. Σωστή είναι η απάντηση **(β)**: **Μονάδες 4**

Β. Ενδεικτική δικαιολόγηση:



(1) **(2)** **(3)**

Σχεδίαση δυνάμεων- Ανάλυση σε άξονες. **(Μονάδες 4)**

Στην περίπτωση (1): $ΣF_y = 0 \Rightarrow F_{1y} = B \Rightarrow F_1 συν60^0 = B \Rightarrow \frac{F_1}{2} = B \Rightarrow \boldsymbol{F_1 = 2B\;(1)}$ **(Μονάδες 2)**

Στην περίπτωση (2): $ΣF_y = 0 \Rightarrow \boldsymbol{F_2 = B\;(2)}$ **(Μονάδα 1)**

Στην περίπτωση (3): $ΣF_y = 0 \Rightarrow 2F_{3y} = B \Rightarrow 2F_3 συν60^0 = B \Rightarrow 2\frac{F_3}{2} = B \Rightarrow \boldsymbol{F_3 = B\;(3)}$ **(Μονάδες 2)**

Άρα $\boldsymbol{F_1} > \boldsymbol{F_2} = \boldsymbol{F_3}$

2.1

Α. Σωστή η απάντηση **(γ)**. **(*Μονάδες 4*)**

Β. Ενδεικτική Δικαιολόγηση

Από την εφαρμογή του 2[ου] νόμου του Νεύτωνα για το σώμα μάζας m έχουμε:

$F = m \cdot a \Rightarrow a = \frac{F}{m}\,(1)$

(*Μονάδες 2*)

Από την εφαρμογή του 2[ου] νόμου του Νεύτωνα για το κομμάτι μάζας $m/2$ έχουμε:

$2F = \frac{m}{2} \cdot a' \Rightarrow a' = 4\frac{F}{m}\,(\mathbf{2})$

(*Μονάδες 2*)

Από τις (1) και (2) προκύπτει $\boldsymbol{\alpha' = 4\alpha}$

(*Μονάδα 1*)

Άρα: $\pi = \frac{\alpha'-\alpha}{\alpha}100\% \Rightarrow \pi = \frac{4\alpha-\alpha}{\alpha}100\% = \frac{3\alpha}{\alpha}100\% \Rightarrow \boldsymbol{\pi = 300\%}$ (αύξηση κατά 300%).

(*Μονάδες 3*)

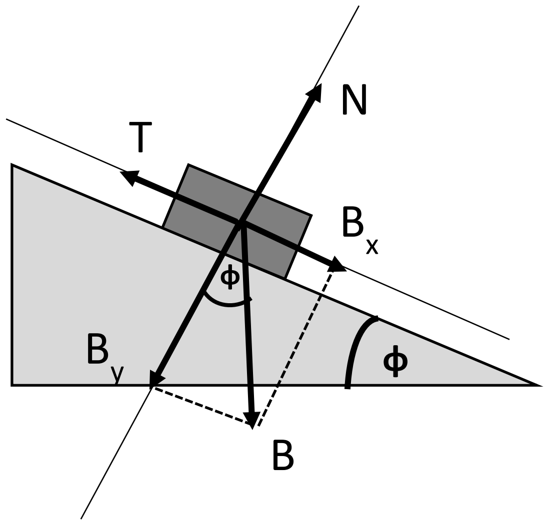
2.2

Α. Σωστή η απάντηση **(α)** **(*Μονάδες 4*)**

Β. Ενδεικτική Δικαιολόγηση

Και για τις 2 περιπτώσεις (α) και (β):

Σχεδίαση δυνάμεων – Ανάλυση σε άξονες



(*Μονάδες 3*)

Για κάθε τιμή της γωνίας φ, στον άξονα γγ' έχουμε $\Sigma F_y = 0$

$\Rightarrow N = B_y \Rightarrow N = mg\sigma\upsilon\nu\varphi \xRightarrow{T=\mu\cdot N} T = \mu mg\sigma\upsilon\nu\varphi$

(*Μονάδα 1*)

Το έργο της τριβής δίνεται (κατ΄ απόλυτη τιμή) από την σχέση:

$$|W_T| = \mu mg\sigma\upsilon\nu\varphi \cdot s \quad (1)$$

(*Μονάδα 1*)

Άρα:

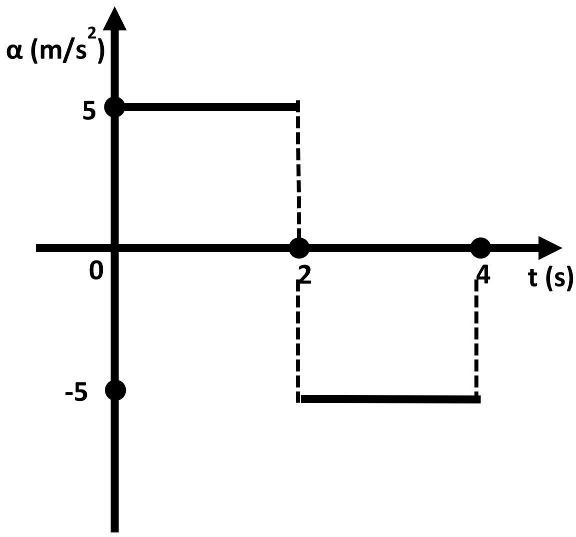
$$\left.\begin{array}{l} \left|W_{T(\alpha)}\right| = \mu mg\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot s \quad (2) \\ \text{και} \\ \left|W_{T(\beta)}\right| = \mu mg\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot s \quad (3) \end{array}\right\} \text{Από τις (2) και (3) προκύπτει: } \left|\boldsymbol{W_{T(\alpha)}}\right| > \left|\boldsymbol{W_{T(\beta)}}\right|$$

(*Μονάδες 4*)

2.1

Α. Σωστή απάντηση είναι η **(β)**. **(*Μονάδες 4)***

Β. Ενδεικτική Δικαιολόγηση



Σύμφωνα με το διάγραμμα, το κινητό εκτελεί:

- Από $\boldsymbol{t_1 = 2\ s}$ έως $\boldsymbol{t_2 = 4\ s}$, Ευθύγραμμη Ομαλά Επιβραδυνόμενη Κίνηση με α = -5 m/s² και η αρχική του ταχύτητα για το συγκεκριμένο χρονικό διάστημα προκύπτει:

$$\alpha = \frac{\Delta \upsilon}{\Delta t} = \frac{\upsilon_2 - \upsilon_1}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow -\frac{5\ m}{s^2} = \frac{\frac{0\ m}{s} - \upsilon_1}{2s} \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon_1 = 10\ m/s}$$

Άρα την χρονική στιγμή t_1 = 2 s το κινητό έχει ταχύτητα μέτρου $10\ m/s$.

(*Μονάδες 4)*

- Από $\boldsymbol{t_0 = 0\ s}$ έως $\boldsymbol{t_1 = 2\ s}$, Ευθύγραμμη Ομαλά Επιταχυνόμενη Κίνηση με α' = 5 m/s²

$$\alpha' = \frac{\Delta \upsilon}{\Delta t} = \frac{\upsilon_1 - \upsilon_0}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow 5\ m/s^2 = \frac{\frac{10\ m}{s} - \upsilon_0}{2s} \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon_0 = 0 m/s}$$

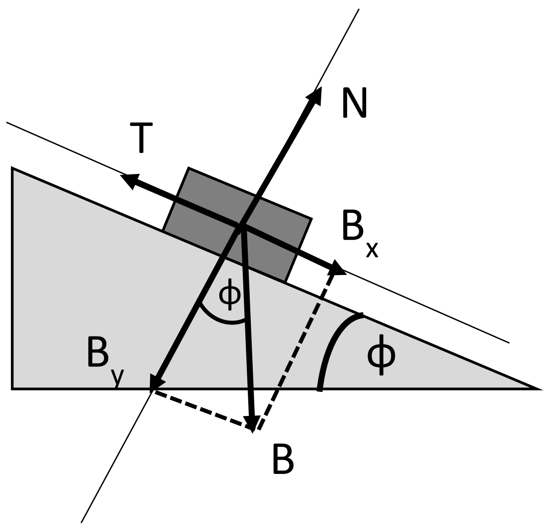
(*Μονάδες 4)*

2.2

Α. Σωστή απάντηση είναι η **(γ)**. **(*Μονάδες 4)***

Β. Ενδεικτική Δικαιολόγηση

Σχεδίαση δυνάμεων-Ανάλυση σε άξονες (***Μονάδες 3)***



Επειδή το σώμα ολισθαίνει επάνω στο κεκλιμένο επίπεδο κινούμενο με σταθερή ταχύτητα θα ισχύουν:

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow B_x = T_{o\lambda} \Rightarrow mg\eta\mu 45^0 = T_{o\lambda} \; (1)$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow B_y = N \Rightarrow mg\sigma\upsilon\nu 45^0 = N \; (2)$$

(*Μονάδες 3)*

Σύμφωνα με τον νόμο της τριβής ολίσθησης:

$$T_{o\lambda} = \mu_{o\lambda} N \xRightarrow{(1),(2)} mg\eta\mu 45^0 = \mu_{o\lambda} mg\sigma\upsilon\nu 45^0$$

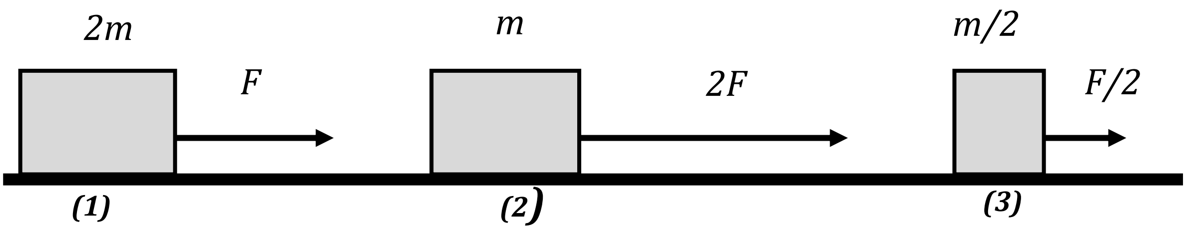
$$\Rightarrow \mu_{o\lambda} = \frac{\eta\mu 45^0}{\sigma\upsilon\nu 45^0} = 1$$

(*Μονάδες 3)*

2.1 13511

A. Σωστή η απάντηση **(α)** ***(Μονάδες 4)***

B. Ενδεικτική Δικαιολόγηση



Από την εφαρμογή του 2ου νόμου του Νεύτωνα για το σώμα (1) μάζας $2m$ έχουμε:

$F = 2m \cdot a_1 \Rightarrow a_1 = \frac{F}{2m}$ (1)

(Μονάδες 2)

Από την εφαρμογή του 2ου νόμου του Νεύτωνα για το σώμα (2) μάζας m έχουμε:

$2F = m \cdot a_2 \Rightarrow a_2 = \frac{2F}{m}$ (2)

(Μονάδες 2)

Από την εφαρμογή του 2ου νόμου του Νεύτωνα για το σώμα (3) μάζας $m/2$ έχουμε:

$\frac{F}{2} = \frac{m}{2} \cdot a_3 \Rightarrow a_3 = \frac{F}{m}$ (3)

(Μονάδες 2)

Από τις (1), (2) και (3) προκύπτει: $\alpha_3 = 2\alpha_1$, $\alpha_2 = 2\alpha_3 = 4\alpha_1$

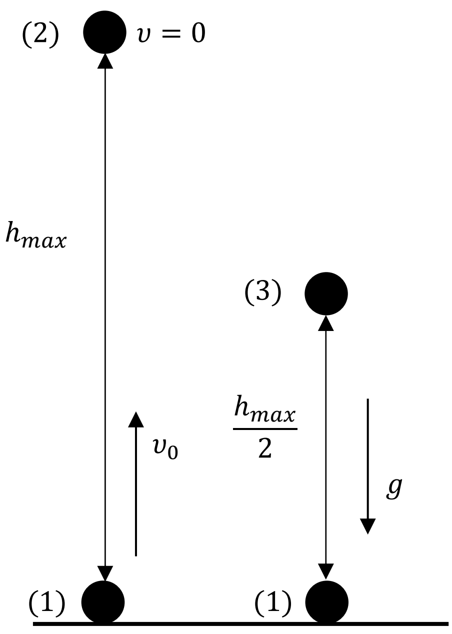
Άρα : $\alpha_2 > \alpha_3 > \alpha_1$

(Μονάδες 2)

2.2

A. Σωστή η απάντηση **(β)** ***(Μονάδες 4)***

B. Ενδεικτική Δικαιολόγηση



Εφαρμόζουμε το θεώρημα Έργου-Ενέργειας από την θέση (1) έως την θέση (2):

$$K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = W_{o\lambda} \Rightarrow 0 - \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 = -mgh_{max}$$

$$\Rightarrow h_{max} = \frac{\upsilon_0^2}{2g} \ (1)$$

(Μονάδες 4)

Εφαρμόζουμε το θεώρημα Έργου-Ενέργειας από την θέση (1) έως την θέση (3):

$$K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = W_{o\lambda} \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 = -mg\frac{h_{max}}{2}$$

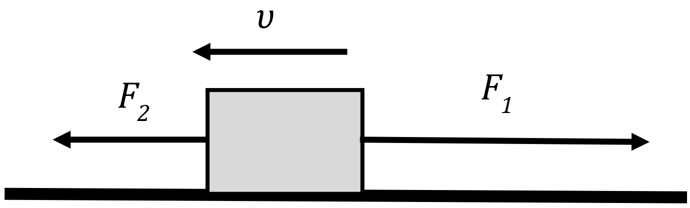
$$\overset{(1)}{\Rightarrow} \upsilon^2 = \upsilon_0^2 - 2g\frac{\upsilon_0^2}{4g} \Rightarrow \upsilon^2 = \upsilon_0^2 - \frac{\upsilon_0^2}{2} \Rightarrow \upsilon^2 = \frac{\upsilon_0^2}{2} \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon = \frac{\upsilon_o}{\sqrt{2}}}$$

(Μονάδες 5)

2.1

Α. Σωστή απάντηση είναι η **(β)**. **(*Μονάδες 4)***

Β. Ενδεικτική δικαιολόγηση:



Επειδή $F_1 > F_2$ η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα θα έχει την φορά της δύναμης μεγαλύτερου μέτρου, δηλ. φορά προς τα δεξιά. Άρα η συνισταμένη δύναμη θα έχει φορά αντίθετη της ταχύτητας με αποτέλεσμα το μέτρο της ταχύτητας να μειώνεται.

Εφαρμόζοντας τον 2ο Νόμο του Νεύτωνα, με θετική φορά προς τα δεξιά, έχουμε:

$F_1 - F_2 = m \cdot a_1$ (1) **(*Μονάδες 4)***

Όταν καταργηθεί η F_2 και πάλι το μέτρο της ταχύτητας θα μειώνεται, καθώς η φορά της F_1 είναι αντίθετη της ταχύτητας του σώματος.

Εφαρμόζοντας και πάλι τον 2ο Νόμο του Νεύτωνα έχουμε: $F_1 = m \cdot a_2$ (2)

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι $a_1 < a_2$ άρα ο ρυθμός μείωσης του μέτρου της ταχύτητας αυξάνεται. **(*Μονάδες 4)***

2.2

Α. Σωστή απάντηση είναι η (**γ**). **(*Μονάδες 4)***

Β. Ενδεικτική δικαιολόγηση:

Αν στο σώμα ασκείται δύναμη $F = 75$ N αντίρροπη της ταχύτητας, τότε εφαρμόζοντας το θεώρημα έργου-ενέργειας υπολογίζουμε:

$$\frac{1}{2}m \cdot \frac{\upsilon_0^2}{4} - \frac{1}{2}m \cdot \upsilon_0^2 = -F \cdot \Delta x$$

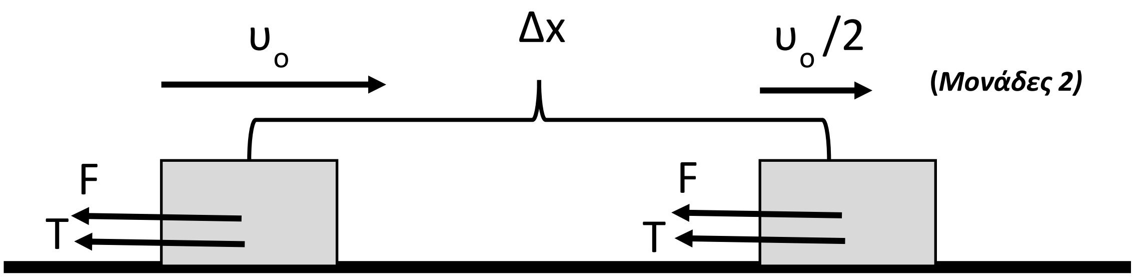
$$\Rightarrow \frac{1}{2}10Kg \cdot \frac{(2\,{}^{m}/_{s})^2}{4} - \frac{1}{2}10Kg \cdot (2\,{}^{m}/_{s})^2 = -75N \cdot \Delta x$$

$$\Rightarrow \Delta x = 0{,}2 \text{ m}$$

(*Μονάδες 3)*

Το ίδιο αποτέλεσμα προκύπτει με την εφαρμογή του θεωρήματος έργου- ενέργειας και στη περίπτωση όπου ασκούνται στο σώμα δύναμη Τριβής ολίσθησης $T = 150$ N και $F = 75$ N ομόρροπη της ταχύτητας. Τότε $\Sigma F = F - T = 75\ \mathrm{N} - 150\ \mathrm{N} = -75\ \mathrm{N}$ (αντίρροπη της ταχύτητας). ***(Μονάδα 1)***

Το σώμα όμως σταματά αφού μετατοπιστεί κατά $\Delta x = 0{,}1m$. Άρα δέχεται δύναμη $F = 75N$ αντίρροπη της ταχύτητας και $T = 75N$ οπότε:



(Μονάδες 2)

$$\frac{1}{2}m \cdot \frac{\upsilon_0^2}{4} - \frac{1}{2}m \cdot \upsilon_0^2 = -F \cdot \Delta x - T \cdot \Delta x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}10Kg \cdot \frac{(2\,{}^{m}/_{s})^2}{4} - \frac{1}{2}10Kg \cdot (2\,{}^{m}/_{s})^2 = -75N \cdot \Delta x - 75N \cdot \Delta x$$

$$\Rightarrow 5Kg \cdot {}^{m^2}/_{s^2} - 20Kg \cdot {}^{m^2}/_{s^2} = -150N \cdot \Delta x \Rightarrow \Delta x = \mathbf{0,1m}$$

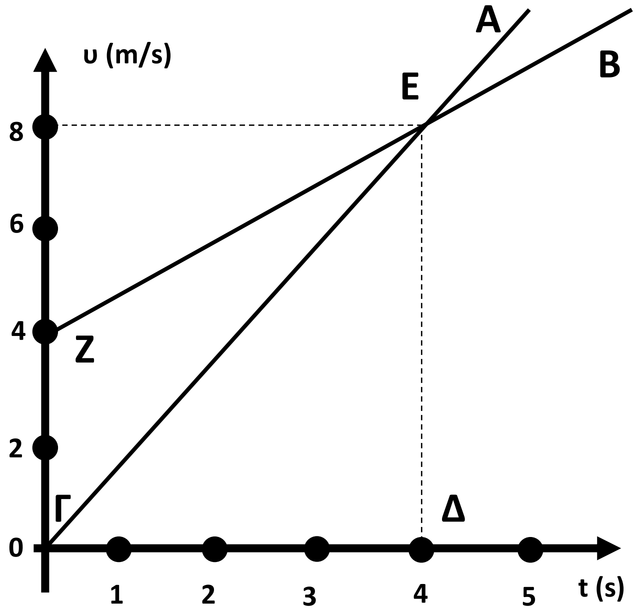
(Μονάδες 3)

2.1

13513

Α. Σωστή είναι η απάντηση **(β).** ***(Μονάδες 4)***

Β. Ενδεικτική δικαιολόγηση.



Η τιμή της επιτάχυνσης κινητού προκύπτει από την σχέση: $\alpha = \frac{\Delta\upsilon}{\Delta t}$, οπότε με βάση το διπλανό διάγραμμα έχουμε:

Για το κινητό Α: $\alpha_A = \frac{\Delta\upsilon}{\Delta t} = \frac{\upsilon_{\tau\varepsilon\lambda,A} - \upsilon_{\alpha\rho\chi,A}}{\Delta t} = \frac{8\frac{m}{s} - 0\frac{m}{s}}{4s}$

$$\Rightarrow \alpha_A = 2\frac{m}{s^2}$$

Για το κινητό Β: $\alpha_B = \frac{\Delta\upsilon}{\Delta t} = \frac{\upsilon_{\tau\varepsilon\lambda,B} - \upsilon_{\alpha\rho\chi,B}}{\Delta t} = \frac{8\frac{m}{s} - 4\frac{m}{s}}{4s}$

$$\Rightarrow \alpha_B = 1\frac{m}{s^2}$$

(Μονάδες 2Χ2=4)

Οι μετατοπίσεις των δύο κινητών για το χρονικό διάστημα των $4\ s$ υπολογίζονται από το διάγραμμα.

Εμβαδόν τριγώνου ΓΔΕ: $\Delta x_A = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4 = +16\ \mathrm{m}$, $\quad s_A = |\Delta x_A|$

Εμβαδόν τραπεζίου ΓΔΕΖ: $\Delta x_B = \frac{1}{2} \cdot (4+8) \cdot 4 = +24\ \mathrm{m}$, $\quad s_B = |\Delta x_B|$

Άρα το κινητό Β προηγείται του Α κατά $d = S_B - S_A = 8\ \mathrm{m}$ ***(Μονάδες 4)***

(Β τρόπος)

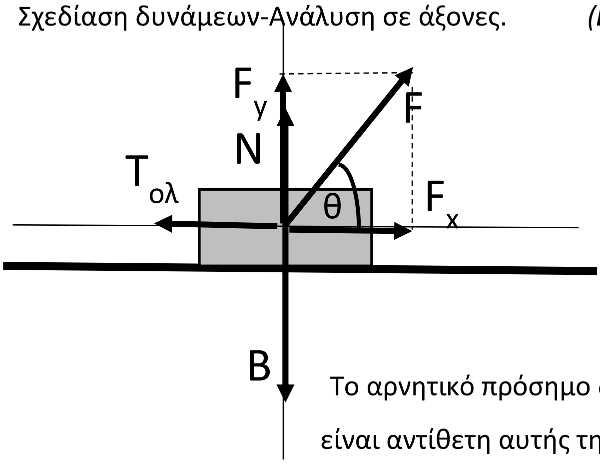
Υπολογισμός του εμβαδού του τριγώνου ΓΕΖ, που είναι η διαφορά των εμβαδών του τραπεζίου ΓΔΕΖ και του τριγώνου ΓΔΕ.

2.2

Α. Σωστή είναι η απάντηση **(γ).** ***(Μονάδες 4)***

Β. Ενδεικτική δικαιολόγηση.

Σχεδίαση δυνάμεων-Ανάλυση σε άξονες. ***(Μονάδες 3)***



Εφόσον το σώμα κινείται με σταθερή ταχύτητα ισχύει: $\Sigma F = 0 \Rightarrow \Sigma F_x = 0 \Rightarrow T = F_x$

$\Rightarrow T = F \cdot \sigma\upsilon\nu\theta\ (1)$ ***(Μονάδες 3)***

Άρα: $W_{T o\lambda} = -T \cdot \Delta x \overset{(1)}{\Rightarrow} W_{T o\lambda} = -F \cdot \Delta x \cdot \sigma\upsilon\nu\theta$

Το αρνητικό πρόσημο δικαιολογείται, από το ότι η φορά της δύναμης της Τριβής είναι αντίθετη αυτής της κίνησης. ***(Μονάδες 2+1=3)***

2.1

Α. Σωστή είναι η απάντηση **(α).** ***(Μονάδες 4)***

Β. Ενδεικτική δικαιολόγηση.

Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Κ.Ε για το σώμα Α από το έδαφος μέχρι την θέση μέγιστου ύψους:

$$K_{\tau\varepsilon\lambda.} - K_{\alpha\rho\chi.} = W_{0\lambda} \Rightarrow 0 - \frac{1}{2}m_A \cdot \upsilon_A^2 = -m_A \cdot g \cdot h_A \Rightarrow h_A = \frac{\upsilon_A^2}{2 \cdot g} \ (1)$$

Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Κ.Ε για το σώμα Β από το έδαφος μέχρι την θέση μέγιστου ύψους:

$$K_{\tau\varepsilon\lambda.} - K_{\alpha\rho\chi.} = W_{0\lambda} \Rightarrow 0 - \frac{1}{2}m_B \cdot \upsilon_B^2 = -m_B \cdot g \cdot h_B \Rightarrow h_B = \frac{\upsilon_B^2}{2 \cdot g} \ (2)$$

(Μονάδες 2Χ3=6)

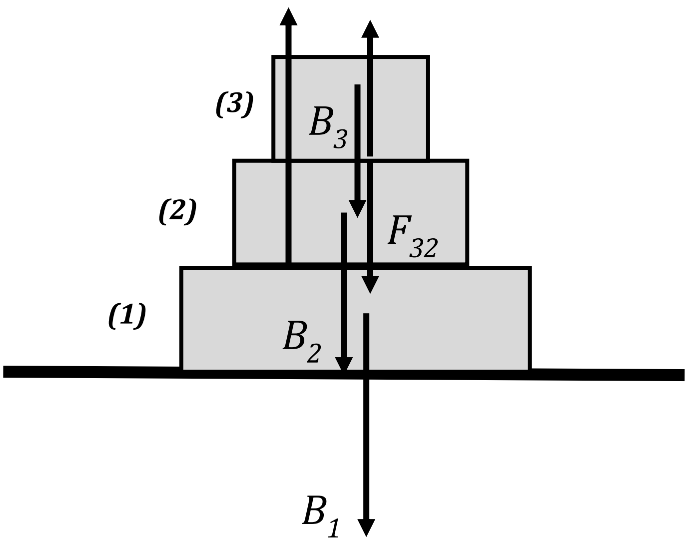
Διαιρώντας τις (1) και (2) κατά μέλη και λαμβάνοντας υπόψιν ότι $\upsilon_A = 2\upsilon_B$ προκύπτει $\frac{h_A}{h_B} = 4$

(Μονάδες 2)

2.2

Α. Σωστή είναι η απάντηση **(β).** ***(Μονάδες 4)***

Β. Ενδεικτική δικαιολόγηση.



Όλα τα σώματα ισορροπούν άρα σε κάθε σώμα $F_{o\lambda} = 0 \text{ N}$.

(Μονάδα 1)

Το κιβώτιο (3) δέχεται το βάρος του B_3 και την δύναμη F_{23} από το κιβώτιο (2).

Επειδή ισορροπεί $B_3 = F_{23} = 40 \text{ N}$

(Μονάδες 2)

Το κιβώτιο (2) δέχεται:

- από το κιβώτιο (3) δύναμη $F_{32} = F_{23} = 40 \text{ N}$ (δράση-αντίδραση),
- το βάρος του $B_2 = 50 \text{ N}$,
- από το κιβώτιο (1) δύναμη F_{12}.

Επειδή ισορροπεί

$B_2 + F_{32} = F_{12} \Rightarrow F_{12} = 90 \text{ N}$

(Μονάδες 6)

2.1 Σωστή η απάντηση **(γ)**

Ενδεικτική Αιτιολόγηση

Το κινητό εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση χωρίς αρχική ταχύτητα, επομένως

$$\upsilon = \alpha \Delta t \quad \Rightarrow \Delta t = \frac{\upsilon}{\alpha} \quad (1)$$

Το διάστημα δίνεται από τη σχέση

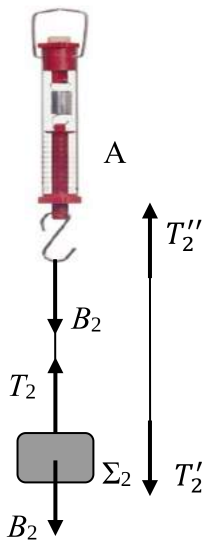
$$s = \frac{1}{2}\alpha(\Delta t)^2 \quad \overset{(1)}{\Rightarrow} \ s = \frac{1}{2}\alpha\left(\frac{\upsilon}{\alpha}\right)^2 \quad \text{και τελικά } \ s = \frac{\upsilon^2}{2\alpha}$$

2.2 Σωστή η απάντηση **(α)**

Ενδεικτική Αιτιολόγηση

Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα Σ_2 είναι το βάρος του προς τα κάτω και η τάση του νήματος προς τα πάνω. Το σώμα Σ_2 ισορροπεί, επομένως:

$$\Sigma F_2 = 0 \ \Rightarrow \ T_2 - B_2 = 0 \ \Rightarrow \ T_2 = 80\ \text{N}$$



Λόγω δράσης-αντίδρασης (3ος Νόμος του Νεύτωνα) και το σώμα Σ_2 θα ασκεί στο νήμα αντίθετη δύναμη μέτρου $T_2' = 80$ N.

Το νήμα είναι τεντωμένο και αβαρές, επομένως η δύναμη που δέχεται το νήμα από το δυναμόμετρο A είναι $T_2'' = 80$ N.

Και τελικά, λόγω δράσης-αντίδρασης, το νήμα ασκεί στο δυναμόμετρο A δύναμη 80 N (ίση με το βάρος B_2), που είναι και η ένδειξη του δυναμόμετρου A.

Το συνολικό βάρος που είναι κρεμασμένο στο νήμα που είναι συνδεδεμένο στο κάτω άκρο του δυναμόμετρου B είναι αυτό και των δύο σωμάτων δηλαδή 130 N.

Με ανάλογους συλλογισμούς, η ένδειξη του δυναμόμετρου B είναι 130 N.

2.1 Σωστή η απάντηση **(β)**

Ενδεικτική Αιτιολόγηση

Το συνολικό βάρος των σωμάτων που είναι κρεμασμένα στο νήμα που είναι συνδεδεμένο στο κάτω άκρο του δυναμόμετρου Α είναι $B_{12} = 130\ \mathrm{N}$.

Έχουμε:

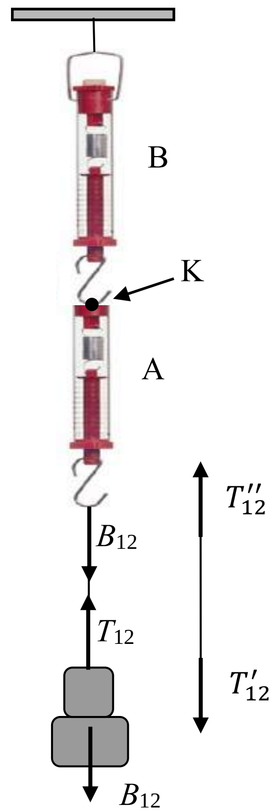
$$\Sigma F_{12} = 0 \Rightarrow T_{12} - B_{12} = 0 \Rightarrow T_{12} = 130\ \mathrm{N}$$

Λόγω δράσης-αντίδρασης (3ος Νόμος του Νεύτωνα) και το σώμα Σ_2 θα ασκεί στο νήμα αντίθετη δύναμη μέτρου $T'_{12} = 130\ \mathrm{N}$.

Το νήμα είναι τεντωμένο και αβαρές, επομένως η δύναμη που δέχεται το νήμα από το δυναμόμετρο Α είναι $T''_{12} = 130\ \mathrm{N}$.

Και τελικά, λόγω δράσης-αντίδρασης, το νήμα ασκεί στο δυναμόμετρο Α δύναμη 130 N (ίση με το βάρος B_{12}), που είναι και η ένδειξη του δυναμόμετρου Α.

Το συνολικό βάρος που είναι κρεμασμένο στο δυναμόμετρο Β (στο σημείο Κ) είναι προφανώς 130 N, που είναι και η ένδειξη του δυναμόμετρου Β.



2.2 Σωστή η απάντηση **(β)**

Ενδεικτική Αιτιολόγηση

Για το σώμα m_2, μετά την ανάλυση των δυνάμεων που ασκούνται σε αυτό, έχουμε:

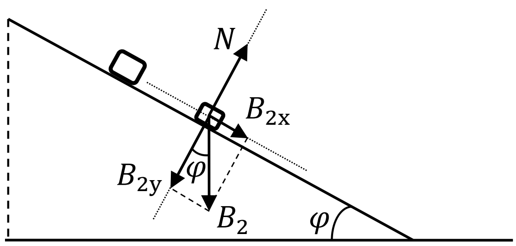
$\Sigma F_{2x} = m_2 a_2 \Rightarrow B_2 \eta\mu\varphi = m_2 a_2 \Rightarrow$

$m_2 g \eta\mu\varphi = m_2 a_2$ και τελικά

$$a_2 = g\eta\mu\varphi$$

Με όμοιο τρόπο για το σώμα m_1 έχουμε:

$$a_1 = g\eta\mu\varphi$$



Στο χρονικό διάστημα Δt που χρειάζεται το σώμα m_2 για να φτάσει στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου διανύει απόσταση

$d_2 = \frac{1}{2} a_2 (\Delta t)^2 \xRightarrow{\Delta t = t - t_0} d_2 = \frac{1}{2} g\eta\mu\varphi t^2$ (1)

Στο ίδιο χρονικό Δt το σώμα m_1 θα έχει διανύσει απόσταση $d_1 = \frac{1}{2} g\eta\mu\varphi t^2$ (2)

Από τις σχέσεις (1) και (2) $d_1 = d_2$, επομένως η απόσταση μεταξύ των δύο σωμάτων θα παραμείνει η ίδια.

2.1 Σωστή η απάντηση **(β)**

Ενδεικτική Αιτιολόγηση

Το συνολικό βάρος που είναι κρεμασμένο στα νήματα, στο τρίτο σχήμα, είναι αυτό και των δύο σωμάτων δηλαδή $B_{12} = 140$ N.

Θεωρώντας τα δύο σώματα ως ένα (συσσωμάτωμα) και δεδομένου ότι οι δύο τάσεις είναι ίσες μεταξύ τους αφού τα δυναμόμετρα είναι ίδια έχουμε:

$$\Sigma F_{12} = 0 \Rightarrow 2T - B_{12} = 0 \Rightarrow T = 70 \text{ N}$$

Λόγω δράσης-αντίδρασης (3ος Νόμος του Νεύτωνα) και το σώμα θα ασκεί σε κάθε νήμα αντίθετη δύναμη.

Τα νήματα είναι τεντωμένα και αβαρή, επομένως η δύναμη που δέχεται κάθε νήμα από το δυναμόμετρο είναι 70 N.

Και τελικά, λόγω δράσης-αντίδρασης, κάθε νήμα ασκεί στο αντίστοιχο δυναμόμετρο δύναμη 70 N.

2.2 Σωστή η απάντηση **(α)**

Ενδεικτική Αιτιολόγηση

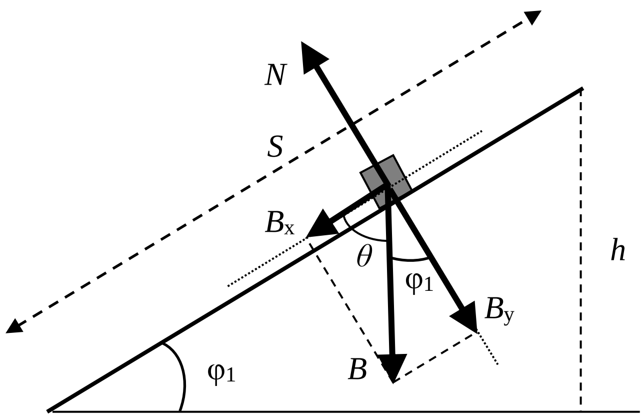
Για το κεκλιμένο επίπεδο (Α) το έργο του βάρους του σώματος είναι:

$W_A = B \cdot S \cdot \sigma\upsilon\nu\theta$ ή

$W_A = B \cdot S \cdot \eta\mu\varphi_1$ ή

$W_A = B \cdot S \cdot \frac{h}{S}$ και τελικά

$W_A = B \cdot h$ (1)



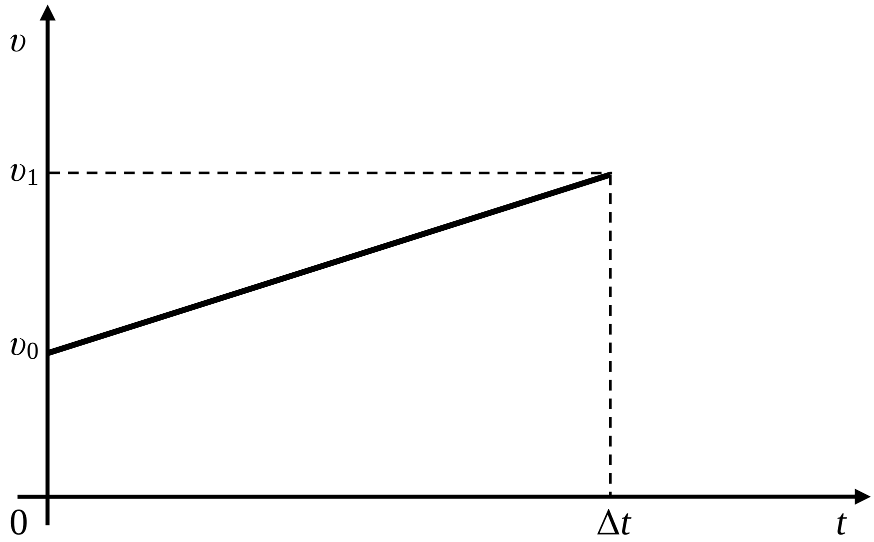
Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία και για το κεκλιμένο επίπεδο (Β) καταλήγουμε ότι

$W_B = B \cdot h$ (2)

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε τελικά $W_A = W_B$.

2.1 Σωστή η απάντηση **(β)**

Ενδεικτική Αιτιολόγηση



Το εμβαδόν του τραπεζίου που περικλείεται μεταξύ της γραμμής που παριστά την ταχύτητα και των αξόνων υ, t είναι ίσο με τη μετατόπιση του οχήματος. Επομένως:

$\Delta x = \frac{\upsilon_1+\upsilon_0}{2}\Delta t,$ όπου Δt η χρονική διάρκεια της κίνησης.

αλλά $S = |\Delta x|$

και τελικά $S = \frac{\upsilon_1+\upsilon_0}{2}\Delta t$

2.2 Σωστή η απάντηση **(γ)**

Ενδεικτική Αιτιολόγηση

Το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη επιταχυνόμενη κίνηση με το μέτρο της επιτάχυνσής του να είναι της μορφής:

$\alpha = -K \cdot t \quad (1)$, όπου K μία θετική σταθερά.

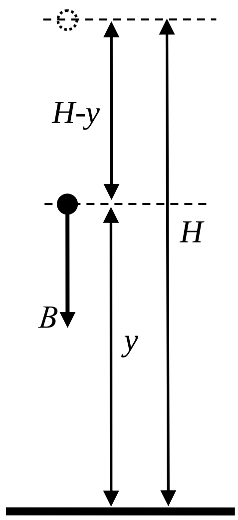
Από τον 2ο Νόμο του Νεύτωνα για το μέτρο της δύναμης F έχουμε

$F = m \cdot a \overset{(1)}{\Rightarrow} F = -m \cdot K \cdot t$ δηλ. η δύναμη μειώνεται γραμμικά σε σχέση με το χρόνο.

2.1 Σωστή η απάντηση **(γ)**

<u>Ενδεικτική Αιτιολόγηση</u>

Το έργο του βάρους του σώματος καθώς το σώμα πέφτει προς το έδαφος (με τη βοήθεια του σχήματος) είναι:



$W = B \cdot (H - y)$ ή

$W = B \cdot H - B \cdot y$ (1)

Από τη σχέση (1), το έργο του βάρους μειώνεται γραμμικά με το ύψος σύμφωνα με την γενική σχέση

$$W = \alpha \cdot y + \beta, \text{ όπου } \alpha = -B \text{ και } \beta = B \cdot H$$

2.2 Σωστή η απάντηση **(β)**

<u>Ενδεικτική Αιτιολόγηση</u>

Για τις σφαίρες Α και Β ισχύουν αντίστοιχα:

$\frac{h}{2} = \frac{1}{2} g t_A^2$ (1)

και

$h = \frac{1}{2} g t_B^2$ (2)

Διαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε $t_B = \sqrt{2} t_A$

2.1 Σωστή η απάντηση **(β)**

Ενδεικτική Αιτιολόγηση

Το κιβώτιο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, αφού η ταχύτητα του αυξάνεται ανάλογα με το χρόνο ($\Delta\upsilon = at$).

Επομένως η επιτάχυνση του κιβωτίου είναι σταθερή, και από το 2ο Νόμο του Νεύτωνα ($F = ma$) και η δύναμη που ασκείται στο κιβώτιο είναι σταθερή.

2.2 Σωστή η απάντηση **(α)**

Ενδεικτική Αιτιολόγηση

Η μηχανική ενέργεια του σφαιριδίου διατηρείται, επομένως:

$$E_{MHX} = K + U \overset{K=U}{\Longrightarrow} E_{MHX} = 2U \quad (1)$$

Αλλά $E_{MHX} = U_{max} = mgh$ (2)

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι η δυναμική ενέργεια του σφαιριδίου γίνεται ίση με την κινητική του ενέργεια σε ύψος $\frac{h}{2}$.

Για τα ύψη $\frac{h}{2}$ και h ισχύουν αντίστοιχα:

$\frac{h}{2} = \frac{1}{2}gt_0^2$ (3) και

$h = \frac{1}{2}gt_{o\lambda}^2$ (4)

Διαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (3) και (4) έχουμε $t_{o\lambda} = \sqrt{2}t_0$

2.1 Σωστή η απάντηση **(β)**

Ενδεικτική Αιτιολόγηση

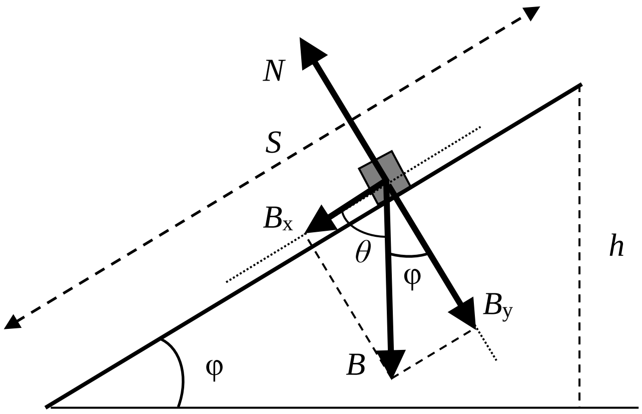
Για το κεκλιμένο επίπεδο το έργο του βάρους του σώματος είναι:

$W_A = B \cdot S \cdot συνθ$ ή

$W_A = B \cdot S \cdot ημφ$ ή

$W_A = B \cdot S \cdot \frac{h}{S}$ και τελικά

$$W_A = m \cdot g \cdot h$$



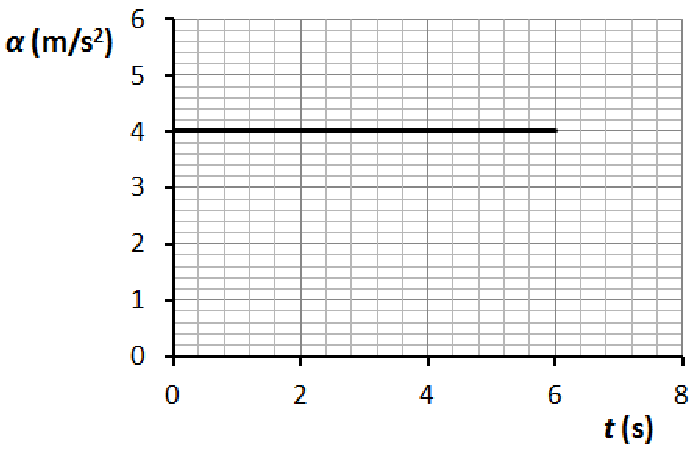
2.2

Ενδεικτική Αιτιολόγηση

A) Με βάση τα δεδομένα έχουμε:

t(s)	*a*(m/s²)	*υ*(m/s)
2	4	8
4	4	16
6	4	24

B) Το εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ των αξόνων *a*, *t* και της ευθείας που παριστά την επιτάχυνση για το χρονικό διάστημα 0 s - 6 s είναι ίσο με 24 m/s.



Το εμβαδόν ισούται με την μεταβολή της ταχύτητας στο αντίστοιχο χρονικό διάστημα

$Δυ = υ_{τελικο} - υ_0$

αλλά $υ_0 = 0\, m/s$ και τελικά $υ_{τελικο} = 24\, m/s$, όπως έχει υπολογιστεί και στον πίνακα του ερωτήματος (Α).

2.1 Σωστή η απάντηση **(β)**

Ενδεικτική Αιτιολόγηση

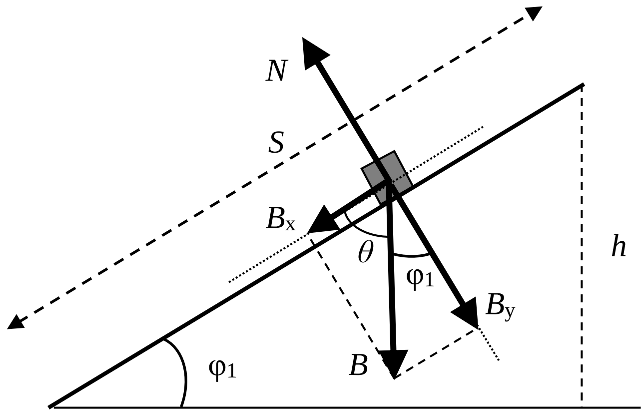
Το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση.

Επομένως η επιβράδυνση του σώματος είναι σταθερή, οπότε, από το 2ο Νόμο του Νεύτωνα ($F = ma$) και η δύναμη που ασκείται στο κιβώτιο είναι σταθερή κατά μέτρο και κατεύθυνση.

2.2 Σωστή η απάντηση **(γ)**

Ενδεικτική Αιτιολόγηση

Για το κεκλιμένο επίπεδο (Α) το έργο του βάρους του σώματος είναι:



$W_A = B \cdot S \cdot συνθ$ ή

$W_A = B \cdot S \cdot ημφ_1$ ή

$W_A = B \cdot S \cdot \frac{h}{S}$ και τελικά

$W_A = B \cdot h$ (1)

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία και για το κεκλιμένο επίπεδο (Β) καταλήγουμε ότι

$W_B = B \cdot h$ (2)

Για την ελεύθερη πτώση έχουμε:

$W_Γ = B \cdot h \cdot συν\,φ$ ή $W_Γ = B \cdot h \ (φ = 0^o)$ (3)

Από τις σχέσεις (1), (2) και (3) έχουμε τελικά $W_A = W_B = W_Γ$

2.1 Σωστή η απάντηση **(β)**

Ενδεικτική Αιτιολόγηση

Η μηχανική ενέργεια του σώματος διατηρείται, επομένως:

$$U = mgy \quad (1) \text{ και}$$

$$E_{MHX} = K + U \Rightarrow K = E_{MHX} - mgy \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι το σωστό διάγραμμα είναι το ΙΙ.

2.2 Σωστή η απάντηση **(α)**

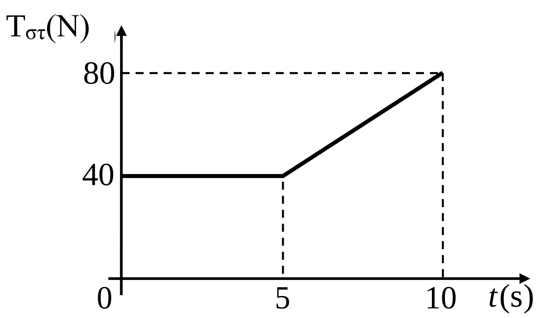
Ενδεικτική Αιτιολόγηση

Το σώμα παραμένει ακίνητο επομένως η τριβή είναι στατική.

Από το 1ο Νόμο του Νεύτωνα έχουμε:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F - T_{\sigma\tau} = 0 \Rightarrow T_{\sigma\tau} = F$$

Από τη παραπάνω σχέση προκύπτει ότι η $T_{\sigma\tau}$ είναι κάθε χρονική στιγμή ίση με την ασκούμενη δύναμη F, επομένως η γραφική παράσταση του μέτρου της είναι ακριβώς ίδια με αυτή της δοθείσας δύναμης F.



Γνωρίζουμε ότι η τριβή ολίσθησης και η οριακή τριβή έχουν σταθερό μέτρο. Άρα η ασκούμενη τριβή δεν μπορεί παρά να είναι στατική.

2.1 Σωστή η απάντηση **(γ)**

Ενδεικτική Αιτιολόγηση

Το σώμα Α εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα υ_{0A} = 0 m/s και επιτάχυνση που δίνεται από τη κλίση της ευθείας στο διάγραμμα της ταχύτητας,

$\alpha_A = \frac{\Delta \upsilon}{\Delta t}$ ή $\alpha_A = \frac{+10\ m/s}{5\ s}$ και τελικά $\alpha_A = 2\ \frac{m}{s^2}$

Ομοίως για το σώμα Β έχουμε υ_{0B} = 5 m/s και $\alpha_B = 1\ \frac{m}{s^2}$

Η εξίσωση της ταχύτητας είναι στη γενική της μορφή $\upsilon = \upsilon_0 + \alpha t$

και λαμβάνοντας υπόψη τα ανωτέρω καταλήγουμε στην απάντηση (γ).

2.2 Σωστή η απάντηση **(α)**

Ενδεικτική Αιτιολόγηση

Από το διάγραμμα έχουμε:

(α) Η αλγεβρική τιμή της δύναμης είναι θετική για όλο το χρονικό διάστημα από 0 s έως 20 s. Από τον 2ο Νόμο του Νεύτωνα συμπεραίνουμε ότι το ίδιο ισχύει και για την αλγεβρική τιμή της επιτάχυνσης. Δηλ. η ταχύτητα του σώματος αυξάνεται διαρκώς.

και

(β) το μέτρο της δύναμης για το χρονικό διάστημα από 0 s έως 20 s δεν είναι σταθερό. Το ίδιο ισχύει και για το μέτρο της επιτάχυνσης. Άρα η ταχύτητα του σώματος δεν αυξάνεται ομαλά.

(γ) Γνωρίζουμε ότι η διεύθυνση της δύναμης δεν μεταβάλλεται. Άρα το σώμα κινείται ευθύγραμμα.

Επομένως για όλο το χρονικό διάστημα από 0 s έως 20 s, με βάση τον 2ο Νόμο του Νεύτωνα, ($\vec{F} = m\vec{a}$) το σώμα επιταχύνεται με επιτάχυνση, της οποίας το μέτρο μεταβάλλεται, αλλά η διεύθυνση της παραμένει σταθερή.

2.1 Σωστή η απάντηση **(β)**

Ενδεικτική Αιτιολόγηση

Το σώμα Α εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με επιτάχυνση που δίνεται από τη κλίση της ευθείας στο διάγραμμα της ταχύτητας,

$\alpha_A = \frac{\Delta\upsilon}{\Delta t}$ ή $\alpha_A = \frac{+10\ m/s}{5\ s}$ και τελικά $\alpha_A = 2\ \frac{m}{s^2}$

Ομοίως για το σώμα Β έχουμε και $\alpha_B = 1\ \frac{m}{s^2}$

2.2 Σωστή η απάντηση **(β)**

Ενδεικτική Αιτιολόγηση

Το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη επιβραδυνόμενη κίνηση με το μέτρο της επιβράδυνσής του να είναι της μορφής:

$\alpha = K \cdot t \quad (1)$, όπου K μία θετική σταθερά.

Από τον 2ο Νόμο του Νεύτωνα για το μέτρο της δύναμης F έχουμε

$F = m \cdot \alpha \overset{(1)}{\Rightarrow} F = m \cdot K \cdot t$ δηλ. η δύναμη είναι ανάλογη του χρόνου κίνησης του σώματος.

2.1 Σωστή η απάντηση **(α)**

Ενδεικτική Αιτιολόγηση

Το σώμα Α εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση. Η εξίσωση κίνησης του είναι:

$x_A = x_0 + \upsilon_0 \Delta t$ ή $\Delta x_A = \upsilon_0 \Delta t$ και τελικά $\Delta x_A = 5\Delta t$

Το σώμα Β εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση. Η εξίσωση κίνησης του είναι:

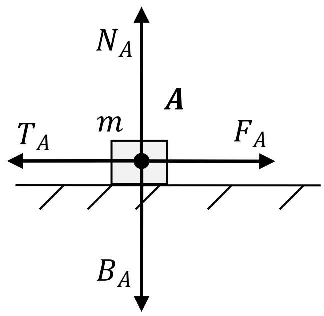
$x_B = x_0 + \upsilon_0 \Delta t + \frac{1}{2}a\Delta t^2$ ή $\Delta x_B = \upsilon_0 \Delta t + \frac{1}{2}a\Delta t^2$

Αλλά $\upsilon_0 = 0\frac{m}{s}$ και $a = \frac{\Delta \upsilon}{\Delta t} = 2\frac{m}{s^2}$

Επομένως $\Delta x_B = \Delta t^2$

2.2 Σωστή η απάντηση **(β)**

Ενδεικτική Αιτιολόγηση



Το κιβώτιο Α εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση, επομένως:

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_A - B_A = 0 \Rightarrow N_A = mg$ (1)

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_A - T_A = 0 \Rightarrow F_A = T_A \Rightarrow F_A = \mu N_A$

$\overset{(1)}{\Rightarrow} F_A = \mu mg$ (2)

Ομοίως για το κιβώτιο Β έχουμε:

$F_B = 2\mu mg$ (3)

Από τις σχέσεις (2) και (3) έχουμε τελικά $F_B = 2F_A$

2.1 Σωστή η απάντηση **(γ)**

Ενδεικτική Αιτιολόγηση

Από το διάγραμμα έχουμε ότι η αλγεβρική τιμή της δύναμης είναι θετική για όλο το χρονικό διάστημα από 0 s έως 20 s, επομένως από τον 2ο Νόμο του Νεύτωνα ($F = ma$) το σώμα συνεχώς επιταχύνεται με αποτέλεσμα η ταχύτητα του σώματος συνεχώς να αυξάνεται.

2.2 Σωστή η απάντηση **(α)**

Ενδεικτική Αιτιολόγηση

Στην ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση οι εξισώσεις κίνησης είναι:

$x = x_0 + \upsilon_o \Delta t - \frac{1}{2} a \Delta t^2$ ή $x - x_0 = \upsilon_o \Delta t - \frac{1}{2} a \Delta t^2$ ή $\Delta x = \upsilon_o \Delta t - \frac{1}{2} a \Delta t^2$

Ή $S = \upsilon_o \Delta t - \frac{1}{2} a \Delta t^2$ (1)

και

$\upsilon = \upsilon_o - \alpha \Delta t$ (2)

Από τη σχέση (2) έχουμε $\frac{\upsilon_0}{2} = \upsilon_o - \alpha \Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{\upsilon_o}{2\alpha}$ (3)

Από τη σχέση (1) έχουμε $S = \upsilon_o \Delta t - \frac{1}{2} a \Delta t^2$ (4)

Με απαλοιφή του χρονικού διαστήματος Δt μεταξύ των σχέσεων (3) και (4) έχουμε τελικά

$$S = \frac{3\upsilon_0^2}{8\alpha}$$

2.1 Σωστή η απάντηση **(β)**

Ενδεικτική Αιτιολόγηση

Από το διάγραμμα έχουμε ότι η αλγεβρική τιμή της δύναμης είναι θετική και σταθερή για όλο το χρονικό διάστημα από 0 s έως 15 s. Επομένως από τον 2ο Νόμο του Νεύτωνα ($F = ma$) το σώμα επιταχύνεται με σταθερή επιτάχυνση.

(Η επιτάχυνση εξ ορισμού είναι ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας)

2.2 Σωστή η απάντηση **(γ)**

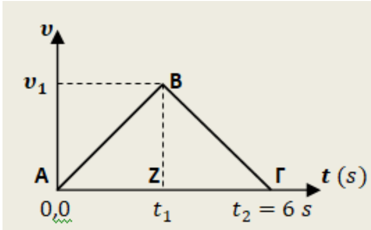
Ενδεικτική Αιτιολόγηση

Εφαρμόζοντας το ΘΜΚΕ για τα δύο σώματα έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} K_{\tau\varepsilon\lambda(A)} - K_{\alpha\rho\chi(A)} = W_A \\ K_{\tau\varepsilon\lambda(B)} - K_{\alpha\rho\chi(B)} = W_B \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} \frac{1}{2}\, m \cdot 10^2 - \frac{1}{2}\, m \cdot 5^2 = W_A \\ \frac{1}{2}\, m \cdot 10^2 - 0 = W_B \end{array}\right\} \Rightarrow W_A < W_B$$

ΘΕΜΑ 4 (Ενδεικτικές απαντήσεις)

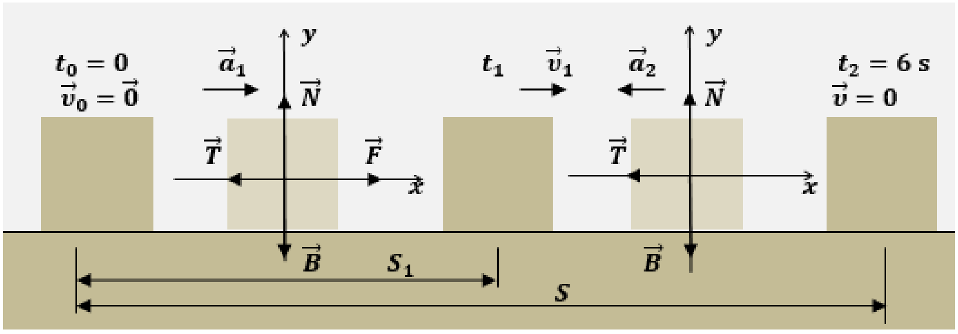
4.1. Το συνολικό διάστημα που διανύει το σώμα από τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ μέχρι τη στιγμή $t_2 = 6\,s$, είναι $S = 18\,m$ και υπολογίζεται ως «εμβαδόν» του τριγώνου ΑΒΓ στο διάγραμμα ταχύτητας-χρόνου που δόθηκε.



Δηλαδή : $s = \frac{(A\Gamma)\cdot(BZ)}{2}$

$$18\,m = \frac{(6\,s)\cdot(\upsilon_1)}{2} \quad \text{και τελικά} \quad \upsilon_1 = 6\,\frac{m}{s}\,.$$

4.2. Μετά την κατάργηση της δύναμης $\vec{F}$, από τη χρονική στιγμή t_1 μέχρι τη στιγμή $t_2 = 6\,\text{s}$,το σώμα επιβραδύνεται ομαλά εξαιτίας της τριβής.



Δημιουργούμε ένα ορθογώνιο σύστημα αξόνων. Κατακόρυφα οι δυνάμεις ισορροπούν και στον άξονα y΄y ισχύει:

$$\Sigma F_y = 0\,, \qquad N - B = 0\,, \qquad \text{ή} \qquad N = B = m\cdot g = 20\,\text{N}$$

Έτσι μπορούμε να υπολογίσουμε το μέτρο της τριβής ολίσθησης $T = \mu\cdot N = 4\,\text{N}$

Εφαρμόζοντας στον οριζόντιο άξονα x΄x τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για την επιβραδυνόμενη αυτή κίνηση του σώματος, έχουμε:

$$\Sigma F_x = m\cdot a_2 \qquad \text{ή} \qquad a_2 = \frac{-T}{m} = -2\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Η τιμή αυτή της επιτάχυνσης $\vec{a}_2$, μπορεί να προκύψει και από το διάγραμμα ταχύτητας- χρόνου για την αντίστοιχη χρονική διάρκεια:

$$a_2 = \frac{\Delta\upsilon}{\Delta t} = \frac{0-\upsilon_1}{t_2-t_1} \qquad \text{ή} \qquad -2\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \frac{-6\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{6\,\text{s}-\text{t}_1} \qquad \text{απ' όπου τελικά προκύπτει} \qquad t_1 = 3\,s$$

4.3. Από το διάγραμμα ταχύτητας-χρόνου, μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε την τιμή της επιτάχυνσης του σώματος από τη στιγμή $t_0 = 0$, μέχρι τη στιγμή $t_1 = 3\,s$:

$$a_1 = \frac{\Delta\upsilon}{\Delta t} = \frac{\upsilon_1-0}{t_1-0} = 2\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Εφαρμόζοντας τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για αυτή τη χρονική διάρκεια:

$$\Sigma F_x = m\cdot a_1 \quad \text{ή} \quad F - T = m\cdot a_1$$
$$F = T + m\cdot a_1 = 4\,\text{N} + 4\,\text{N} = 8\,\text{N}$$

4.4. Το διάστημα S_1 που διανύει το σώμα μέχρι τη στιγμή t_1- μπορούμε τώρα να το υπολογίσουμε:

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot a_1 \cdot t_1^2 = 9 \text{ m}$$

Η ενέργεια που προσφέρθηκε στο σώμα είναι ίση με το παραγόμενο έργο της δύναμης $\vec{F}$ στο διάστημα S_1 :

$$E_{\pi\rho.} = W_F = F \cdot S_1 = 72 \text{ J}$$

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

13564

1.1 γ

1.2 γ

1.3 δ

1.4 Σ, Λ, Λ, Λ, Σ

1.5

1 - δ

2 - ζ

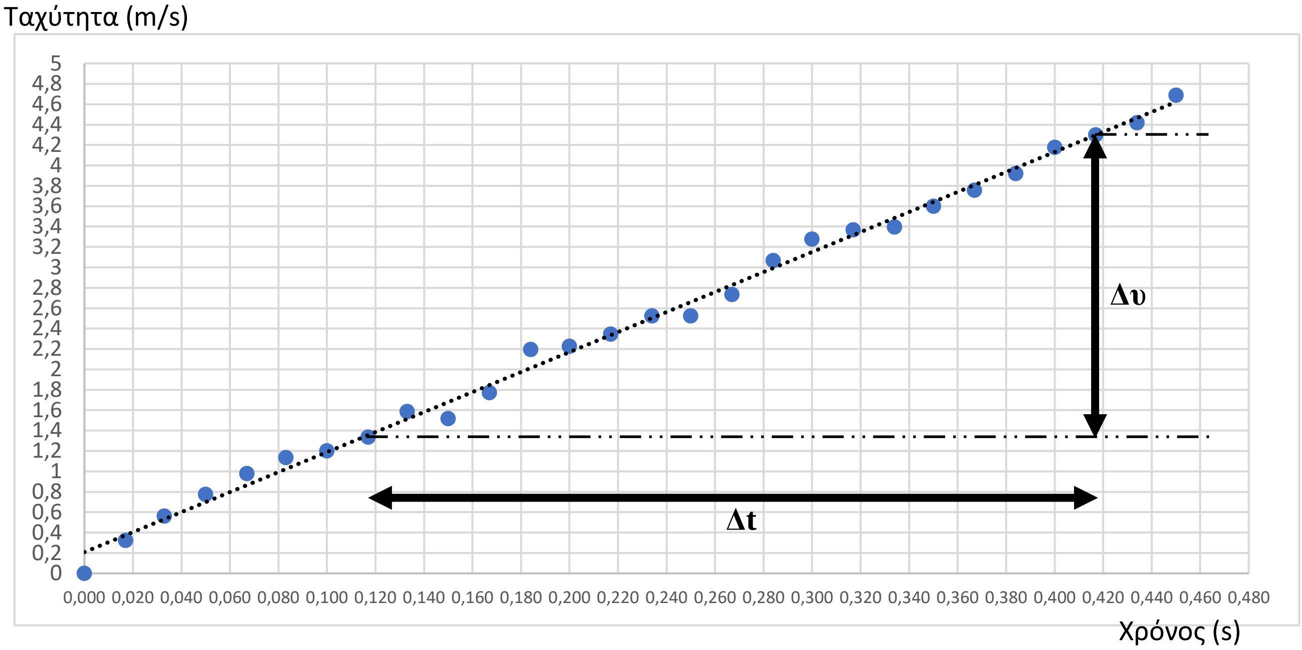
3 - β

4 - ε

5 - στ

Ενδεικτική Λύση

3.1) Η κλίση της ευθείας από το διάγραμμα της ταχύτητας ως προς το χρόνο μας δίνει το μέτρο της συνολικής επιτάχυνσης που δέχεται η μπάλα. Διαλέγουμε από το διάγραμμα δύο σημεία και υπολογίζουμε την επιτάχυνση ως εξής: $\alpha = \frac{\Delta \upsilon}{\Delta t} = \frac{4{,}3 - 1{,}34}{0{,}417 - 0{,}117}\ \frac{m}{s^2} = 9.87\ \frac{m}{s^2}$



(Μονάδες 6)

3.2) Η τιμή της επιτάχυνσης που δέχεται η μπάλα είναι πολύ κοντά στην τιμή της επιτάχυνσης της βαρύτητας. Οπότε η αντίσταση του αέρα έχει τόσο μικρή τιμή, ώστε να βρίσκεται μέσα στα όρια του σφάλματος των μετρήσεών μας..

(Μονάδες 6)

3.3) Το εμβαδό που σχηματίζεται από την ευθεία και τον άξονα του χρόνου ισούται με την κατακόρυφη απόσταση που διάνυσε η μπάλα, από το οποίο προκύπτει και το αρχικό ύψος από το οποίο ξεκίνησε να πέφτει.

$h = (\text{εμβαδό τριγώνου}) = \frac{1}{2}\ \Delta\upsilon\ \Delta t = \frac{1}{2}\ (4{,}6 - 0{,}2) \cdot 0{,}45\ m = 0{,}99\ m$

(Μονάδες 6)

3.4)

$$E_{\mu\eta\chi(\alpha\rho\chi)} = m \cdot g \cdot h = 0{,}1 \cdot 10 \cdot 0{,}99\ J = 0{,}99\ J$$

$$E_{\mu\eta\chi(\tau\varepsilon\lambda)} = \frac{1}{2} m\, \upsilon^2 = 0{,}5 \cdot 0{,}1 \cdot 4{,}4^2\ J = 0{,}968\ J$$

Παρατηρούμε ότι η μηχανική ενέργεια παραμένει πρακτικά σταθερή (η μικρή διαφορά μπορεί να οφείλεται σε σφάλματα μέτρησης ή σε μικρή αντίσταση από τον αέρα, που δεν μπορεί να αποκλειστεί πειραματικά).

(Μονάδες 7)

Σημείωση: Η πτώση της μπάλας δεν ήταν αμιγώς ευθύγραμμη κίνηση, λόγω των συνθηκών του πειράματος. Πραγματοποιήθηκε σε εξωτερικό χώρο και το χέρι του μαθητή / της μαθήτριας που άφησε τη μπάλα δεν ήταν απόλυτα ακίνητο στον οριζόντιο άξονα, κάτι που είχε σαν αποτέλεσμα η μπάλα να κάνει μια οριζόντια βολή με μικρό βεληνεκές. Αυτό δε μας εμποδίζει να μελετήσουμε την κατακόρυφή πορεία της μπάλας ανεξάρτητα από την οριζόντια κίνησή της.

Ενδεικτική Λύση

2.1) Σωστή απάντηση: (β)

Το δεδομένο ότι ο ανελκυστήρας κινείται με σταθερή επιτάχυνση a προς τα πάνω, ξεκινώντας από την ηρεμία, μας βοηθάει να υπολογίσουμε την επιτάχυνση του.

$$\Delta\upsilon = a \cdot \Delta t$$

ή

$$a = \frac{\Delta\upsilon}{\Delta t} = \frac{2}{10}\frac{m}{s^2} = 0{,}2\ \frac{m}{s^2}$$

Σύμφωνα με το 2^o νόμο του Newton:

$$F - m \cdot g = m \cdot a$$

ή

$$F = m \cdot a + m \cdot g = m \cdot (a + g) = 5100\ N$$

Αφού η συνολική μάζα είναι 350 + 150 = 500 kg

2.2) Σωστή απάντηση: (γ)

Τα κιβώτια κινούνται οριζόντια με σταθερή επιτάχυνση οπότε σύμφωνα με το 2^o νόμο του Newton

$$F_A = m_A a_A \text{ και } F_B = m_B a_B$$

Οπότε η σχέση που δίνεται: $F_A = 3 \cdot F_B$ γίνεται: $m_A a_A = 3 \cdot m_B a_B$ (1)

Τα δύο κιβώτια αποκτούν την ίδια ταχύτητα σε διαφορετικά χρονικά διαστήματα (το κιβώτιο Β σε διπλάσιο χρόνο από το Α). Οπότε $\upsilon = a_A \cdot t = a_B \cdot 2 \cdot t$ ή $a_A = 2 \cdot a_B$ οπότε από την (1) προκύπτει η σχέση: $m_B = \frac{2}{3} m_A$

Ενδεικτική Λύση

2.1) Σωστές απαντήσεις

Μετατόπιση	Χρόνος κίνησης	Επιτάχυνση	Δύναμη F	Έργο δύναμης F	Τελική ταχύτητα
4 m	2 s	2 m/s^2	1 N	3,2 J	4 m/s

$$\Delta x = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \Delta t^2 \text{ ή } a = \frac{2 \cdot \Delta x}{\Delta t^2} = \frac{8}{4}\frac{m}{s^2} = 2\ \frac{m}{s^2}$$

$$F = m \cdot a = 0{,}5\ \cdot 2\ N = 1\ N$$

$$W = F \cdot \Delta x = 1\ \cdot 4\ J = 4\ J$$

$$\upsilon =\ a \cdot \Delta t = 4\ \frac{m}{s}$$

2.2) Σωστή απάντηση: (β)

Το σώμα κινείται στον οριζόντιο άξονα με σταθερή επιτάχυνση οπότε σύμφωνα με τον 2^{ο} νόμο του Newton

$$F_{ολ} = ma \text{ (1)}$$

Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα στον οριζόντιο άξονα είναι η οριζόντια συνιστώσα F_x της δύναμης F και η τριβή T (η οποία έχει φορά αντίθετη σε αυτή της κίνησης του σώματος).

Άρα για τον οριζόντιο άξονα ισχύει ότι:

$$F_{ολ\,x} = F_x - T \text{ (2)}$$

Την οριζόντια συνιστώσα F_x την υπολογίζουμε με ανάλυση της F ως:

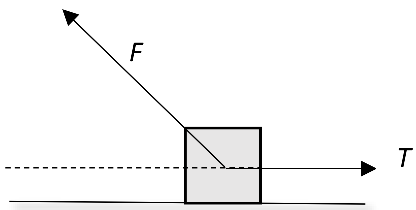
$$F_x = F \cdot συνφ \text{ (3)}$$

Άρα, αν στη σχέση (2) αντικαταστήσουμε την (1) και την (3) προκύπτει

$$ma = F \cdot συνφ - T$$

$$T = F \cdot συνφ - ma$$

Και ο σχεδιασμός της τριβής



Οπότε το έργο της τριβής είναι:

$$W_T = T\ \cdot \Delta x \cdot συν\ 180° \ =\ -(F \cdot συνφ - ma)\ \cdot \Delta x$$

Δεδομένου ότι η κατεύθυνση της τριβής σχηματίζει γωνία $180°$ με την κατεύθυνση της μετατόπισης.

<u>Ενδεικτική Λύση</u>

2.1) Σωστές απαντήσεις:

Α – 1

Β – 2

Γ – 4

Διάγραμμα 1ο

Η κλίση προκύπτει ως το πηλίκο της απόστασης διά του χρόνου (θεωρία).

$$\upsilon = \frac{S}{\Delta t}$$

Διάγραμμα 2ο

Στην γραφική παράσταση της ταχύτητας σε συνάρτηση με το χρόνο, το εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ της ευθείας και του άξονα του χρόνου είναι ίσο αριθμητικά με τη μετατόπιση (θεωρία).

$$x = \frac{1}{2}\,\upsilon\,\cdot t\;=\;\frac{1}{2}\,\alpha\,\cdot\,t^2$$

Διάγραμμα 3ο

Η σταθερά ενός ελατηρίου υπολογίζεται από την κλίση της ευθείας της γραφικής παράστασης της δύναμης που επιμηκύνει το ελατήριο σε συνάρτηση με την επιμήκυνση του.

$$k = \frac{F}{\Delta x}$$

2.2) Σωστή απάντηση: (γ)

Τα κιβώτια κινούνται οριζόντια με σταθερή επιτάχυνση, οπότε, σύμφωνα με το 2ο νόμο του Newton, προκύπτει:

$$F_A = m_A \cdot a_A \text{ και } F_B = m_B \cdot a_B$$

Άρα η σχέση που δίνεται: $F_A = 3 \cdot F_B$ γίνεται: $m_A \cdot a_A = 3 \cdot m_B \cdot a_B$ (1)

Και τα δύο κιβώτια στο ίδιο χρονικό διάστημα έχουν αποκτήσει ταχύτητες για τις οποίες ισχύει $\upsilon_A = 2 \cdot \upsilon_B$

$$\upsilon_A = 2 \cdot \upsilon_B \text{ ή } a_A \cdot t = 2 \cdot a_B \cdot t$$

$$a_A = 2 \cdot a_B$$

οπότε από την (1) προκύπτει η σχέση: $m_A \cdot 2 \cdot a_B = 3 \cdot m_B \cdot a_B$ ή $m_B = \frac{2}{3} m_A$

Ενδεικτική Λύση

2.1) Σωστή απάντηση: (α)

Για κάθε ένα χρονικό διάστημα (από όσα δίνονται ως επιλογές) το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας μπορεί να μας δώσει το πρόσημο του έργου της συνολικής δύναμης.

Αν $K_{τελ} - K_{αρχ} > 0 \; τότε \; και \; W_{Fολ} > 0$

Στο χρονικό διάστημα 0 – 15 s η ταχύτητα τη χρονική στιγμή $t = 15\; s$ είναι μεγαλύτερη από τη ταχύτητα για $t = 0$. Άρα $K_{τελ} - K_{αρχ} > 0$

Στις υπόλοιπες περιπτώσεις δεν ισχύει αυτό.

2.2) Σωστή απάντηση: (β)

Τα κιβώτια κινούνται οριζόντια με σταθερή επιτάχυνση οπότε σύμφωνα με το 2ο νόμο του Newton

$$F_A = m_A \cdot a_A \text{ και } F_B = m_B \cdot a_B$$

Οπότε η σχέση που δίνεται: $F_A = 3 \cdot F_B$ γίνεται: $m_A \cdot a_A = 3 \cdot m_B \cdot a_B$ (1)

Τα δύο κιβώτια στον ίδιο χρόνο έχουν διανύσει διαφορετικές αποστάσεις για τις οποίες ισχύει:

$S_B = 3 \cdot S_A$, άρα $\frac{1}{2} \cdot \alpha_B \cdot t^2 = \frac{3}{2} \cdot \alpha_A \cdot t^2$ και τελικά: $\alpha_B = 3 \cdot \alpha_A$ (2)

Από (1) και (2) προκύπτει λοιπόν: $m_A \cdot a_A = 3 \cdot m_B \cdot 3 \cdot \alpha_A => m_A = 9 \cdot m_B$.

<u>Ενδεικτική Λύση</u>

2.1) Σωστή απάντηση: (β)

Από το εμβαδό του γραφήματος προκύπτει ότι στα πρώτα 15s της κίνησης η μεταβολή της ταχύτητας είναι θετική, δηλ. η τελική ταχύτητα είναι μεγαλύτερη της αρχικής, το οποίο ισχύει μόνο για το διάγραμμα β.

2.2) Σωστή απάντηση: (β)

Το σώμα κινείται οριζόντια με σταθερή θετική σε μέτρο επιτάχυνση (αρα το διάνυσμα της επιτάχυνσης "δείχνει" τη φορά της κίνησης και θα πρέπει να έχει την ίδια φορά με τη δύναμη F) οπότε, σύμφωνα με τον 2ο νόμο του Newton, ισχύει:

$$F_{ολ} = ma \text{ (1)}$$

Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα στον οριζόντιο άξονα είναι η οριζόντια συνιστώσα F_x της δύναμης F και η τριβή T (η οποία έχει φορά αντίθετη σε αυτή της κίνησης του σώματος). Άρα για τον οριζόντιο άξονα ισχύει ότι:

$$F_{ολ\,x} = F_x - T \text{ (2)}$$

Την οριζόντια συνιστώσα F_x την υπολογίζουμε με ανάλυση της F ως:

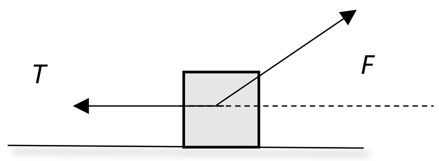
$$F_x = F \cdot συν30° \text{ (3)}$$

Άρα, αν στη σχέση (2) αντικαταστήσουμε την (1) και την (3), προκύπτει

$$ma = F \cdot συν30° - T$$

$$T = F \cdot συν30° - ma$$

Και ο σχεδιασμός της τριβής



<u>Ενδεικτική Λύση</u>

2.1) Σωστές απαντήσεις

α – 4

β – 1

γ – 2

δ – 3

Στον κατακόρυφο άξονα με θετική φορά προς τα πάνω ισχύει:

$$T - m \cdot g = m \cdot a \ (1)$$

α) κίνηση με επιτάχυνση $a = g/2$

από (1) $T - m \cdot g = m \cdot g/2$ ή $T = \frac{3}{2} \cdot m \cdot g$ ή $T = 150\ N$

β) κίνηση με επιτάχυνση $a = -\ g$ (θετική φορά κίνησης η κατεύθυνση της T).

από (1) $T - m \cdot g = -\ m \cdot g$ ή $T = 0\ N$

γ) κίνηση με επιτάχυνση $a = -\ g/2$ (θετική φορά κίνησης η κατεύθυνση της T).

από (1) $T - m \cdot g = -\ m \cdot g/2$ ή $T = 50\ N$

γ) κίνηση προς τα πάνω με $a = 0\ \frac{m}{s^2}$

από (1) $T - m \cdot g = 0$ ή $T = 100\ N$

2.2) Σωστή απάντηση: (α)

Εφόσον ο κύβος κινείται μόνο υπό την επίδραση του βάρους, από το Θ.Μ.Κ.Ε.

$$\Delta K = \ K\tau\varepsilon\lambda = \ m \cdot g \cdot y, \text{ όπου } 0 \leq y \leq h$$

Η κινητική ενέργεια μεταβάλλεται συναρτήσει του ύψους. Συνεπώς στο διάγραμμα (α) φαίνεται ότι ο κύβος έχει τη μέγιστη κινητική ενέργεια όταν είναι σε ύψος (0 m) και στο μέγιστο ύψος (h) έχει μηδενική κινητική ενέργεια (ξεκινάει με μηδενική αρχική ταχύτητα).

Ενδεικτική Λύση

2.1) Σωστή απάντηση: (β)

Από τον 2ος νόμο Newton προκύπτει ότι για σταθερή δύναμη η επιτάχυνση είναι αντιστρόφως ανάλογη της μάζας:

$$\alpha = \frac{F}{m} \,(1)$$

Στην ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση η κλίση της γραφικής παράστασης της ταχύτητας σε συνάρτηση με το χρόνο δίνει την επιτάχυνση.

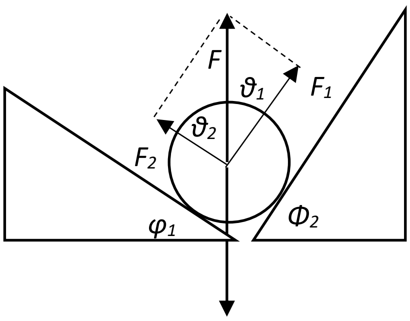
Με βάση το διάγραμμα ταχύτητας ως προς το χρόνο η ευθεία Α έχει μεγαλύτερη κλίση από τις άλλες δύο. Άρα

$$a_A > a_B > a_\Gamma$$

Οπότε, με βάση την (1) , έχουμε:

$$m_A < m_B < m_\Gamma$$

2.2) Σωστή απάντηση: (α)



Οι δυνάμεις F_1 και F_2 που ασκούν οι σφήνες στην σφαίρα είναι κάθετες στην επιφάνειες επαφής και σχηματίζουν γωνίες με την κατακόρυφο έστω ϑ_1 και ϑ_2 αντίστοιχα.

Για να ισορροπεί η σφαίρα (1ος Νόμος Newton), η συνισταμένη F των F_1 και F_2 θα πρέπει να έχει μέτρο ίσο με το βάρος $m \cdot g$ της σφαίρας. Δηλ. $F_1 = m \cdot g \cdot συν\theta_1$ και $F_2 = m \cdot g \cdot συν\theta_2$.

Οι ϑ_1 και φ_1, ως οξείες γωνίες με κάθετες πλευρές είναι ίσες. Το ίδιο ισχύει και για τις ϑ_2 και φ_2.

Άρα οι δύο δυνάμεις έχουν μέτρα: $F_1 = m \cdot g \cdot συν30^o$ και $F_2 = m \cdot g \cdot συν60^o$

Ενδεικτική Λύση

2.1) Σωστή απάντηση: (γ)

Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας στην ανώτερη (h) και στην κατώτερη θέση (0 m: πριν χτυπήσει το σώμα στο έδαφος):

$$E_{MHX\alpha\rho\chi} = E_{MHX\tau\varepsilon\lambda} \text{ ή } K_{\alpha\rho\chi} + U = K_{\tau\varepsilon\lambda} \text{ ή } K_{\alpha\rho\chi} + U = 4 \cdot K_{\alpha\rho\chi}$$

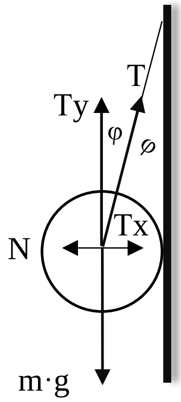
οπότε

$$U = 3 \cdot K_{\alpha\rho\chi}$$

Δηλ. σε ύψος σε h – αρχική θέση

2.2) Σωστή απάντηση: (α)

Οι δυνάμεις που δέχεται η σφαίρα είναι το βάρος της, η τάση του νήματος T και η δύναμη από τον τοίχο **N**.



Δεδομένου ότι η σφαίρα ισορροπεί, η συνολική δύναμη σε κάθε άξονα θα είναι μηδενική.

Στον κατακόρυφο άξονα:

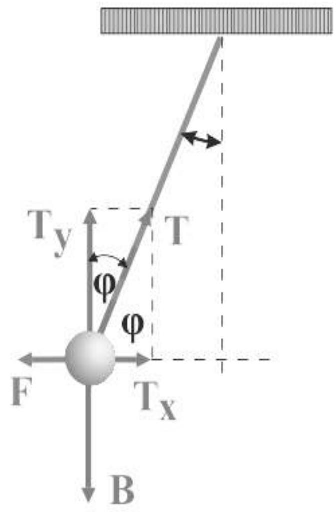
$$T_y = m \cdot g \text{ ή } T \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi = m \cdot g \text{ ή } T = \frac{m \cdot g}{\sigma\upsilon\nu\varphi}$$

Στον οριζόντιο άξονα:

$$T_x = \boldsymbol{N} \text{ ή } T \cdot \eta\mu\varphi = \boldsymbol{N} \text{ ή } \boldsymbol{N} = \frac{m \cdot g}{\sigma\upsilon\nu\varphi}\eta\mu\varphi$$

Ενδεικτική Λύση

2.1) Σωστή απάντηση: (β)



Δεδομένου ότι η σφαίρα ισορροπεί, η συνολική δύναμη σε κάθε άξονα θα είναι μηδενική.

Στον κατακόρυφο άξονα:

$T_y = m \cdot g$ ή $T \cdot συνφ = m \cdot g$

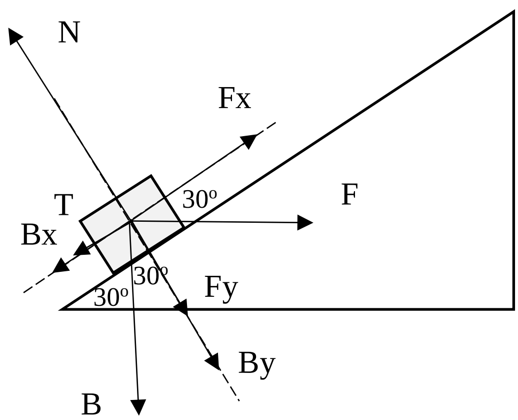
Στον οριζόντιο άξονα:

$T_χ = F$ ή $T \cdot ημφ = F$

Αν διαιρέσουμε κατά μέλη προκύπτει: $\frac{ημφ}{συνφ} = \frac{F}{m \cdot g} = \frac{10}{10} = 1$

Άρα η γωνία είναι 45°.

2.2) Σωστή απάντηση: (α)



Το έργο της τριβής θα είναι: $W_T = T \cdot Δx \cdot συν180^o$, άρα

$$-20\sqrt{3} = T \cdot 10 \cdot (-1)$$

Άρα $T = 2\sqrt{3}\,N$ και από τον ορισμό της τριβής:

$T = μ \cdot \boldsymbol{N}$ ή $\boldsymbol{N} = 10\sqrt{3}\,N$

Στον κάθετο άξονα:

Με βάση τον 1° νόμο Newton:

$F_y + B_y = \boldsymbol{N}$ ή $F_y = \boldsymbol{N} - m \cdot g \cdot συν30^o = 5\sqrt{3}\,N$

Και δεδομένου ότι: $F_y = F \cdot ημ30^o$

Προκύπτει ότι: $F = 10\sqrt{3}\,N$

13575

<u>Ενδεικτική Λύση</u>

2.1) Σωστή απάντηση: (β)

1η ρίψη: Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας στην ανώτερη h_1 θέση και στην κατώτερη θέση (ύψος 0 m: πριν χτυπήσει το σώμα στο έδαφος):

$$E_{ΜΗΧαρχ} = E_{ΜΗΧτελ} \text{ ή } K_{αρχ} + U = K_{τελ} \text{ ή } K_{αρχ} + U = 2 \cdot K_{αρχ}$$

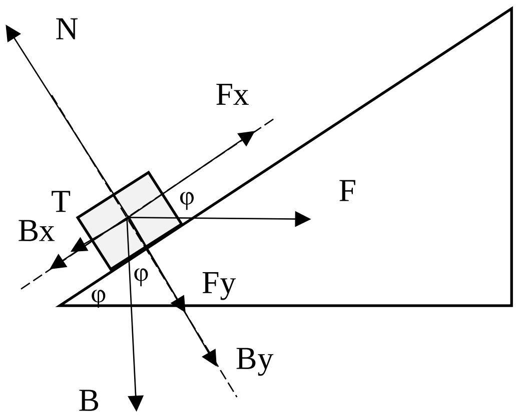
$$\text{Οπότε: } U = K_{αρχ} = K \text{ ή } K = mgh_1$$

2η ρίψη: Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας στην ανώτερη h_2 θέση και στην κατώτερη θέση (ύψος 0 m: πριν χτυπήσει το σώμα στο έδαφος):

$$E_{ΜΗΧαρχ,2} = E_{ΜΗΧτελ,2} \text{ ή } U_2 = K_{τελ} = 2 \cdot K \text{ ή } mgh_2 = 2 \cdot mgh_1$$

$$\text{Οπότε: } h_2 = 2 \cdot h_1$$

2.2) Σωστή απάντηση: (α)



Έστω σύστημα αναφοράς όπως αυτό του σχήματος.

Δεδομένου ότι το σώμα ισορροπεί, η συνολική δύναμη σε κάθε άξονα θα είναι μηδενική.

<u>Στον κάθετο άξονα:</u>

$B_y + F_y = N$ ή $B \cdot συνφ + F \cdot ημφ = N$ (1)

<u>Στον παράλληλο άξονα:</u>

$$F_x = B_x + T \text{ ή } F \cdot συνφ = B \cdot ημφ + T$$

Δεδομένου ότι $T = μ \cdot N$ η προηγούμενη σχέση γράφεται:

$$F \cdot συνφ = B \cdot ημφ + μ \cdot N$$

και, λόγω της (1) και επειδή $ημφ = συνφ$

$$F \cdot συνφ = B \cdot ημφ + μ \cdot (B \cdot συνφ + F \cdot ημφ)$$

$$F \cdot συνφ = B \cdot συνφ + 0{,}2 \cdot (B \cdot συνφ + F \cdot συνφ)$$

$$0{,}8 \cdot F \cdot συνφ = 1{,}2 \cdot B \cdot συνφ$$

$$8 \cdot F = 12 \cdot B$$

$$2 \cdot F = 3 \cdot B$$

$$F = \frac{3}{2} \cdot B$$

Ενδεικτική Λύση

2.1) Σωστές απαντήσεις

α – 4

β – 1

γ – 2

δ – 3

Στον κατακόρυφο άξονα με θετική φορά προς τα πάνω ισχύει:

$$T - m \cdot g = m \cdot a \ (1)$$

α) κίνηση με επιτάχυνση $a = \frac{g}{4}$

από (1) $T - m \cdot g = m \cdot \frac{g}{4}$ ή $T = 5 \cdot m \cdot \frac{g}{4}$ ή $T = 125\ N$

β) κίνηση με επιτάχυνση $a = g$

από (1) $T - m \cdot g = -m \cdot g$ ή $T = m \cdot g - m \cdot g = 0\ N$

γ) κίνηση με επιτάχυνση $a = -g/2$ (θετική φορά κίνησης η κατεύθυνση της T)

από (1) $T - m \cdot g = -m \cdot \frac{g}{2}$ ή $T = m \cdot \frac{g}{2} = 50\ N$

δ) κίνηση με σταθερή ταχύτητα άρα $a = 0\ \frac{m}{s^2}$

από (1) $T - m \cdot g = 0$ ή $T = 100\ N$

2.2) Σωστή απάντηση: (α)

Συμβολίζουμε με K_y την κινητική ενέργεια του κύβου σε ύψος y.

Εφόσον ο κύβος κινείται μόνο υπό την επίδραση του βάρους, από το Θ.Μ.Κ.Ε. προκύπτει:

$$K_y - K_{\alpha\rho\chi} = -m \cdot g \cdot y \text{ ή } K_y = K_{\alpha\rho\chi} - m \cdot g \cdot y$$

Δηλαδή, η κινητική ενέργεια εξαρτάται από το ύψος y του σώματος και όταν φτάσει σε ύψος h από το οριζόντιο επίπεδο:

$$K_{\tau\varepsilon\lambda} = K_{\alpha\rho\chi} - m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2}mv^2 - mgh$$

<u>Ενδεικτική Λύση</u>

2.1) Σωστή απάντηση: (α)

<u>Αιτιολόγηση</u>

Το σώμα δε θα κινηθεί απευθείας όταν ασκηθεί δύναμη $\vec{F}$, επειδή η στατική τριβή αυξάνεται επίσης προοδευτικά, άρα ισχύει ο πρώτος νόμος του Newton. Όταν η $\vec{F}$ ξεπεράσει, έστω και κατ΄ ελάχιστο, την οριακή τριβή, η συνισταμένη δύναμη θα είναι πλέον διάφορη του μηδενός, οπότε το σώμα θα αρχίσει να κινείται, υπό την επίδραση της $\vec{F}$ και της τριβής ολίσθησης, που είναι πάντα μικρότερη από την οριακή τριβή. Το μοναδικό γράφημα που συμφωνεί με αυτή την περιγραφή είναι το (α).

2.2) Σωστές απαντήσεις:

α – 5

β – 4

γ – 1

δ – 2

Στον κατακόρυφο άξονα με θετική φορά κίνησης προς τα πάνω ισχύει:

$$T - m \cdot g - F_A = m \cdot a \ (1)$$

α) κίνηση προς τα πάνω με επιτάχυνση $a = \frac{3g}{4}$

από (1) $T - m \cdot g - F_A = m \cdot \frac{3g}{4}$ ή $T = 7 \cdot m \cdot \frac{g}{4} + F_A$

συνεπώς $T = (7 \cdot 2 \cdot \frac{10}{4} + 10)N = 45\ N$

β) κίνηση προς τα πάνω με σταθερή ταχύτητα, $a = 0\ \frac{m}{s^2}$

από (1) $T - m \cdot g - F_A = 0$ ή $T = m \cdot g + F_A = (20 + 10)N = 30\ N$

γ) κίνηση προς τα κάτω με επιτάχυνση $a = g/2$

από (1) $T - m \cdot g + F_A = -m \cdot \frac{g}{2}$ ή $T = m \cdot \frac{g}{2} - F_A = (2 \cdot \frac{10}{2} - 10)N = 0\ N$

δ) κίνηση προς τα κάτω με σταθερή ταχύτητα : $a = 0\ \frac{m}{s^2}$

από (1) $T - m \cdot g + F_A = 0$ ή $T = m \cdot g - F_A = (20 - 10)N = 10\ N$

Ενδεικτική Λύση

2.1) Σωστή απάντηση: (α)

Το δεδομένο ότι ο ανελκυστήρας αρχικά κινείται με σταθερή ταχύτητα –σύμφωνα με τον 1ο νόμο του Newton- σημαίνει ότι η συνολική δύναμη που ασκείται στον ανελκυστήρα είναι μηδέν. Άρα η τάση του συρματόσχοινου είναι ίση με το συνολικό βάρος του συστήματος ανελκυστήρα-επιβατών.

Συνολική μάζα: $5 \cdot m + 2 \cdot m = 7 \cdot m$

Άρα $T = 7 \cdot m \cdot g = 7 \cdot m \cdot 10\, N = 70 \cdot m\, N$

Όταν κατεβαίνει ο ένας επιβάτης (η μάζα του ανελκυστήρα με τον έναν επιβάτη γίνεται $6 \cdot m$ και παραμένει σταθερή τη τάση του συρματόσχοινου τότε το σώμα επιταχύνεται προς τα πάνω:

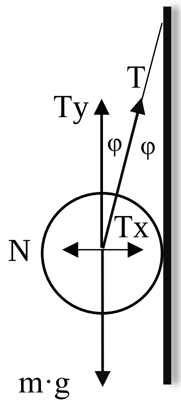
$$T - 6 \cdot m \cdot g = 6 \cdot m \cdot a$$

$$\frac{T - 6 \cdot m \cdot g}{6 \cdot m} = a$$

$$\frac{70 \cdot m - 60 \cdot m}{6 \cdot m} = a$$

$$\alpha = \frac{5}{3}\frac{m}{s^2}$$

2.2) Σωστή απάντηση: (α)



Οι δυνάμεις που δέχεται η σφαίρα είναι το βάρος της, η τάση του νήματος T και η δύναμη από τον τοίχο N.

Δεδομένου ότι η σφαίρα ισορροπεί, η συνολική δύναμη σε κάθε άξονα θα είναι μηδενική.

Στον κατακόρυφο άξονα:

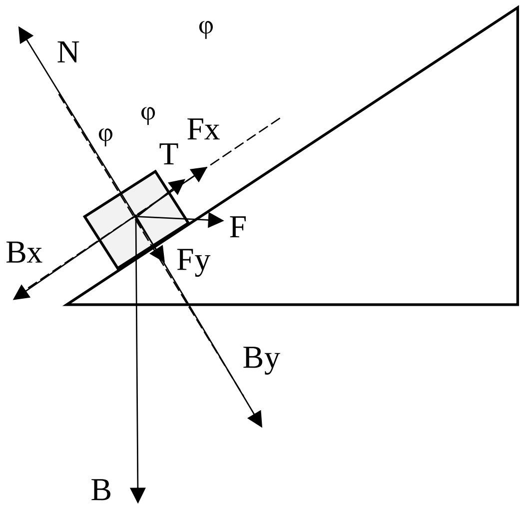
$$T_y = m \cdot g \text{ ή } T \cdot συνφ = m \cdot g \text{ ή } T = \frac{m \cdot g}{συνφ} \,(1)$$

Στον οριζόντιο άξονα:

$$T_x = \boldsymbol{N} \text{ ή } T \cdot ημφ = \boldsymbol{N} \;(2)$$

Σύμφωνα με την εκφώνηση $T = 2 \cdot \boldsymbol{N}$ άρα από (1) και (2):

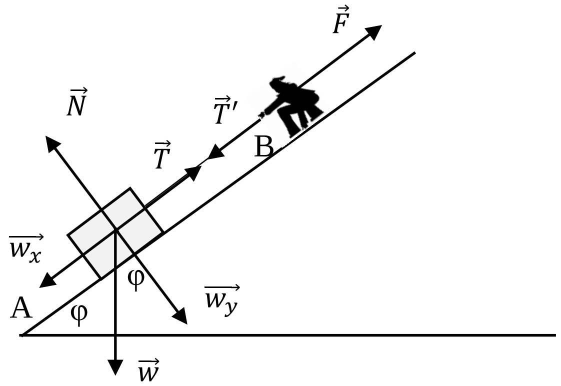
$$\frac{m \cdot g}{συνφ} = 2 \cdot \frac{m \cdot g}{συνφ} \cdot ημφ \text{ ή } ημφ = 0{,}5$$


φ
N
φ
φ
Fx
T
F
Bx
Fy
By
B

Ενδεικτική Λύση

4.1) Αν το επίπεδο είναι λείο στο κιβώτιο θα ασκούνται οι δυνάμεις: το βάρος, η κάθετη δύναμη του δαπέδου και η τάση του νήματος. Λόγω αβαρούς και μη εκτατού νήματος

$T = T' = F$, όπου η Τ' η δύναμη που ασκείται από το νήμα στο χέρι του Μιχάλη και F η δύναμη που ασκεί ο Μιχάλης στο νήμα. Όπως στο σχήμα:



Με μέτρα: $w = m \cdot g = 100\ N$

$w_x = m\ \cdot g \cdot ημφ = 60\ N$

Για τον άξονα των y: $N = w_y = m\ \cdot g \cdot συνφ = 80\ N$

Και για τον άξονα των x: $F - w_x = m\ \cdot a$ ή $F = m\ \cdot a + w_x$ (1)

Το κιβώτιο ανεβαίνει 10 m σε 10 s οπότε

$Δx = \frac{1}{2} \cdot a \cdot Δt^2$ ή $a = \frac{2 \cdot Δx}{Δt^2} = 0{,}2\ \frac{m}{s^2}$

Άρα από τη σχέση (1) προκύπτει: $F = (2 + 60)N = 62\ N$

(Μονάδες 7)

4.2) Ένας από τους πιθανούς τρόπους να υπολογιστεί το έργο του βάρους είναι

$$W = -m \cdot g \cdot ημφ \cdot (AB) = -600J \text{ ή } -0{,}6\ kJ$$

(Μονάδες 5)

4.3) Το έργο της συνισταμένης δύναμης που δέχεται το κιβώτιο κατά την μετακίνηση (ΑΒ) είναι:

$$W_{Fολ} = (F - m \cdot g \cdot ημφ) \cdot (AB) = 20J \text{ ή } 0{,}02\ kJ$$

Εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Κ.Ε.: $K_B - K_A = W_{Fολ}$ ή $\frac{1}{2}\, m\, υ^2 = W_{Fολ}$ ή $υ^2 = \frac{2 \cdot W_{Fολ}}{m} = 4 \left(\frac{m}{s}\right)^2$

Οπότε: $υ = 2\ \frac{m}{s}$

(Μονάδες 6)

4.4) Το έργο της δύναμης F όταν το κεκλιμένο επίπεδο θεωρείται λείο είναι:

$$W_F = F \cdot (AB) = 620J$$

Άρα, λόγω της τριβής θα απαιτούνται επιπλέον $620J \cdot 50\% = 310J$ κατανάλωση ενέργειας από τον Μιχάλη.

Έργο Τριβής: $W_T = -\ μ \cdot m \cdot g \cdot συνφ \cdot (AB) = -310\ J$

Οπότε:

$$μ = \frac{310}{10 \cdot 10 \cdot 0{,}8 \cdot 10} = 0{,}3875 \cong 0{,}4$$

(Μονάδες 7)

Ενδεικτική Λύση

4.1) Λόγω αβαρούς και άκαμπτου νήματος ισχύει: $T_A = T_B$.

Εφαρμόζουμε το 2ο νόμο του Newton στον άξονα της κίνησης για το σύστημα :

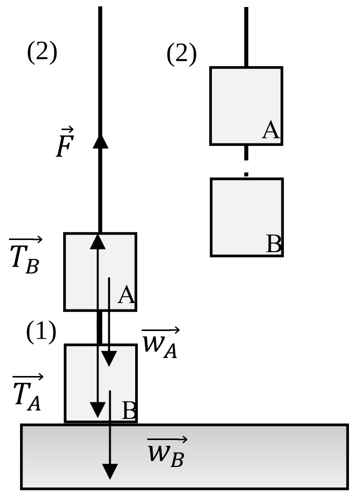
$$\sum \vec{F} = m_{ολ} \cdot \vec{a}$$

Όπου με θετική φορά προς τα πάνω έχουμε:

$$F + T_B - T_A - (m_A + m_B) \cdot g = (m_A + m_B) \cdot \alpha$$

$$\alpha = \frac{F - (m_A + m_B) \cdot g}{(m_A + m_B)} = \frac{72 - 60}{6} \frac{m}{s^2}$$

$$= 2 \ \frac{m}{s^2}$$



(Μονάδες 6)

4.2) Η μάζα Α εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση για μετατόπιση Δx = 16 m προς τα πάνω.

$$\Delta x = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot \Delta t^2 \text{ οπότε: } \Delta t = 4 \ s$$

$$\upsilon_{4s} = \alpha \cdot \Delta t = 8 \ \frac{m}{s}$$

(Μονάδες 5)

4.3) Το νήμα (1) κόβεται τη χρονική στιγμή $t_1 = 4 \ s$ και η μάζα Α συνεχίζει να ανεβαίνει υπό την επίδραση: της σταθερής δύναμης F του γερανού και του βάρους της. Η μάζα Α θα αποκτήσει νέα επιτάχυνση αφού η δύναμη F ασκείται πλέον μόνο σε αυτή.

$$F - m_A \cdot g = m_A \cdot \alpha' \text{ ή } \alpha' = \frac{F - m_A \cdot g}{m_A} = \frac{72 - 30}{3} \frac{m}{s^2} = 14 \ \frac{m}{s^2}$$

Για την κινητική ενέργεια του Α τη χρονική στιγμή $t_2 = 5 \ s$ έχουμε:

$$\upsilon_{5s} = \upsilon_{4s} + \alpha' \cdot \Delta t' = \upsilon_{4s} + \alpha' \cdot (t_2 - t_1) = (8 + 14 \cdot 1) \frac{m}{s} = 22 \ \frac{m}{s}$$

$$K_{5s} = \frac{1}{2} \cdot m_A \cdot {\upsilon_{5s}}^2 = 726 \ J$$

(Μονάδες 7)

4.4) Η δυναμική ενέργεια τη χρονική στιγμή t = 0 s ($h_o = 0{,}5 m$) είναι $U_o = m_A \cdot g \cdot h_o = 15 \ J$. Τη χρονική στιγμή $t_1 = 4 \ s$ η μάζα Α βρίσκεται σε ύψος $h_1 = (16 + 0{,}5) m$ και η βαρυτική δυναμική ενέργεια του είναι:

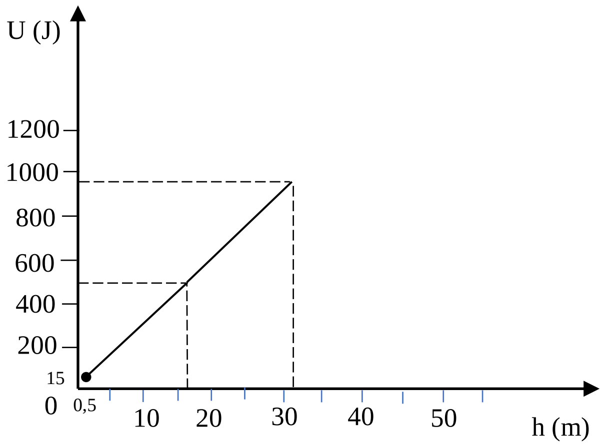
$$U = m_A \cdot g \cdot h_1 = 495 \ J$$

Τη χρονική στιγμή $t_2 = 5 \ s$ η μάζα Α θα έχει ανέβει σε ύψος:

$$H = h_1 + \upsilon_{4s} \cdot \Delta t' + \frac{1}{2} \alpha' \cdot \Delta t'^2 = (16{,}5 + 8 + 7) m = 31{,}5 \ m$$

Άρα η δυναμική ενέργεια της μάζας Α στην τελική της θέση ($t_2 = 5 \ s$) θα είναι $U_T = m_A \cdot g \cdot H = 945 \ J$

Ακολουθεί το διάγραμμα της βαρυτικής δυναμικής ενέργεια της μάζας Α, ως προς το ύψος από την επιφάνεια του εδάφους:



(Μονάδες 7)

Ενδεικτική Λύση

4.1) Το ύψος Η από το οποίο βάλλεται το σώμα Β είναι το ανώτερο ύψος της τροχιάς του σώματος Α.

$$\upsilon_{A\tau\varepsilon\lambda} = \upsilon_o - g \cdot t_A \text{ ή } \frac{\upsilon_o - \upsilon_{A\tau\varepsilon\lambda}}{g} = t_A \text{ ή } t_A = 1\,s$$

$$H = h_o + \upsilon_o \cdot t_A - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_A^2 = \left(5 + 10 - \frac{10}{2}\right) m = 10\, m, \text{ από το έδαφος.}$$

Άρα $H = 2 \cdot h_o$ και η διαφορά ύψους των σημείων Α-Β είναι h_o.

(Μονάδες 6)

4.2) Τη χρονική στιγμή t_K που θα βρεθούν και τα δύο σώματα στο ίδιο ύψος, το σώμα Α θα έχει διανύσει απόσταση y από την αρχική του θέση και το σώμα Β θα έχει κατέβει κατά $h_o - y$ από τη θέση εκκίνησης.

$$y = \upsilon_o \cdot t_K - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_K^2$$

$$h_o - y = \upsilon_o \cdot t_K + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_K{}^2$$

Αν προσθέσω κατά μέλη τις δύο σχέσεις προκύπτει ότι: $h_o = 2 \cdot \upsilon_o \cdot t_K$ ή $t_K = \frac{h_o}{2 \cdot \upsilon_o} = \frac{5}{20} s$ ή $t_K = 0{,}25\, s$

β΄ τρόπος

Οι εξισώσεις κίνησης των δύο σωμάτων είναι:

$$y_1 = h_o + \upsilon_o \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

και

$$y_2 = H - \upsilon_o \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

Όταν τα σώματα απέχουν ίσες αποστάσεις από το έδαφος ισχύει:

$$y_1 = y_2 \quad \text{ή} \quad h_o + \upsilon_o \cdot t_K - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_K{}^2 = H - \upsilon_o \cdot t_K - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_K{}^2 \quad \text{ή} \quad h_o + \upsilon_o \cdot t_K = H - \upsilon_o \cdot t_K$$

$$\text{ή} \quad 2\upsilon_o \cdot t_K = H - h_o \quad \text{ή} \quad t_K = \frac{H - h_o}{2\upsilon_o} \quad \text{ή} \quad t_K = 0{,}25 s$$

(Μονάδες 7)

4.3) Τα δύο σώματα θα βρίσκονται σε ύψος y πάνω από την επιφάνεια του εδάφους οπότε:

$$y = h_o + \upsilon_o \cdot t_K - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_K^2 = (5 + 2{,}5 - 0{,}3125) m \cong 7{,}19\, m$$

(Μονάδες 6)

4.4) Η μηχανική ενέργεια των σωμάτων Α και Β διατηρείται σε όλη τη διάρκεια της κίνησης τους. Αν επιλέξουμε να βρούμε τη μηχανική τους ενέργεια στο ανώτερο ύψος της τροχιάς τους.

Για το σώμα Α

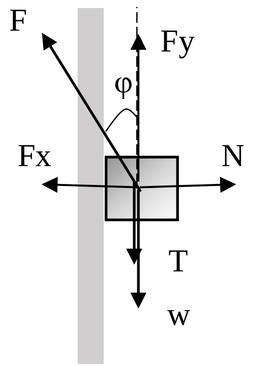
$$E_A = U_A + K_A = m_A \cdot g \cdot H = 0{,}5 \cdot 10 \cdot 10 J = 50\, J$$

Για το σώμα Β

$$E_B = U_B + K_B = m_B \cdot g \cdot H + \frac{1}{2} \cdot m_B \cdot \upsilon_o{}^2 = (2 \cdot 10 \cdot 10 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 10^2) J = 300\, J$$

(Μονάδες 6)

Ενδεικτική Λύση



4.1) Όταν το σώμα κινείται προς τα πάνω με σταθερή ταχύτητα σύμφωνα με τον 1ο νόμο του Newton (για τον κατακόρυφο και τον οριζόντιο άξονα αντίστοιχα) ισχύει:

$$F_y - T - w = 0 \ \ (1)$$

$$F_x - N = 0 \text{ ή } F_x = N$$

όπου $T = \mu \cdot Fx$

Άρα από την (1) προκύπτει:

$$F \cdot συνφ - \mu \cdot F \cdot ημφ - m \cdot g = 0$$

$(F \cdot 0{,}8 \ - 0{,}5 \ \cdot F \cdot 0{,}6 \ - 2 \cdot 10)N = 0\ N$ ή $0{,}5 \cdot F = 20N$ ή $F = \ 40\ N$

(Μονάδες 6)

4.2) Αν το σώμα κατεβαίνει προς τα κάτω, τότε η τριβή θα έχει κατεύθυνση προς τα πάνω και άρα από 1ο και 2ο νόμο Newton προκύπτει

$$m \cdot g - T - \ F'y = m \cdot a \ \ (2)$$

$$F'x - N = 0 \text{ ή } F'x = N$$

Με θετική φορά στον κατακόρυφο άξονα, τη φορά της κίνησης του σώματος. Άρα:

$$m \cdot g - \mu \cdot F' \cdot ημφ - F' \cdot συνφ = m \cdot \alpha$$

$2 \cdot 10\ N - 0{,}5 \cdot F' \cdot 0{,}6 - F' \cdot 0{,}8 = 2 \cdot 2\ N$ ή $16\ N = \ F' \cdot 1{,}1$ ή $F' = \frac{16}{1{,}1}N$ ή $F' \cong 14{,}55\ N$

(Μονάδες 6)

4.3) Το έργο της δύναμης F' για μετατόπιση 11 m είναι:

$$W_F = F' \ \cdot Δx \cdot \ συν(180 - \varphi)^o = \frac{16}{1{,}1} \cdot 11 \ \cdot (-\,0{,}8) = -128J$$

(Μονάδες 3)

Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας για τη μετατόπιση Δx = 11 m θα ισούται με το έργο της συνολικής δύναμης στον κατακόρυφο άξονα.

$$ΔK = \ F_{ολ} \cdot Δx \ = m \cdot a \ \cdot Δx = 2 \cdot 2 \cdot 11J = 44\,J$$

(Μονάδες 4)

4.4) Αν το μέτρο της δύναμης F γίνει μηδενικό, το ίδιο θα ισχύει και για τις συνιστώσες της. Άρα το σώμα θα κινείται προς τα κάτω χωρίς τριβή.

Δηλαδή το σώμα θα κινείται μόνο υπό την επίδραση του βάρους του, οπότε θα έχουμε μια ελεύθερη πτώση.

Για την μετατόπιση $Δx' = 10m$ η μεταβολή της κινητικής ενέργειας θα είναι:

$$ΔK = \ m \cdot g \cdot Δx' = \ 2 \cdot 10 \cdot 10J = 200J$$

Η μηχανική ενέργεια θα παραμένει σταθερή όσο το σώμα κινείται ελεύθερο χωρίς τριβές, οπότε $ΔE = 0$.

(Μονάδες 6)

Ενδεικτική Λύση

4.1) Το σώμα Β που κινείται με σταθερή ταχύτητα, σύμφωνα με τον 1ο νόμο Newton δέχεται μηδενική συνισταμένη δύναμη.

Το σώμα Α δέχεται συνισταμένη δύναμη $F o\lambda = m \cdot \alpha_A = 2 \cdot 5N = 10\ N$, με φορά ίδια με της επιτάχυνσης, δηλαδή αντίθετη από της ταχύτητας.

(Μονάδες 5)

4.2) Το σώμα Β κινείται με σταθερή ταχύτητα (αρχικά μικρότερη της ταχύτητας του σώματος Α). Το σώμα Α απομακρύνεται από τη θέση $x_o = 0$ πιο γρήγορα από το Β, με ταχύτητα όμως που διαρκώς μειώνεται αφού επιβραδύνεται. Την στιγμή που η ταχύτητά του θα μηδενιστεί, ακινητοποιείται στιγμιαία και μετά αλλάζει φορά κίνησης.

Για το σώμα Β: $x = \upsilon_{B0} \cdot t$

Για το σώμα Α: $x = \upsilon_{A0} \cdot t - \frac{1}{2} \cdot \alpha_A \cdot t^2$, από αυτές τις δύο με αντικατάσταση του x:

$$\upsilon_{B0} \cdot t = \upsilon_{A0} \cdot t - \frac{1}{2} \cdot \alpha_A \cdot t^2$$

Οπότε προκύπτει $t = 0$ ή $t = 8\,s$

Δηλαδή τα σώματα θα ξαναβρεθούν το ένα δίπλα στο άλλο μετά από 8s.

(Μονάδες 6)

4.3) Αφού το Β έχει σταθερή ταχύτητα, αρκεί να βρούμε πότε η ταχύτητα του Α γίνεται κατά μέτρο ίση με 10m/s:

$$\upsilon_{A1} = \upsilon_{A0} - \alpha_A \cdot t_1 \text{ ή } \alpha_A \cdot t_1 = \upsilon_{A0} - \upsilon_{A1} \text{ ή } t_1 = \frac{\upsilon_{A0} - \upsilon_{A1}}{\alpha_A}$$

Στην μία περίπτωση θα έχουμε $\upsilon_{A1} = 10 m/s$, οπότε η παραπάνω σχέση μας δίνει:

$$t_1 = 4s$$

(Μονάδες 3)

Για $\upsilon_{A2} = -10 m/s$ έχουμε:

$$t_2 = 8\,s$$

(Μονάδες 4)

Δ4) Το έργο της τριβής θα υπολογιστεί για κάθε σώμα:

Σώμα Β:

Η μετατόπιση του σώματος σε χρόνο 8 s είναι $\Delta x = \upsilon_{B0} \cdot t_2 = 80\,m$

Και η τριβή $T_B = \mu \cdot N = \mu \cdot m_B \cdot g = 0{,}4 \cdot 8 \cdot 10N = 32\,N$

Άρα έργο τριβής: $W_{TB} = T_B \cdot \Delta x \cdot \sigma\upsilon\nu 180^o = -32 \cdot 80J = -2560J$

(Μονάδες 3)

Σώμα Α:

Το σώμα Α αλλάζει φορά κίνησης τη χρονική στιγμή 6s. Συνεπώς το διάστημα που διανύει στην διάρκεια των 8s δε συμπίπτει με την μετατόπισή του. Άρα δεν μπορούμε να υπολογίσουμε το έργο της τριβής με τον τρόπο που εφαρμόσαμε στην περίπτωση του Β.

Για 6 s διανύει: $x' = \upsilon_{A0} \cdot t - \frac{1}{2} \cdot \alpha_A \cdot t^2$ ή $x = \left(30 \cdot 6 - \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 36\right) m = 90\ m$

Τα επόμενα 2 s προς την αντίθετη κατεύθυνση $x'' = \frac{1}{2} \cdot \alpha_A \cdot t'^2 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4\ m = 10\ m$

Άρα συνολικά διανύει μήκος διαδρομής 100 m.

Η τριβή σε όλο το χρονικό διάστημα κίνησης έχει κατεύθυνση αντίθετη της φοράς κίνησης και της μετατόπισης. Έχει όμως σταθερό μέτρο:

$$T_A = \mu \cdot N' = \mu \cdot m_A \cdot g = 0{,}4 \cdot 2 \cdot 10N = 8\ N$$

Άρα συνολικό έργο τριβής: $W_{TA} = T_A \cdot (x' + x'') \cdot \sigma\upsilon\nu 180^o = -8 \cdot (10 + 90) J = -800J$

(Μονάδες 4)

Ενδεικτική Λύση

4.1) Κίνηση με σταθερή ταχύτητα, σύμφωνα με τον 1ο νόμο Newton σημαίνει μηδενική συνολική δύναμη για κάθε κύβο. Άρα

$$F_1 = T_A = \mu_A \cdot N = \mu_A \cdot m_A \cdot g = 0{,}4 \cdot 2 \cdot 10N = 8\,N$$
$$F_2 = T_B = \mu_B \cdot N' = \mu_B \cdot m_B \cdot g = 0{,}1 \cdot 4 \cdot 10N = 4\,N$$

(Μονάδες 5)

4.2) Χωρίς τις δυνάμεις F_1 και F_2 τα σώματα κάνουν ευθύγραμμα ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση. Θα κινηθούν μέχρι να ακινητοποιηθούν.

Για τον κύβο Α έχουμε:

$$\alpha_1 = \frac{T_A}{m_A} = 4\ \frac{m}{s^2}$$

Η στιγμή της ακινητοποίησης, έστω t_1, υπολογίζεται από την εξίσωση της ταχύτητας:

$$\upsilon_A = \upsilon_{A0} - \alpha_1 \cdot t_1 \text{ ή } 0 = \upsilon_{A0} - \alpha_1 \cdot t_1 \text{ ή } t_1 = \frac{\upsilon_{A0}}{\alpha_1} \text{ ή } t_1 = 5s$$

Η μετατόπισή του ως εκείνη την στιγμή είναι:

$$\Delta x = \upsilon_{A0} \cdot t_1 - \frac{1}{2} \cdot \alpha_1 \cdot {t_1}^2 = \left(20 \cdot 5 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5^2\right) m = 50\,m$$

Αντίστοιχα, για τον κύβο Β:

$$\alpha_2 = \frac{T_B}{m_B} = 1\ \frac{m}{s^2}$$

$$\upsilon_B = \upsilon_{B0} - \alpha_2 \cdot t_2 \text{ ή } 0 = \upsilon_{B0} - \alpha_2 \cdot t_2 \text{ ή } t_2 = \frac{\upsilon_{B0}}{\alpha_2} \text{ ή } t_2 = 10s$$

$$\Delta x' = \upsilon_{B0} \cdot t_2 - \frac{1}{2} \cdot \alpha_2 \cdot {t_2}^2 = \left(10 \cdot 10 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 10^2\right) m = 50\,m$$

Έστω t_κ η χρονική στιγμή κατά την οποία οι δύο κύβοι θα έχουν την ίδια ταχύτητα. Ισχύει:

$$\upsilon_{A0} - \alpha_1 \cdot t_\kappa = \upsilon_{B0} - \alpha_2 \cdot t_\kappa$$
$$t_\kappa = \frac{\upsilon_{A0} - \upsilon_{B0}}{\alpha_1 - \alpha_2} = \frac{20 - 10}{4 - 1} s = 3{,}33\ s$$

(Μονάδες 7)

4.3) Το έργο της τριβής ολίσθησης για κάθε κύβο θα υπολογιστεί από το Θ.Μ.Κ.Ε.

Με βάση το προηγούμενο ερώτημα, η κοινή ταχύτητα θα είναι ίση με:

$$\upsilon_\kappa = \upsilon_{A0} - \alpha_1 \cdot t_\kappa = \left(20 - 4 \cdot \frac{10}{3}\right) \frac{m}{s} = \frac{20}{3} \frac{m}{s} = 6{,}67\ \frac{m}{s}$$

Για το σώμα Α:

$$K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = W_{Ta}$$
$$\frac{1}{2} \cdot m_A \cdot {\upsilon_\kappa}^2 - \frac{1}{2} \cdot m_A \cdot {\upsilon_{A0}}^2 = W_{Ta}$$
$$\left[\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \left(\frac{20}{3}\right)^2 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 20^2\right] J = W_{Ta}$$
$$W_{Ta} = -355.56\,J$$

Για το σώμα Β:

$$K'_{\tau\varepsilon\lambda} - K'_{\alpha\rho\chi} = W_{T\beta}$$

$$\frac{1}{2} \cdot m_B \cdot \upsilon_\kappa{}^2 - \frac{1}{2} \cdot m_B \cdot \upsilon_{B0}{}^2 = W_{T\beta}$$

$$\left[\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot (\frac{20}{3})^2 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 10^2\right] J = W_{Ta}$$

$$W_{Ta} = -111.11\, J$$

(Μονάδες 6)

4.4) Αν τη χρονική στιγμή $t_o = 0$ s οι δυνάμεις $F_1 = 8$ N και $F_2 = 4$ N έχουν φορά αντίθετη στη φορά της κίνησης τότε:

Για τον κύβο Α:

$$\alpha'_1 = \frac{F_1 + T_A}{m_A} = 8\ \frac{m}{s^2}$$

το σώμα θα ακινητοποιηθεί σε χρόνο: $\upsilon_A = \upsilon_{A0} - \alpha'_1 \cdot t'_1$ ή $0 = 20 - 8 \cdot t'_1$ ή $t'_1 = 2{,}5\, s$

και θα μετατοπιστεί κατά Δy: $\Delta y = \upsilon_{A0} \cdot t'_1 - \frac{1}{2} \cdot \alpha'_1 \cdot t'_1{}^2 = \left[20 \cdot \frac{5}{2} - \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot (\frac{5}{2})^2\right] m = 25\, m$

Για τον κύβο Β:

$$\alpha'_2 = \frac{F_2 + T_B}{m_B} = 2\ \frac{m}{s^2}$$

το σώμα θα ακινητοποιηθεί σε χρόνο: $\upsilon_B = \upsilon_{B0} - \alpha'_2 \cdot t'_2$ ή $0 = 10 - 2 \cdot t'_2$ ή $t'_2 = 5\, s$

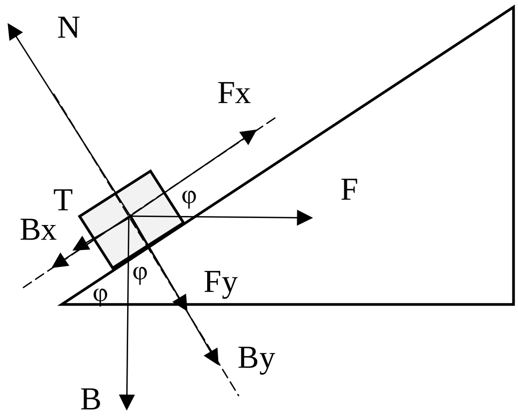
και θα μετατοπιστεί κατά Δy': $\Delta y' = \upsilon_{B0} \cdot t'_2 - \frac{1}{2} \cdot \alpha'_2 \cdot t'_2{}^2 = \left[10 \cdot 5 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 5^2\right] m = 25\, m$

Άρα οι δύο κύβοι επιβραδύνονται και ακινητοποιούνται στην ίδια απόσταση (25 m) από τη θέση $x_o = 0$. Αυτή είναι και η θέση που θα ξαναβρεθούν δίπλα δίπλα και αυτό θα γίνει από τη χρονική στιγμή 5 s και μετά.

Σημείωση: Τα σώματα αφού ακινητοποιηθούν θα παραμείνουν ακίνητα δεδομένου ότι οι δυνάμεις F_1 και F_2 είναι ίσες, κατά μέτρο, με την τριβή ολίσθησης για κάθε σώμα. Η τριβή ολίσθησης είναι πάντα μικρότερη από την οριακή στατική τριβή, οπότε όταν τα σώματα ακινητοποιηθούν δε θα κινηθούν πάλι υπό την επίδραση των δυνάμεων F_1 και F_2.

(Μονάδες 7)

Ενδεικτική Λύση



4.1) Κίνηση με σταθερή ταχύτητα, σύμφωνα με τον 1ο νόμο Newton σημαίνει μηδενική συνολική δύναμη για το σώμα.

Άρα

Στον κάθετο στο κεκλιμένο επίπεδο άξονα (έστω y΄y):

$F_y + B_y = N$ ή $F \cdot ημφ + m \cdot g \cdot συνφ = N$

Στον παράλληλο στο κεκλιμένο επίπεδο άξονα (έστω x΄x):

$F_x = T + B_x = \mu \cdot N + B_x$ όπου με συνδυασμό αυτών των εξισώσεων προκύπτει:

$$F \cdot συνφ = \mu\,(F \cdot ημφ + m \cdot g \cdot συνφ) + m \cdot g \cdot ημφ$$

$$F \cdot συνφ = \mu \cdot F \cdot ημφ + \mu \cdot m \cdot g \cdot συνφ + m \cdot g \cdot ημφ$$

$$F \cdot συνφ - \mu \cdot F \cdot ημφ = \mu \cdot m \cdot g \cdot συνφ + m \cdot g \cdot ημφ$$

$$m = \frac{F \cdot συνφ - \mu \cdot F \cdot ημφ}{\mu \cdot g \cdot συνφ + g \cdot ημφ} = \frac{20 \cdot 0{,}8 - 0{,}25 \cdot 20 \cdot 0{,}6}{0{,}25 \cdot 10 \cdot 0{,}8 + 10 \cdot 0{,}6} = \frac{13}{8}\,kg = 1{,}625\,kg$$

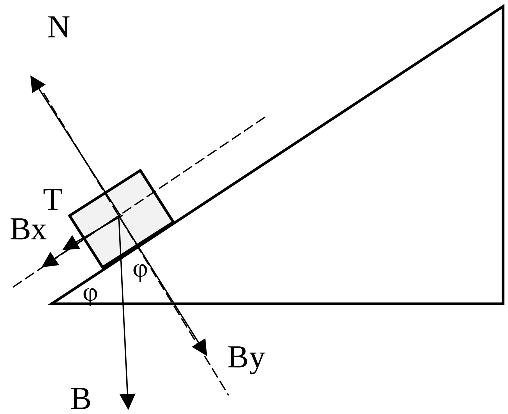
(Μονάδες 6)

4.2) Το έργο του βάρους για μετατόπιση Δx = 2 m στο κεκλιμένο επίπεδο αντιστοιχεί σε μεταβολή ύψους

$$h = \Delta x \cdot ημφ = 2 \cdot 0{,}6m = 1{,}2\,m$$

Άρα $W_B = m \cdot g \cdot h \cdot συν180^o = 1{,}625 \cdot 10 \cdot 1{,}2 \cdot (-1)J = -19{,}5\,J$ μιας και η δύναμη του βάρους αντιτίθεται στην κίνηση του σώματος.

(Μονάδες 5)



4.3) Χωρίς τη δύναμη *F* το σώμα θα κάνει ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση στον άξονα x΄x και θα ισορροπεί στον άξονα y΄y.

Στον y΄y:

$B_y = N$ ή $m \cdot g \cdot συνφ = N$

Στον x΄x:

$m \cdot \alpha = T' + B_x = \mu \cdot N + m \cdot g \cdot ημφ$ ή

$$m \cdot \alpha = \mu \cdot m \cdot g \cdot συνφ + m \cdot g \cdot ημφ$$

$$\alpha = \mu \cdot g \cdot συνφ + g \cdot ημφ$$

Άρα $\alpha = (0{,}25 \cdot 10 \cdot 0{,}8 + 6)\frac{m}{s^2} = 8\,\frac{m}{s^2}$, με φορά αντίθετη της φοράς της αρχικής του ταχύτητας.

Το σώμα θα επιβραδυνθεί μέχρι να ακινητοποιηθεί μετά από χρόνο: $\upsilon = \upsilon_o - \alpha \cdot t_a$ ή $0 = \upsilon_o - \alpha \cdot t_a$ ή $t_a = \frac{\upsilon_o}{\alpha} = \frac{16}{8}s = 2\,s$

έχοντας μετατοπιστεί κατά $\Delta x = \upsilon_o \cdot t_a - \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot {t_a}^2 = \left(16 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4\right)m = 16\,m$

Όταν ακινητοποιηθεί το σώμα θα δέχεται την επίδραση του βάρους με τη συνιστώσα που είναι παράλληλη στον άξονα x΄x $B_x = m \cdot g \cdot ημφ = 9{,}75\,N$ να έχει μεγαλύτερο μέτρο από την οριακή στατική τριβή, οπότε το σώμα θα αρχίσει να γλιστράει πάλι προς τη βάση του κεκλιμένου επιπέδου κάνοντας μια ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση.

(Από 2^{o} νόμο Newton) $m \cdot \alpha' = B_x - T' = m \cdot g \cdot \eta\mu\varphi - \mu \cdot m \cdot g \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi$ ή $\alpha' = g \cdot \eta\mu\varphi - \mu \cdot g \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi$

Συνεπώς $\alpha' = (6 - 0{,}25 \cdot 8)\frac{m}{s^2} = 4\frac{m}{s^2}$

Το σώμα θα μετατοπιστεί κατά $\Delta x' = (16 + 16)\mathrm{m} = 32\ \mathrm{m}$ ολισθαίνοντας προς τα κάτω με επιτάχυνση $4\frac{m}{s^2}$ σε χρόνο t_κ $\alpha\pi\acute{o}$ $\Delta x' = \frac{1}{2} \cdot \alpha' \cdot {t_\kappa}^2$ ή $t_\kappa = 4\ s$

Το χρονικό διάστημα που θα χρειαστεί για να επιστρέψει στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου θα είναι:

$$t_a + t_\kappa = 6\ s$$

(Μονάδες 7)

4.4) Το έργο της τριβής του δαπέδου για την διαδρομή από τη βάση του κεκλιμένου επιπέδου και για τα 16 m που ασκείται η F θα είναι: $W_T = T \cdot \Delta x \cdot \sigma\upsilon\nu 180^o$ αφού αντιτίθεται πάντα στη φορά της κίνησης. Το μέτρο της τριβής για το κομμάτι της διαδρομής που ασκείται η δύναμη *F*:

$$T = \mu \cdot (F \cdot \eta\mu\varphi + m \cdot g \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi) = 0{,}25 \cdot (20 \cdot 0{,}6 + 1{,}625 \cdot 10 \cdot 0{,}8)N = (3 + 3{,}25)N = 6{,}25\ N$$

$$W_T = T \cdot \Delta x_1 \cdot \sigma\upsilon\nu 180^o = -6{,}25 \cdot 16\,J = -100\,J$$

Για το υπόλοιπο κομμάτι της διαδρομής (16 m προς τα πάνω και 32 m επιστροφή στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου) η τριβή ολίσθησης είναι σταθερή κατά μέτρο και πάντα αντίθετη προς τη φορά της κίνησης.

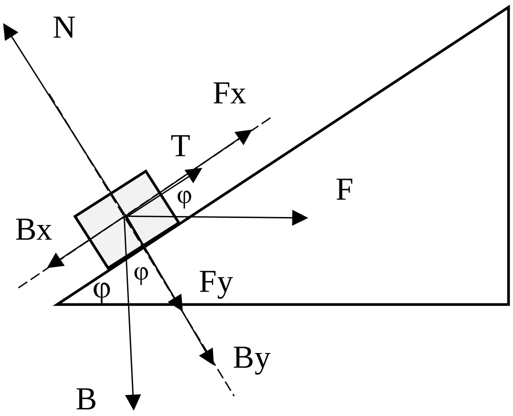
$T' = \mu \cdot m \cdot g \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi = (0{,}25 \cdot 1{,}625 \cdot 10 \cdot 0{,}8)N = 3{,}25\ N$

$W_{T'} = T' \cdot \Delta x_2 \cdot \sigma\upsilon\nu 180^o = -3{,}25 \cdot 48\,J = -156\,J$

Άρα συνολικό έργο τριβής $-156 + (-100) = -256\,J$

(Μονάδες 7)

Ενδεικτική Λύση



4.1) Κίνηση με σταθερή ταχύτητα, σύμφωνα με τον 1ο νόμο Newton σημαίνει μηδενική συνολική δύναμη για το σώμα. Άρα

Στον κάθετο στο κεκλιμένο επίπεδο άξονα (έστω y΄y):

$F_y + B_y = N$ ή $F \cdot ημφ + m \cdot g \cdot συνφ = N$

Στον παράλληλο στο κεκλιμένο επίπεδο άξονα (έστω x΄x):

$F_x + T = B_x$ ή $F \cdot συνφ + μ \cdot N = m \cdot g \cdot ημφ$

Οπότε με αντικατάσταση του Ν στη δεύτερη σχέση

$$F \cdot συνφ + μ\,(F \cdot ημφ + m \cdot g \cdot συνφ) = m \cdot g \cdot ημφ$$

$$μ = \frac{m \cdot g \cdot ημφ - F \cdot συνφ}{F \cdot ημφ + m \cdot g \cdot συνφ} = \frac{10 \cdot 10 \cdot 0{,}6 - 20 \cdot 0{,}8}{20 \cdot 0{,}6 + 10 \cdot 10 \cdot 0{,}8} = \frac{60-16}{12+80} = \frac{44}{92} = 0{,}48 \cong 0{,}5$$

(Μονάδες 6)

4.2) Αν η δύναμη γίνει 25 N, η συνισταμένη στον άξονα x'x θα έχει φορά αντίθετη της ταχύτητας, άρα το σώμα θα κάνει ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση στον x΄x, ενώ θα συνεχίσει να ισορροπεί στον y΄y.

Στον y΄y:

$F_y + B_y = N$ ή $F \cdot ημφ + m \cdot g \cdot συνφ = N$

Στον x΄x:

$F_x + T - B_x = m \cdot a$ ή $F \cdot συνφ + μ \cdot N - m \cdot g \cdot ημφ = m \cdot a$

$$F \cdot συνφ + μ\,(F \cdot ημφ + m \cdot g \cdot συνφ) - m \cdot g \cdot ημφ = m \cdot a$$

$$α = \frac{25 \cdot 0{,}8 + 0{,}5(25 \cdot 0{,}6 + 10 \cdot 10 \cdot 0{,}8) - 10 \cdot 10 \cdot 0{,}6}{10} \frac{m}{s^2}$$

$$α = \frac{20+7{,}5+40-60}{10} \frac{m}{s^2} \text{ ή } α = 0{,}75 \frac{m}{s^2}$$

Άρα το σώμα ολισθαίνει προς τα κάτω με ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση. Δε θα προλάβει να ακινητοποιηθεί μέχρι να φτάσει στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου.

(Μονάδες 6)

4.3) Η μετατόπιση Δx = 30 m στο κεκλιμένο επίπεδο αντιστοιχεί σε μεταβολή ύψους κατά:

$$h = Δx \cdot ημφ = 30 \cdot 0{,}6 m = 18\, m.$$

Άρα $W_B = m \cdot g \cdot h = 1800\, J$ θετικό, αφού συνεισφέρει ενεργειακά στη μετακίνησή του σώματος.

Το έργο της δύναμης θα υπολογιστεί τμηματικά, αφού το μέτρο της αλλάζει στο μέσο της διαδρομής:

$$W_F = F \cdot \frac{Δx}{2} \cdot συν(180-φ)^o + F' \cdot \frac{Δx}{2} \cdot συν(180-φ)^o$$

$$W_F = 20 \cdot 15 \cdot (-0{,}8) + 25 \cdot 15 \cdot (-0{,}8) = [-240 + (-300)]J = -540\, J$$

(Μονάδες 6)

4.4) Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σώματος μπορεί να υπολογιστεί από το έργο των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα για τη μετατόπιση Δx.

Το έργο της τριβής ολίσθησης θα υπολογιστεί επίσης τμηματικά, αφού το μέτρο της αλλάζει ανάλογα το μέτρο της F:

$$W_T = \mu \cdot [(F \cdot \eta\mu\varphi + m \cdot g \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi) + (F' \cdot \eta\mu\varphi + m \cdot g \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi)] \cdot \frac{\Delta x}{2} \cdot \text{συν}180^o$$

$$W_T = 0{,}5 \cdot [(20 \cdot 0{,}6 + 10 \cdot 10 \cdot 0{,}8) + (25 \cdot 0{,}6 + 10 \cdot 10 \cdot 0{,}8)] \cdot \frac{30}{2} \cdot (-1)\, J$$

$$W_T = -0{,}5 \cdot [(12 + 80) + (15 + 80)] \cdot 15 J = -1402{,}5\, J$$

Άρα από το Θ.Μ.Κ.Ε.:

$$K\tau\varepsilon\lambda - K\alpha\rho\chi = W_B + W_F + W_T$$

$$K\tau\varepsilon\lambda = W_B + W_F + W_T + K\alpha\rho\chi$$

$$K\tau\varepsilon\lambda = \left(1800 - 540 - 1402{,}5 + \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 100\right) J$$

$$K\tau\varepsilon\lambda = 357{,}5\, J$$

(Μονάδες 7)

Ενδεικτική Λύση

4.1) Σώμα κινείται ευθύγραμμα με μεταβαλλόμενη ταχύτητα, υπό την επίδραση σταθερής οριζόντιας δύναμης και με αρχική ταχύτητα. Η επιτάχυνση που δέχεται το σώμα θα βρεθεί ως εξής:

$$\upsilon = \upsilon_o + \alpha \cdot \Delta t \text{ ή } \alpha = \frac{\upsilon - \upsilon_o}{\Delta t} \text{ ή } \alpha = \frac{30-10}{10}\frac{m}{s^2} = 2\frac{m}{s^2}$$

Αν το σώμα κινούνταν μόνο υπό την επίδραση της F από το 2ο νόμο Newton θα είχε επιτάχυνση μέτρου $\frac{F}{m} = \frac{50}{10} = 5\frac{m}{s^2}$, άρα δεν ασκείται μόνο η δύναμη F στο σώμα, υπάρχει και τριβή ολίσθησης από το δάπεδο προς το σώμα. Οπότε ο 2ος νόμος Newton θα είναι:

$$F - T = m \cdot \alpha \text{ ή } F - m \cdot \alpha = T \text{ ή } T = (50 - 20)\, N = 30\, N$$

(Μονάδες 6)

4.2) Το σώμα κινείται ευθύγραμμα ομαλά επιταχυνόμενα υπό την επίδραση συνισταμένης δύναμης

$$F o\lambda = m \cdot \alpha$$

Από το Θ.Μ.Κ.Ε. μπορούμε να υπολογίσουμε τη μετατόπιση:

$$K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = F_{o\lambda} \cdot \Delta x$$

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot \upsilon_{\tau\varepsilon\lambda}^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot \upsilon_o^2 = \Delta x \cdot m \cdot a$$

$$\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \upsilon_o^2 - \frac{1}{2} \cdot \upsilon_o^2 = \Delta x \cdot a$$

$$\frac{3 \cdot \upsilon_o^2}{2 \cdot a} = \Delta x$$

$$\Delta x = \frac{3 \cdot 100}{2 \cdot 2} m = 75\, m$$

Συνεπώς η θέση που η ταχύτητα του σώματος θα είναι διπλάσια θα είναι x_B = 75 m

(Μονάδες 6)

4.3) Το σώμα μετά τα πρώτα 10 s κινείται σε δάπεδο όπου δέχεται τριβή ολίσθησης μέτρου:

$$T' = \mu \cdot m \cdot g = 0{,}6 \cdot 10 \cdot 10 = 60\, N > F$$

οπότε από το 2ο νόμο Newton προκύπτει:

$$T' - F = m \cdot \alpha'$$

$$\mu \cdot m \cdot g - F = m \cdot \alpha'$$

$$a' = \frac{\mu \cdot m \cdot g - F}{m} = \frac{60 - 50}{10}\frac{m}{s^2} = 1\frac{m}{s^2}$$

Το διάστημα που θα διανύσει στο επίπεδο με το νέο συντελεστή τριβής ολίσθησης θα προκύψει από τις εξισώσεις κίνησης της νέας ευθύγραμμης ομαλά επιβραδυνόμενης κίνησης.

$$\upsilon = \upsilon_A - \alpha' \cdot \Delta t \quad (1)$$

$$\Delta x' = \upsilon_A \cdot \Delta t - \frac{1}{2} \cdot \alpha' \cdot \Delta t^2 \quad (2)$$

Από (1) προκύπτει $\Delta t = \frac{\upsilon_A}{\alpha'} = \frac{30}{1} s = 30\, s$

Από τη (2) $\Delta x' = (30 \cdot 30 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 30^2) m = 450\, m$

Για να υπολογίσουμε τη θέση του σώματος πρέπει να βρούμε πόσο διάστημα διένυσε τα πρώτα 10 s της κίνησης του.

Από το Θ.Μ.Κ.Ε.

$$K_A - K_o = F o\lambda \cdot \Delta x''$$

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot {\upsilon_A}^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot {\upsilon_o}^2 = \Delta x'' \cdot m \cdot a$$

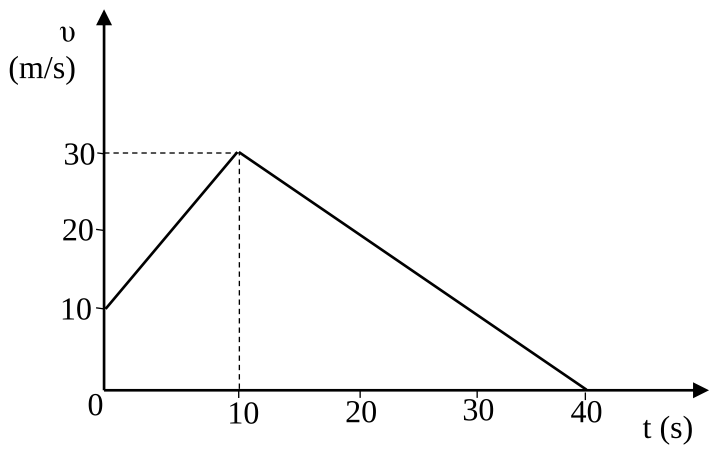
$$\Delta x'' = \frac{900 - 100}{2 \cdot 2} m$$

$$\Delta x'' = \frac{800}{2 \cdot 2} m = 200\ m$$

Συνεπώς το σώμα θα ακινητοποιηθεί στη θέση $x_{\tau\varepsilon\lambda} = (200 + 450)\ m = 650\ m.$

(Μονάδες 7)

4.4) Με βάση τα προηγούμενα αποτελέσματα το διάγραμμα θα έχει τη μορφή :



(Μονάδες 6)

Ενδεικτική Λύση

4.1) Τα χρονικά διαστήματα στα οποία η φωτογραφική μηχανή λάμβανε λήψεις όσο έπεφτε η σφαίρα φαίνονται στον πιο κάτω πίνακα:

Λήψεις	1η	2η	3η	4η	5η	6η	7η	8η	9η	10η	11η
Χρόνος (s)	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0

Συνεπώς από την 1η έως την 6η λήψη έχουν μεσολαβήσει 0,5 s

Η σφαίρα κάνει ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση χωρίς αρχική ταχύτητα, οπότε μπορούμε να υπολογίσουμε την επιτάχυνση της σφαίρας:

$\Delta x = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2$ ή $\alpha = \frac{2 \cdot \Delta x}{t^2}$ ή $\alpha = 8 \frac{m}{s^2}$, άρα η σφαίρα δεν κάνει ελεύθερη πτώση.

(Μονάδες 6)

4.2) Το σώμα από την 6η φωτογραφία στην 7η θα έχει μετακινηθεί κατά Δy

$$\Delta y = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot {t_7}^2 - \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot {t_6}^2 = \left(\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 0{,}6^2 - \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 0{,}5^2\right) m = 0{,}44\, m$$

(Μονάδες 6)

4.3) Αν το σώμα έκανε ελεύθερη πτώση θα κινούνταν με την επιτάχυνση της βαρύτητας. Αυτό όμως δεν ισχύει συνεπώς πέρα από το βάρος ασκείται και η αντίσταση του αέρα. Σύμφωνα με το 2ο νόμο του Newton:

$$m \cdot g - F_A = m \cdot \alpha$$

Το βάρος του σώματος είναι $m \cdot g = 10\, N$, συνεπώς η αντίσταση του αέρα θα είναι: $F_A = m \cdot g - m \cdot \alpha$ ή $F_A = 10 - 8\, N = 2N$

(Μονάδες 5)

4.4) Όταν η σφαίρα φτάνει στο έδαφος (11η λήψη) έχει κινηθεί για χρονικό διάστημα 1 s. Και έχει μετατοπιστεί κατά Δz.

$$\Delta z = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot {t_{11}}^2 = 4\, m$$

Συνεπώς η αρχική βαρυτική δυναμική ενέργεια της σφαίρας θα είναι: $E_{\Delta \upsilon \nu} = m \cdot g \cdot \Delta z = 40\, J$

Και η τελική κινητική $K_{T\varepsilon\lambda} - K_{A\rho\chi} = W_{F o\lambda}$ ή $K_{T\varepsilon\lambda} - 0 = m \cdot \alpha \cdot \Delta z$ ή $K_{T\varepsilon\lambda} = m \cdot \alpha \cdot \Delta z = 32\, J$

(Μονάδες 8)

<u>Ενδεικτική Λύση</u>

4.1) Ας υπολογίσουμε το χρόνο πτώσης για κάθε σφαίρα.

<u>Σφαίρα Α:</u>

$$h_A = \upsilon_A \cdot t_A + \frac{1}{2} g \cdot {t_A}^2$$
$$5 \cdot {t_A}^2 + 10 \cdot t_A - 7{,}8 = 0$$

Προκύπτουν δύο λύσεις αποδεκτή η: $t_A = 0{,}6s$ (η αρνητική λύση απορρίπτεται).

<u>Σφαίρα Β:</u>

$$h_B = \frac{1}{2} g \cdot {t_B}^2$$
$$t_B = \sqrt{\frac{2\,h_B}{g}} = 1\,s$$

<u>Σφαίρα Γ:</u>

$$h_\Gamma = \frac{1}{2} g \cdot {t_\Gamma}^2$$
$$t_\Gamma = \sqrt{\frac{2\,h_\Gamma}{g}} = 1\,s$$

Δηλαδή πρώτη φτάνει στο έδαφος η Α, μετά από χρόνο $0{,}6s$.

(Μονάδες 6)

4.2) Οι σφαίρες Β και Γ εκτελούν ελεύθερη πτώση από το ίδιο ύψος, άρα βρίσκονται διαρκώς στο ίδιο ύψος. Η σφαίρα Α θα βρεθεί στο ίδιο ύψος από το έδαφος μαζί τους τη χρονική στιγμή t_K.

Πρέπει $h_B - y_B = h_A - y_A$,όπου y_A, y_B οι αποστάσεις που θα διανύσουν οι σφαίρες Α,Β καθώς πέφτουν.

Άρα: $5 - \frac{1}{2} g \cdot {t_K}^2 = 7{,}8 - \upsilon_A \cdot t_K - \frac{1}{2} g \cdot {t_K}^2$

$$t_K = \frac{7{,}8 - 5}{10} = 0{,}28\,s$$

(Μονάδες 7)

4.3) Η ταχύτητα που θα έχουν οι σφαίρες όταν φτάνουν στο έδαφος και οι κινητικές τους ενέργειες θα είναι:

<u>Σφαίρα Α:</u>

$$\upsilon'_A = \upsilon_A + g \cdot t_A = (10 + 6)\frac{m}{s} = 16\frac{m}{s}$$
$$K_A = \frac{1}{2} m_A \cdot {\upsilon'_A}^2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 16^2 J = 128\,J$$

<u>Σφαίρα Β:</u>

$$\upsilon'_B = g \cdot t_B = (10 \cdot 1)\frac{m}{s} = 10\frac{m}{s}$$
$$K_B = \frac{1}{2} m_B \cdot {\upsilon'_B}^2 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 10^2 J = 150\,J$$

Σφαίρα Γ:

$$\upsilon'_{\Gamma} = g \cdot t_{\Gamma} = (10 \cdot 1)\frac{m}{s} = 10\frac{m}{s}$$
$$K_{\Gamma} = \frac{1}{2}m_{\Gamma} \cdot {\upsilon'_{\Gamma}}^{2} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 10^{2} J = 50\,J$$

(Μονάδες 7)

4.4) Κατά την κίνηση υπό την επίδραση βαρυτικού πεδίου η μηχανική ενέργεια διατηρείται. Συνεπώς, η μηχανική ενέργεια κάθε σφαίρας θα είναι ίση με την τελική κινητική της ενέργεια.

Συνεπώς:

$$E_{M\eta\chi A} = 128\,J$$
$$E_{M\eta\chi B} = 150\,J$$
$$E_{M\eta\chi \Gamma} = 50\,J$$

(Μονάδες 5)

Ενδεικτική Λύση

4.1) Το διάγραμμα χωρίζεται σε δύο μέρη. Μέχρι τη χρονική στιγμή 5 s ο κύβος κάνει ευθύγραμμη ομαλή επιταχυνόμενη κίνηση με μέτρο επιτάχυνσης που προκύπτει από την κλίση της ευθείας του διαγράμματος της ταχύτητας ως προς το χρόνο.

$$\alpha = \frac{\Delta \upsilon}{\Delta t} = 2\ \frac{m}{s^2}$$

Αν ασκούνταν μόνο η δύναμη F στο οριζόντιο επίπεδο (από το 2ο νόμο Newton) $F = m \cdot \alpha$ θα προέκυπτε επιτάχυνση $\alpha = \frac{F}{m} = 3\frac{m}{s^2}$. Άρα υπάρχει και τριβή οπότε:

$$F - T = m \cdot \alpha$$

$$T = F - m \cdot \alpha = 2\ N$$

Από το νόμο της τριβής, ο συντελεστής τριβής για την πρώτη επιφάνεια είναι $\mu_A = \frac{T}{m \cdot g} = 0{,}1$

Μετά τη χρονική στιγμή 5 s ο κύβος κινείται με σταθερή ταχύτητα (από το 1ο νόμο Newton): $F = T' = 6\ N$

Από το νόμο της τριβής, ο συντελεστής τριβής για τη δεύτερη επιφάνεια είναι $\mu_B = \frac{T'}{m \cdot g} = 0{,}3$

(Μονάδες 6)

4.2) Η μετατόπιση του κύβου (στις δύο επιφάνειες) είναι:

$$\Delta x_A + \Delta x_B = \frac{1}{2} a \cdot {t_A}^2 + \upsilon \cdot t_B = \left(\frac{1}{2} 2 \cdot 5^2 + 10 \cdot 5\right) m = 75\ m$$

(Μονάδες 6)

4.3) Μετά τη χρονική στιγμή 10 s ο κύβος θα ολισθαίνει σε επιφάνεια με τριβή και θα κάνει ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση. Από τον 2ο νόμο του Newton έχουμε

$$T' = m \cdot \alpha' \text{ ή } \alpha' = \frac{T'}{m} = 3\frac{m}{s^2}$$

με αρχική ταχύτητα 10 m/s.

$$\upsilon'_B = \upsilon_B - a' \cdot \Delta t_\Gamma$$

$$\frac{\upsilon_B}{a'} = \Delta t_\Gamma$$

$$\Delta t_\Gamma = 3{,}33\ s$$

Άρα ο κύβος θα ακινητοποιηθεί τη χρονική στιγμή 13,33 s

(Μονάδες 6)

4.4) Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα είναι η δύναμη $\vec{F}$, η τριβή στην πρώτη και στη δεύτερη επιφάνεια ($\vec{T}$ και $\vec{T}'$), το βάρος $\vec{B}$ (που είναι κάθετο στη μετατόπιση άρα το έργο του είναι μηδενικό) και η κάθετη αντίδραση του δαπέδου $\vec{N}$ (με μηδενικό έργο, όμοια με το βάρος).

Το έργο της δύναμης $\vec{F}$: $W_F = F \cdot (\Delta x_A + \Delta x_B) = 6 \cdot 75\ J = 450\ J$

Τα τελευταία 3,33 s της κίνησης του ο κύβος μετατοπίζεται:

$$\Delta x_\Gamma = \upsilon_B \cdot t_\Gamma - \frac{1}{2} a' \cdot {t_\Gamma}^2 = (33{,}3 - 16{,}6) m = 16{,}7\ m$$

Έργο τριβής: $W_{\tau\rho\iota\beta\eta\varsigma\ 1\eta\ \varepsilon\pi\iota\varphi\acute{\alpha}\nu\varepsilon\iota\alpha} = T \cdot \Delta x_A \cdot \sigma\upsilon\nu 180^o = -50J$

$$W_{\tau\rho\iota\beta\eta\varsigma\ 2\eta\ \varepsilon\pi\iota\varphi\acute{\alpha}\nu\varepsilon\iota\alpha} = T' \cdot (\Delta x_{\Gamma} + \Delta x_{B}) \cdot \sigma\upsilon\nu 180^{o} = -400J$$

(Μονάδες 7)

Ενδεικτική Λύση

4.1) Το διάγραμμα χωρίζεται σε δύο μέρη. Μέχρι τη χρονική στιγμή 5 s ο κύβος έχει επιτάχυνση 5 $\frac{m}{s^2}$, άρα σύμφωνα με τον 2ο νόμο Newton:

$$F - T = m \cdot \alpha$$
$$F - \mu \cdot m \cdot g = m \cdot \alpha$$
$$F = m \cdot \alpha + \mu \cdot m \cdot g$$
$$F = (2 \cdot 5 + 0{,}2 \cdot 2 \cdot 10)N = 14\ N$$

Μετά το σημείο Σ ο κύβος έχει επιτάχυνση 2 $\frac{m}{s^2}$, άρα σύμφωνα με τον 2ο νόμο Newton:

$$F - T' = m \cdot \alpha'$$
$$T' = F - m \cdot \alpha'$$
$$T' = (14 - 2 \cdot 2)N = 10\ N$$

Από το νόμο της τριβής:

$$T' = \mu' \cdot m \cdot g$$
$$\mu' = \frac{T'}{m \cdot g} = 0{,}5$$

(Μονάδες 6)

4.2) Ο χρόνος που χρειάζεται ο κύβος για να φτάσει στο σημείο Σ (στο τέλος της πρώτης επιφάνειας) είναι 5 s. Η ταχύτητα του τότε θα είναι:

$$\upsilon_5 = \alpha \cdot t_5 = 25 \frac{m}{s}$$

Η ταχύτητα του 5s πιο μετά θα είναι:

$$\upsilon_{10} = \upsilon_5 + \alpha' \cdot t_{5-10}$$
$$\upsilon_{10} = (25 + 2 \cdot 5)\frac{m}{s} = 35\ \frac{m}{s}$$

(Μονάδες 6)

4.3) Η απόσταση που διανύει ο κύβος για το χρονικό διάστημα από 0 s μέχρι 10 s (για τις δύο επιφάνειες) είναι:

$$S_A + S_B = \frac{1}{2}\alpha \cdot {t_{0-5}}^2 + \upsilon_5 \cdot t_{5-10} + \frac{1}{2}\alpha' \cdot {t_{5-10}}^2 = \left(\frac{1}{2}5 \cdot 5^2 + 25 \cdot 5 + \frac{1}{2}2 \cdot 5^2\right)m = 212{,}5\ m$$

(Μονάδες 6)

4.4) Μετά τη χρονική στιγμή 10 s ο κύβος θα ολισθαίνει σε επιφάνεια με τριβή και θα κάνει ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση.

$T' = m \cdot \alpha''$ ή $\alpha'' = \frac{T'}{m} = 5\frac{m}{s^2}$, με αρχική ταχύτητα 35 m/s.

$$\upsilon'_\Gamma = \upsilon_{10} - a'' \cdot \Delta t_\Gamma$$
$$\frac{\upsilon_{10}}{a''} = \Delta t_\Gamma$$
$$\Delta t_\Gamma = 7\ s$$

Άρα ο κύβος θα ακινητοποιηθεί τη χρονική στιγμή 17 s.

Μετά τη χρονική στιγμή 10 s θα διανύσει απόσταση:

$$S_{\Gamma} = \upsilon_{10} \cdot \Delta t_{\Gamma} - \frac{1}{2} \cdot a'' \cdot \Delta t_{\Gamma}{}^{2}$$

$$S_{\Gamma} = \left(35 \cdot 7 - \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 7^{2}\right) \mathrm{m} = 122{,}5\ \mathrm{m}$$

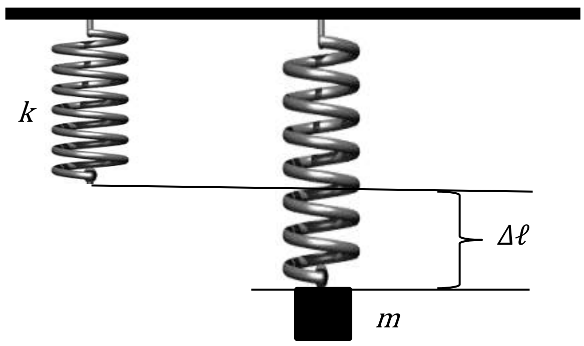
Συνεπώς και με βάση το ερώτημα 4.3 ο κύβος θα μετατοπιστεί συνολικά κατά:

$$(212{,}5+122{,}5\ )\mathrm{m}\ =\ 335\ \mathrm{m}$$

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 2

2.1.



Α. β)

Μονάδες 4

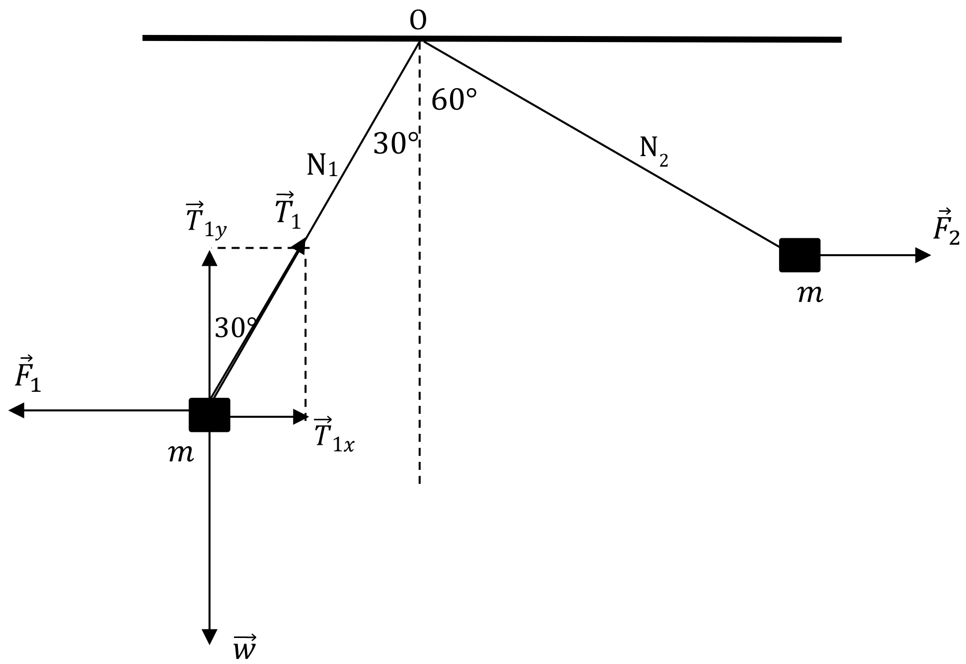
Β. Στη θέση ισορροπίας του συστήματος ιδανικό ελατήριο – σώμα μάζας m ισχύει: $\sum F = 0$, $F_{\varepsilon\lambda} = w$, $k \cdot \Delta\ell = m \cdot g$, $\Delta\ell = \frac{m \cdot g}{k}$ [1]

Στη θέση ισορροπίας του συστήματος ιδανικό ελατήριο – σώμα μάζας $2 \cdot m$ ισχύει: $\sum F = 0$, $F'_{\varepsilon\lambda} = w$, $k \cdot \Delta\ell' = 2 \cdot m \cdot g$, $\Delta\ell' = \frac{2 \cdot m \cdot g}{k}$ [2]

Από τις εξισώσεις [1] και [2] προκύπτει: $\Delta\ell' = 2 \cdot \Delta\ell$

Μονάδες 8

2.2.



Α. β)

Μονάδες 4

Β. Από την ισορροπία του συστήματος σώμα – ιδανικό νήμα N_1 ισχύει:

$\sum F = 0$, $\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} T_{1x} = F_1 \\ T_{1y} = w \end{cases}$, $\begin{cases} T_1 \cdot συν30° = F_1 \\ T_1 \cdot ημ30° = m \cdot g \end{cases}$,

$εφ30° = \frac{m \cdot g}{F_1}$, $F_1 = \frac{m \cdot g}{\frac{1}{\sqrt{3}}}$, $F_1 = \sqrt{3} \cdot m \cdot g$ [1]

Από την ισορροπία του συστήματος σώμα – ιδανικό νήμα N_2 ισχύει αντίστοιχα:

$\sum F = 0$, $\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} T_{2x} = F_2 \\ T_{2y} = w \end{cases}$, $\begin{cases} T_2 \cdot συν60° = F_2 \\ T_2 \cdot ημ60° = m \cdot g \end{cases}$,

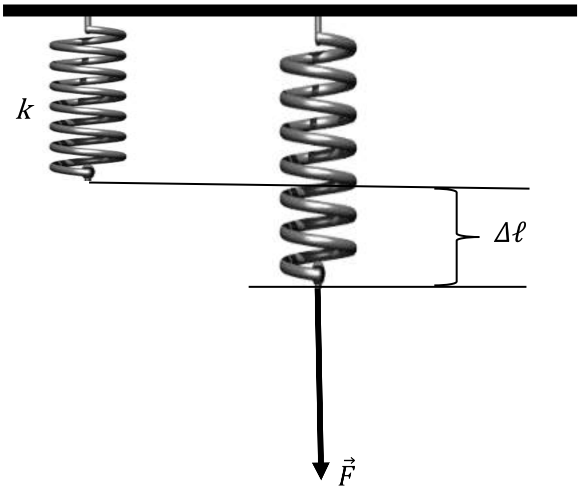
$εφ60° = \frac{m \cdot g}{F_2}$, $F_2 = \frac{m \cdot g}{\sqrt{3}}$ [2]

Διαιρώντας κατά μέλη τις εξισώσεις [1] και [2] προκύπτει: $\frac{F_1}{F_2} = 3$

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 2

2.1.



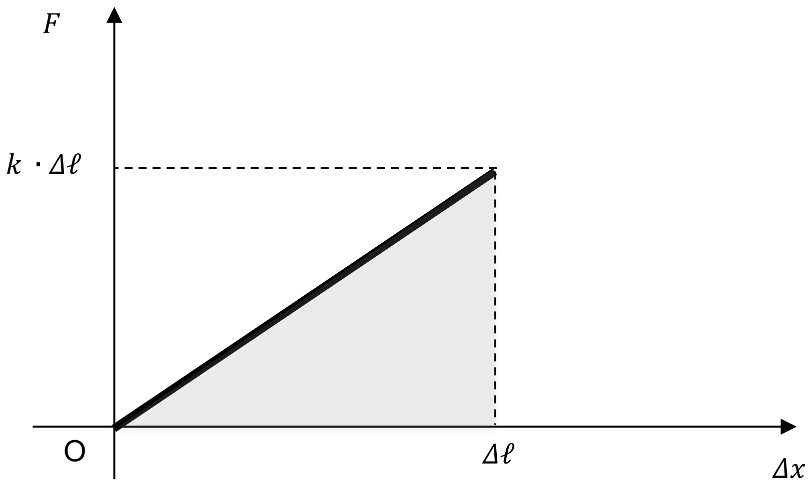
Α. γ)

Μονάδες 4

Β. Αφού το άκρο του ελατηρίου κινείται με σταθερή ταχύτητα, συμπεραίνουμε ότι ισχύει ο 1ος Νόμος του Newton:

$$\Sigma F = 0 \quad ή \quad F - F_{\varepsilon\lambda} = 0 \quad ή \quad F = F_{\varepsilon\lambda} \quad ή \quad F = k \cdot \Delta x$$

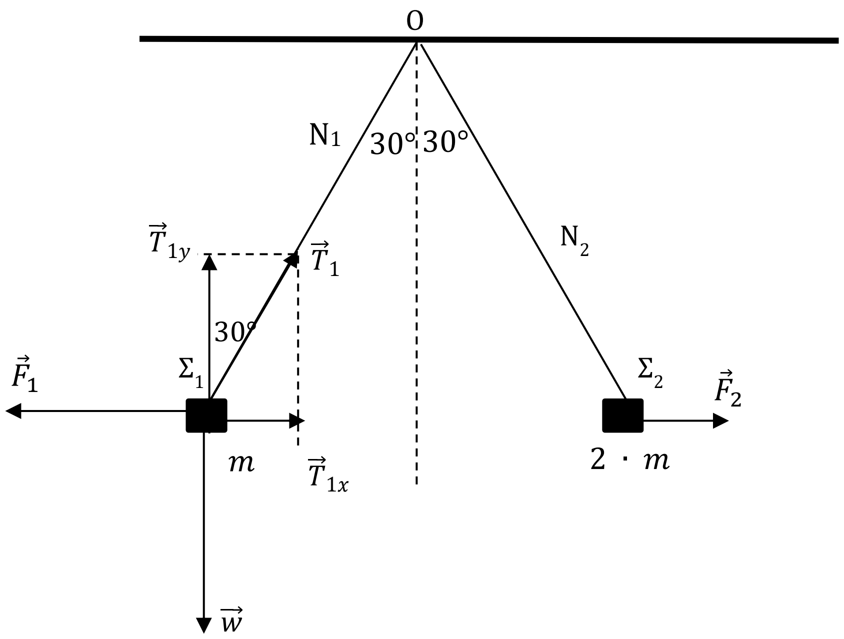
Το μέτρο της δύναμης μεταβάλλεται με την μετατόπιση, συνεπώς δεν μπορούμε να υπολογίσουμε το έργο της αλγεβρικά. Μπορούμε όμως να το υπολογίσουμε γραφικά, με βάση την γραφική παράσταση που ακολουθεί, αφού ισούται με το γραμμοσκιασμένο εμβαδό:



$$W_F = \frac{1}{2} \cdot \Delta\ell \cdot (k \cdot \Delta\ell) = \frac{1}{2} \cdot k \cdot (\Delta\ell)^2$$

Μονάδες 8

2.2.



Α. α)

Μονάδες 4

Β. Από την ισορροπία του συστήματος σώμα – ιδανικό νήμα N$_1$ ισχύει:

$$\sum F = 0 \,,\ \begin{Bmatrix} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{Bmatrix},\ \begin{Bmatrix} T_{1x} = F_1 \\ T_{1y} = w_1 \end{Bmatrix},\ \begin{Bmatrix} T_1 \cdot \text{συν}30° = F_1 \\ T_1 \cdot \text{ημ}30° = m \cdot g \end{Bmatrix},$$

$$\text{εφ}30° = \frac{m \cdot g}{F_1} \,,\ F_1 = \frac{m \cdot g}{\frac{1}{\sqrt{3}}} \,,\ F_1 = \sqrt{3} \cdot m \cdot g \ [1]$$

Από την ισορροπία του συστήματος σώμα – ιδανικό νήμα N$_2$ ισχύει αντίστοιχα:

$$\sum F = 0 \,,\ \begin{Bmatrix} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{Bmatrix},\ \begin{Bmatrix} T_{2x} = F_2 \\ T_{2y} = w_2 \end{Bmatrix},\ \begin{Bmatrix} T_2 \cdot \text{συν}30° = F_2 \\ T_2 \cdot \text{ημ}30° = 2 \cdot m \cdot g \end{Bmatrix},$$

$$\text{εφ}30° = \frac{2 \cdot m \cdot g}{F_2} \,,\ F_2 = 2 \cdot \sqrt{3} \cdot m \cdot g \ [2]$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις εξισώσεις [1] και [2] προκύπτει: $\frac{F_1}{F_2} = \frac{1}{2}$

Μονάδες 9

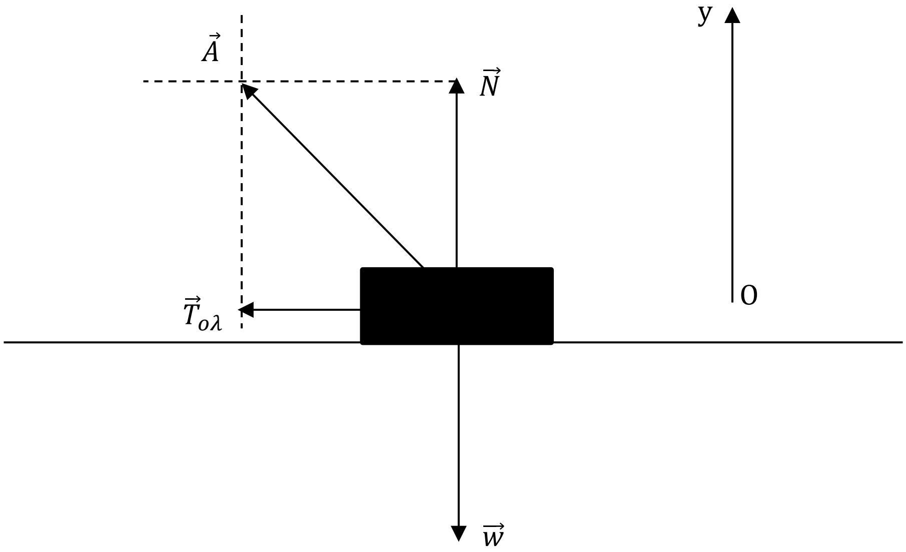
ΘΕΜΑ 2

2.1.

Α. β)

Μονάδες 4

Β.



Η δύναμη που ασκεί το δάπεδο στο σώμα είναι η $\vec{A}$. Στον άξονα Oy δεν υπάρχει κίνηση, οπότε:

$\sum F_y = 0$, $N = w$. Ισχύει:

$$A = \sqrt{N^2 + T_{o\lambda}^2} = \sqrt{w^2 + T_{o\lambda}^2} > \sqrt{w^2} = w$$

Μονάδες 8

2.2. Ισχύουν:

$$\left\{\begin{matrix} \upsilon = \upsilon_0 + \alpha \cdot t \\ \Delta x = \upsilon_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2 \end{matrix}\right\}, \left\{\begin{matrix} t = \frac{\upsilon - \upsilon_0}{\alpha} \\ \Delta x = \upsilon_0 \cdot \frac{\upsilon - \upsilon_0}{\alpha} + \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot \left(\frac{\upsilon - \upsilon_0}{\alpha}\right)^2 \end{matrix}\right\},$$

$$\Delta x = \frac{\upsilon_0 \cdot \upsilon - \upsilon_0^2}{\alpha} + \frac{\upsilon^2 - 2 \cdot \upsilon_0 \cdot \upsilon + \upsilon_0^2}{2 \cdot \alpha}, \Delta x = \frac{\upsilon^2 - \upsilon_0^2}{2 \cdot \alpha}, \upsilon = \pm\sqrt{\upsilon_0^2 + 2 \cdot \alpha \cdot \Delta x}$$

Μονάδες 13

ΘΕΜΑ 2

2.1.

Α.

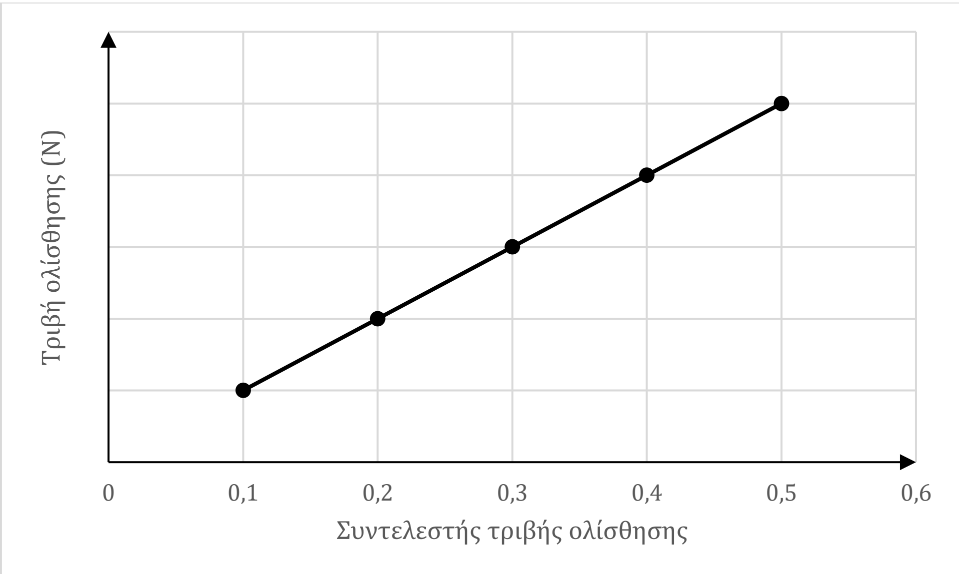
$t\ (s)$	2	4	6	8	10	12	14
$\upsilon\ \left(\frac{m}{s}\right)$	8	8	8	8	0	-8	-16

Μονάδες 7

Β. Η χρονική στιγμή $t_5 = 10\text{ s}$ ανήκει στο χρονικό διάστημα $(8\text{ s}, 14\text{ s})$, κατά τη διάρκεια του οποίου, το σημειακό αντικείμενο κινείται με σταθερή επιτάχυνση $\alpha = \frac{\sum F}{m} = \frac{-4\text{ N}}{1\text{ kg}} = -4\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Τη χρονική στιγμή $t_4 = 8\text{ s}$ το σημειακό κινητό έχει ταχύτητα $\upsilon_4 = 8\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Έτσι, $\upsilon_5 = \upsilon_4 + \alpha \cdot (t_5 - t_4) = 0$.

Μονάδες 5

2.2.



Α. α)

Μονάδες 4

Β. $T_{ολ} = \mu_{ολ} \cdot N$, $T_{ολ} = \mu_{ολ} \cdot w$, συνεπώς ο συντελεστής διεύθυνσης του ευθύγραμμου τμήματος του γραφήματος ισούται με το μέτρο του βάρους του w. Έτσι: $w = 10\text{ N}$. $m = \frac{w}{g} = 1\text{ kg}$.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 2

2.1.

Α. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

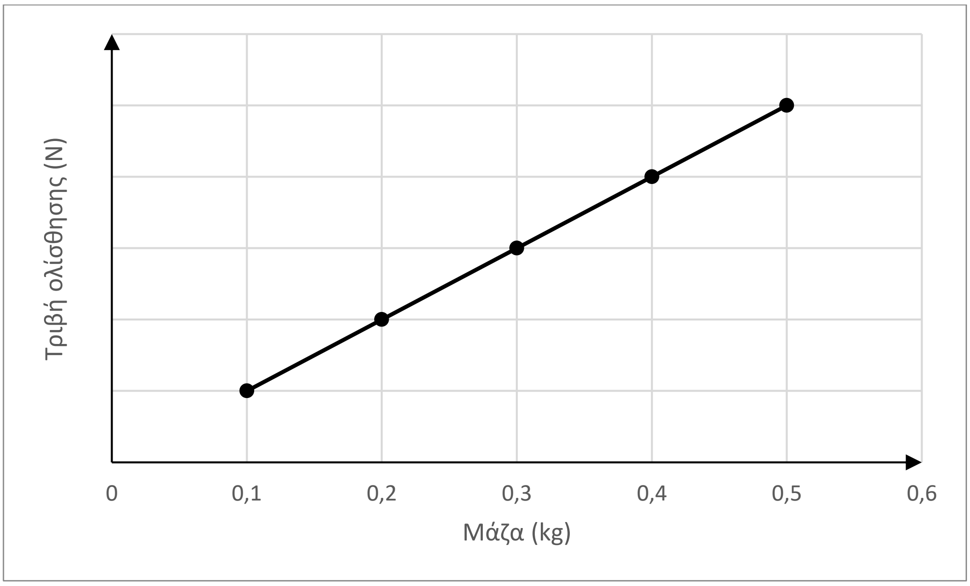
t (s)	2	4	6	10	12	14
$\sum F$ (N)	4	0	0	-4	-4	-4

Μονάδες 6

Β. Η χρονική στιγμή $t_5 = 10\ \mathrm{s}$ ανήκει στο χρονικό διάστημα $(8\ \mathrm{s}\ ,\ 14\ \mathrm{s})$, κατά τη διάρκεια του οποίου, το σημειακό αντικείμενο κινείται με σταθερή επιτάχυνση $\alpha = \frac{\Delta\upsilon}{\Delta t} = \frac{-8\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{2\ \mathrm{s}} = -4\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. $\sum F = m \cdot a = -4\ \mathrm{N}$.

Μονάδες 6

2.2.



Α. α)

Μονάδες 4

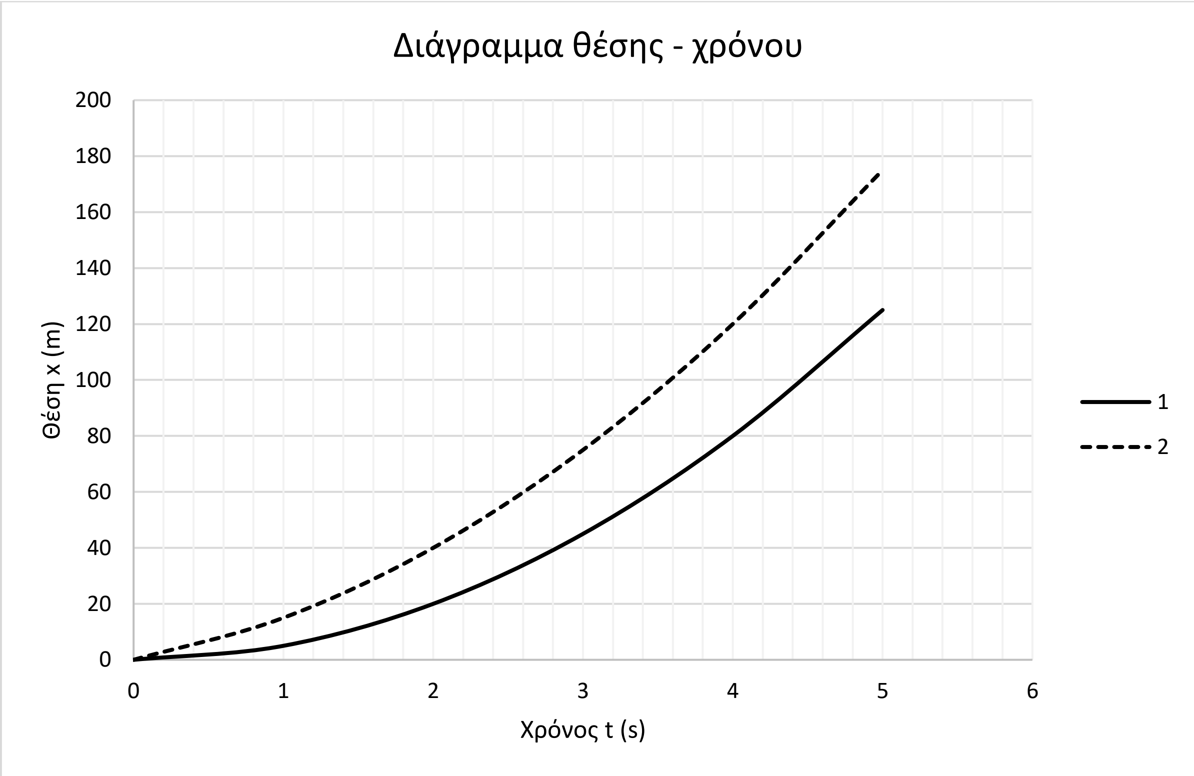
Β. $\mathrm{T}_{o\lambda} = \mu_{o\lambda} \cdot N\ ,\ T_{o\lambda} = \mu_{o\lambda} \cdot w\ ,\ T_{o\lambda} = \mu_{o\lambda} \cdot m \cdot g,$ συνεπώς ο συντελεστής διεύθυνσης του ευθύγραμμου τμήματος του γραφήματος ισούται με το γινόμενο $\mu_{o\lambda} \cdot g$. Έτσι: $\mu_{o\lambda} \cdot g = 10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\ ,\ \mu_{o\lambda} = 1$

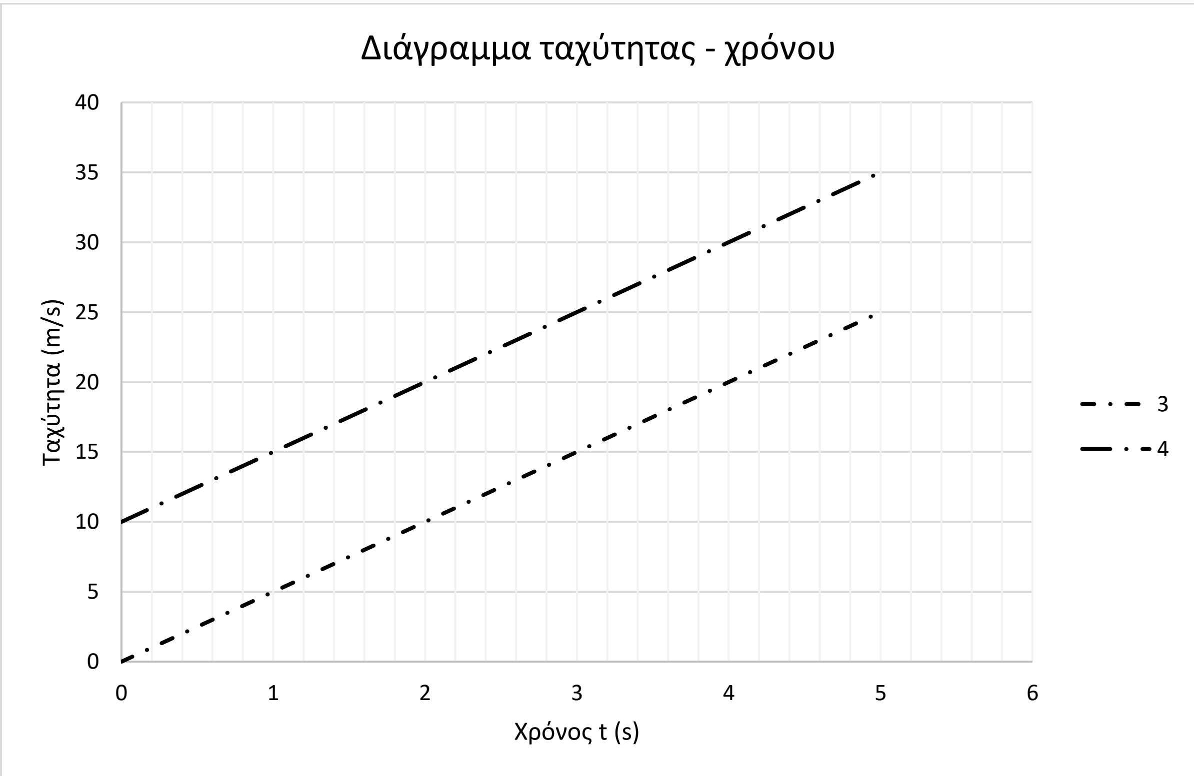
Μονάδες 9

13620

ΘΕΜΑ 2

2.1.





Α. α)

Μονάδες 4

Β. Επειδή στο σημειακό κινητό Α αντιστοιχεί το διάγραμμα θέσης - χρόνου 1, κάθε χρονική στιγμή ισχύει: $x_B > x_A$. Για τις αρχικές θέσεις των σημειακών αντικειμένων Α και Β ισχύει: $x_{0B} = x_{0A} = 0$. Για τις επιταχύνσεις των σημειακών αντικειμένων Α και Β ισχύει: $\alpha_B = \alpha_A = \alpha$. Έτσι, για να ισχύει $x_B > x_A$, θα πρέπει το σημειακό κινητό Β να έχει μεγαλύτερη αρχική ταχύτητα από το σημειακό κινητό Α.

Μονάδες 8

2.2.

Α. α)

Μονάδες 4

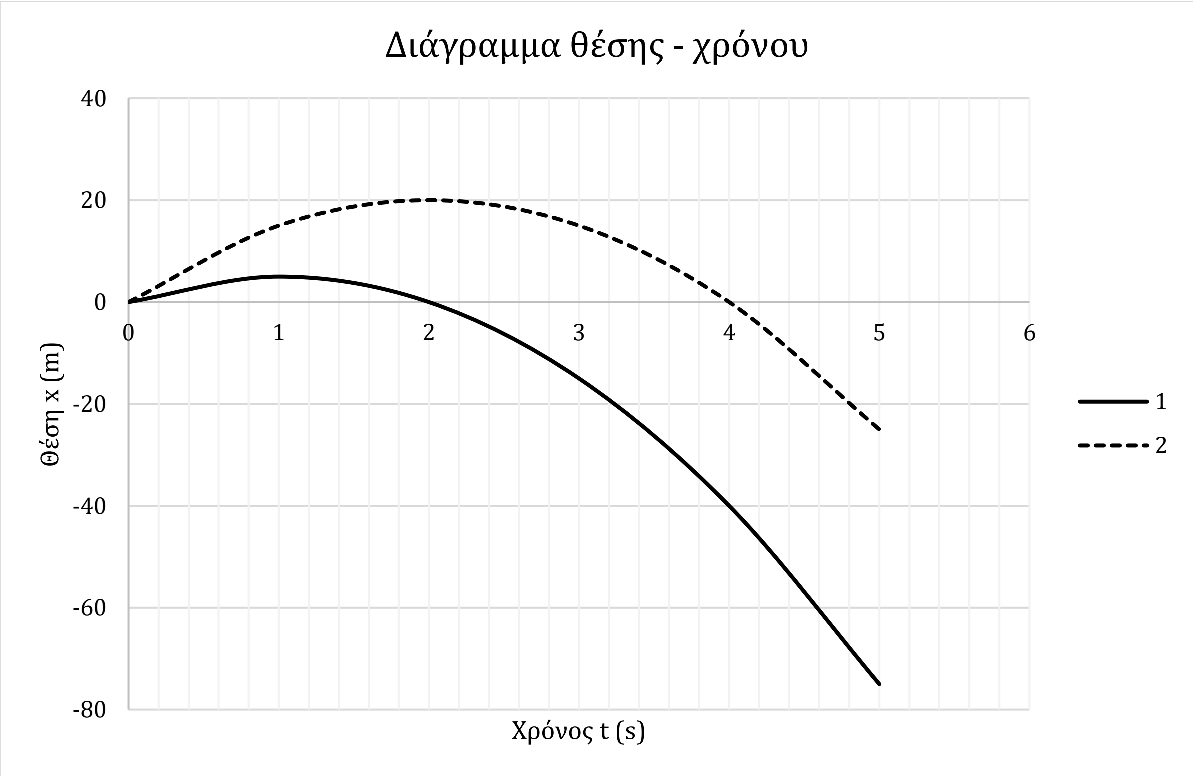
Β. Ισχύει: $\left\{\begin{matrix} \Delta\vec{v}_A = \vec{\alpha}_A \cdot \Delta t = \frac{\Sigma\vec{F}}{m} \cdot \Delta t \\ \Delta\vec{v}_B = \vec{\alpha}_B \cdot 2 \cdot \Delta t = \frac{\Sigma\vec{F}}{2 \cdot m} \cdot 2 \cdot \Delta t = \frac{\Sigma\vec{F}}{m} \cdot \Delta t \end{matrix}\right\}, \Delta\vec{v}_A = \Delta\vec{v}_B$.

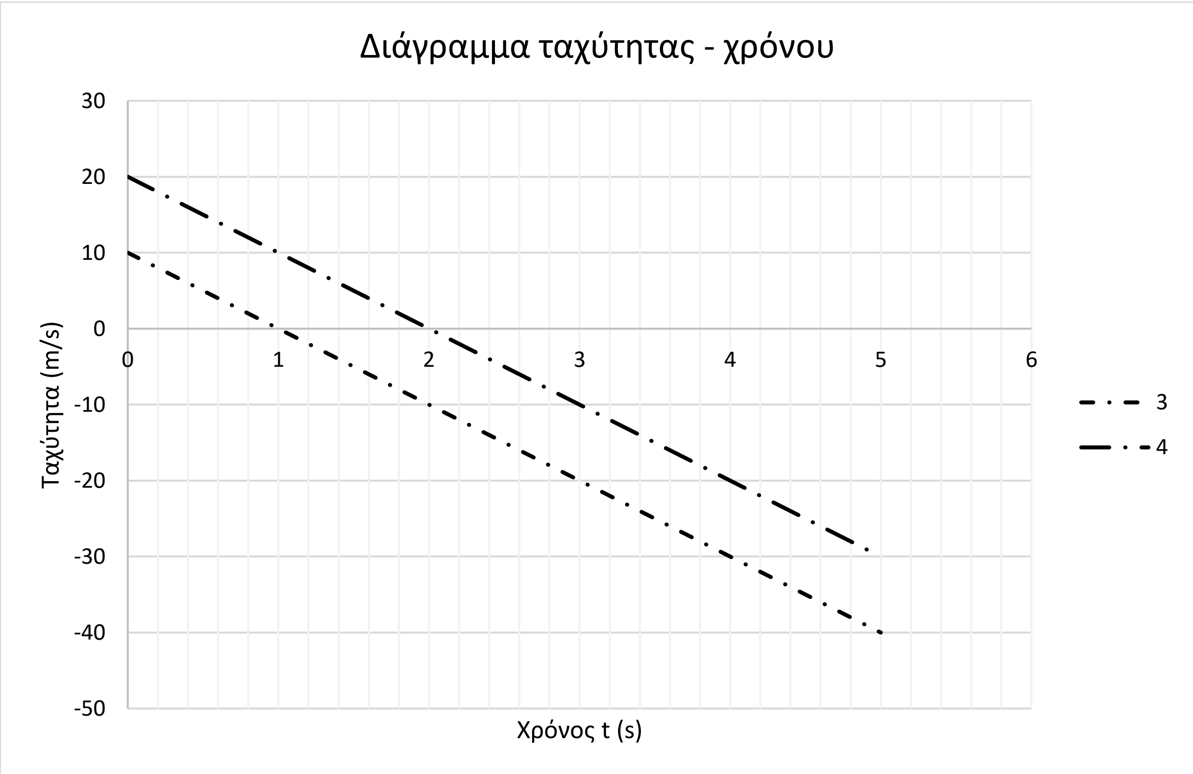
Μονάδες 9

13621

ΘΕΜΑ 2

2.1.





Α. α)

Μονάδες 4

Β. Επειδή στο σημειακό κινητό Α αντιστοιχεί το διάγραμμα θέσης - χρόνου 1, τη χρονική στιγμή $t = 2$ s ισχύει: $x_B > x_A$. Για τις αρχικές θέσεις των σημειακών αντικειμένων Α και Β ισχύει: $x_{0B} = x_{0A} = 0$. Για τις επιταχύνσεις των σημειακών αντικειμένων Α και Β ισχύει: $\alpha_B = \alpha_A = \alpha$. Έτσι, για να ισχύει $x_B > x_A$, τη χρονική στιγμή t = 2 s, θα πρέπει το σημειακό κινητό Β να έχει μεγαλύτερη αρχική ταχύτητα από το σημειακό κινητό Α, αφού: $x = x_0 + \upsilon_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$.

Μονάδες 8

2.2.

Α. α)

Μονάδες 4

Β. Η μηχανική ενέργεια του σώματος διατηρείται σταθερή. Έτσι: $m \cdot g \cdot h = m \cdot g \cdot \frac{h}{2} + K$, $K = m \cdot g \cdot \frac{h}{2} = U$.

Μονάδες 9

13622

ΘΕΜΑ 2

2.1.

Α. β)

Μονάδες 4

Β. Η μηχανική ενέργεια του σώματος διατηρείται σταθερή. Έτσι:

$$m \cdot g \cdot h + \frac{1}{2} \cdot m \cdot \upsilon_0^2 = m \cdot g \cdot h' \, , h' = h + \frac{\upsilon_0^2}{2 \cdot g}.$$

Μονάδες 8

2.2.

Α. β)

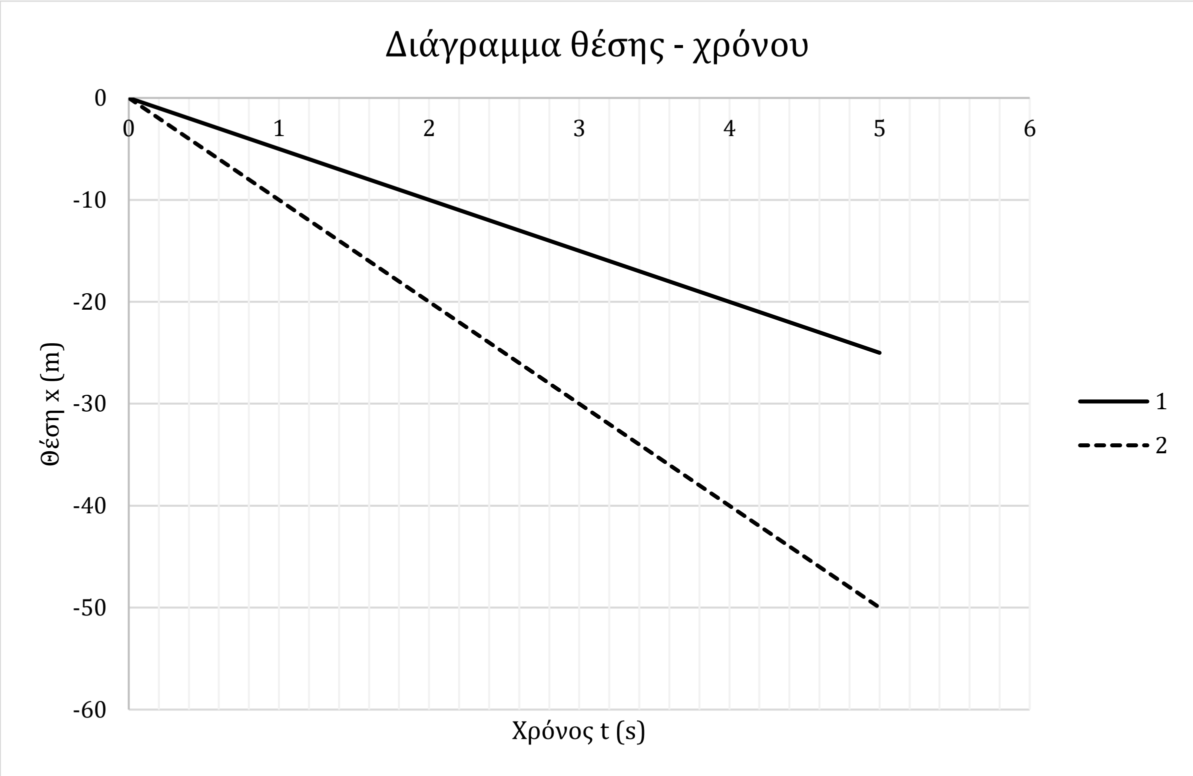
Μονάδες 4

Β. Ισχύει: $\left\{ \begin{array}{c} \Delta\vec{\upsilon}_A = \vec{\alpha}_A \cdot \Delta t = \frac{\Sigma\vec{F}}{m} \cdot \Delta t \\ \Delta\vec{\upsilon}_B = \vec{\alpha}_B \cdot 2 \cdot \Delta t = \frac{2 \cdot \Sigma\vec{F}}{m} \cdot 2 \cdot \Delta t = 4 \cdot \frac{\Sigma\vec{F}}{m} \cdot \Delta t \end{array} \right\}, \Delta\vec{\upsilon}_A = 4 \cdot \Delta\vec{\upsilon}_B.$

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 2

2.1.


Διάγραμμα θέσης - χρόνου
Θέση x (m)
Χρόνος t (s)
0
-10
-20
-30
-40
-50
-60
0 1 2 3 4 5 6
1
2


Διάγραμμα ταχύτητας - χρόνου
Ταχύτητα (m/s)
Χρόνος t (s)
0
-2
-4
-6
-8
-10
-12
0 1 2 3 4 5 6
3
4

Α. α)

Μονάδες 4

Β. Επειδή στο σημειακό κινητό Α αντιστοιχεί το διάγραμμα θέσης - χρόνου 1, κάθε χρονική στιγμή ισχύει: $x_B < x_A$. Για τις αρχικές θέσεις των σημειακών αντικειμένων Α και Β ισχύει: $x_{0B} = x_{0A} = 0$. Έτσι, για να ισχύει $x_B < x_A$ θα πρέπει το σημειακό κινητό Β να κινείται με μικρότερη ταχύτητα από το σημειακό κινητό Α, αφού: $x = x_0 + \upsilon \cdot t$.

Μονάδες 8

2.2.

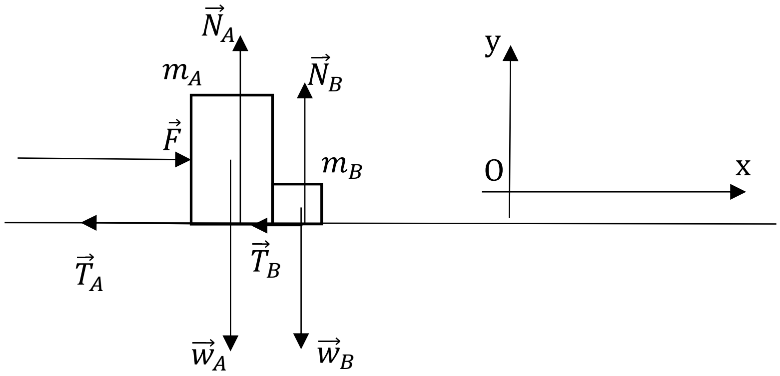
Α. γ)

Μονάδες 4

Β. Από το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας ισχύει: $\Delta K = W_{\vec{T}_{o\lambda}}$, $0 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot \upsilon_0^2 = - T_{o\lambda} \cdot S$, $\frac{1}{2} \cdot m \cdot \upsilon_0^2 = \mu_{o\lambda} \cdot m \cdot g \cdot S$, $S = \frac{\upsilon_0^2}{2 \cdot \mu_{o\lambda} \cdot g}$

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 4



4.1. Αν θεωρήσουμε τα σώματα Α και Β ως σύστημα σωμάτων, οι εξωτερικές δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα είναι οι εικονιζόμενες. Στον άξονα Oy δεν υπάρχει κίνηση και συνεπώς, σύμφωνα με τον 1° νόμο του Newton:

$$\left\{\begin{matrix} Σώμα\ A: \sum F_y = 0\,,\ N_A = w_A\,,\ N_A = m_A \cdot g\,,\ N_A = 40\ \mathrm{N} \\ Σώμα\ B: \sum F_y = 0\,,\ N_B = w_B\,,\ N_B = m_B \cdot g\,,\ N_B = 10\ \mathrm{N} \end{matrix}\right\}.$$ (Μονάδες 2)

Για την μέγιστη στατική (οριακή) τριβή ισχύει:

$$\left\{\begin{matrix} Σώμα\ A: T_{ορA} = \mu_{ορ} \cdot N_A = 10\ \mathrm{N} \\ Σώμα\ B: T_{ορB} = \mu_{ορ} \cdot N_B = 2{,}5\ N \end{matrix}\right\}.$$ (Μονάδες 2)

Η δύναμη $\vec{F}$ ασκείται στο σώμα Α τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$. Η κίνηση του συστήματος αρχίζει την ίδια χρονική στιγμή, επειδή: 20 N $= F > T_{ορA} + T_{ορB} =$ 12,5 N. (Μονάδες 2)

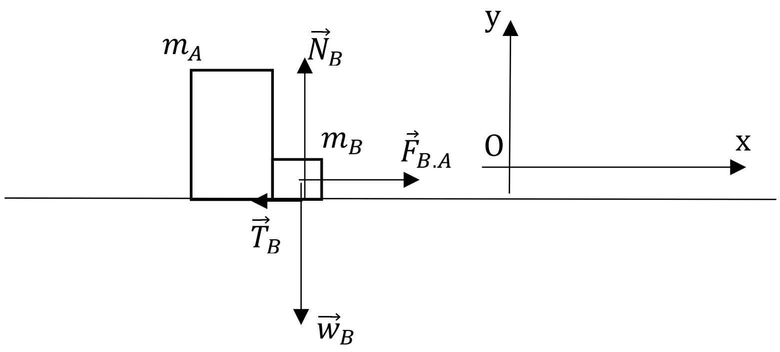
Μονάδες 6

4.2. Για την τριβή ολίσθησης ισχύει: $\left\{\begin{matrix} Σώμα\ A: T_{ολA} = \mu_{ολ} \cdot N_A = 8\ \mathrm{N} \\ Σώμα\ B: T_{ολB} = \mu_{ολ} \cdot N_B = 2\ N \end{matrix}\right\}.$ (Μονάδες 2)

Από τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για το σύστημα των σωμάτων Α και Β:

$\sum F_x = (m_A + m_B) \cdot a\,,\ a = \frac{F - T_{ολA} - T_{ολB}}{m_A + m_B}\,,\ a = 2\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. (Μονάδες 3)

Το σώμα Β κινείται με επιτάχυνση ίση με την επιτάχυνση του συστήματος: $\alpha_B = \alpha = 2\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. (Μονάδες 2)



Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα Β είναι οι εικονιζόμενες. $\vec{F}_{B,A}$ είναι η δύναμη επαφής που ασκείται στο σώμα Β από το σώμα Α. Από τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για το σώμα Β ισχύει:

$\sum F_{Bx} = m_B \cdot a_B$, $F_{B,A} - T_{o\lambda B} = m_B \cdot a$, $F_{B,A} = T_{o\lambda B} + m_B \cdot a$, $F_{B,A} = 4$ N. (Μονάδες 3)

Μονάδες 10

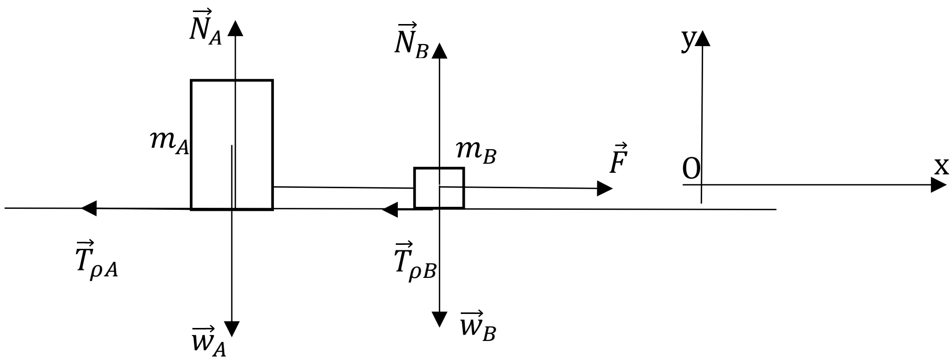
4.3. Τη χρονική στιγμή t_1 = 10 s το σύστημα των σωμάτων Α και Β έχει ταχύτητα: $\upsilon_1 = \alpha \cdot t_1 = 20\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. (Μονάδες 2) Η ισχύς της δύναμης $\vec{F}$ τη χρονική στιγμή t_1 = 10 s είναι: $P_1 = F \cdot \upsilon_1 = 400$ W. (Μονάδες 2)

Μονάδες 4

4.4. Από τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ μέχρι τη χρονική στιγμή t_1 = 10 s το σύστημα των σωμάτων Α και Β μετατοπίζεται κατά: $\Delta x_1 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_1^2$, $\Delta x_1 = 100$ m. (Μονάδες 2) Το έργο της δύναμης $\vec{F}$ από τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ μέχρι τη χρονική στιγμή t_1 = 10 s είναι: $W_{\vec{F}} = F \cdot \Delta x_1 = 2000$ J. (Μονάδες 3)

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 4



4.1. Αν θεωρήσουμε τα σώματα Α και Β και το ιδανικό, τεντωμένο, νήμα που τα συνδέει ως σύστημα σωμάτων, οι εξωτερικές δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα είναι οι εικονιζόμενες. Στον άξονα Oy δεν υπάρχει κίνηση και συνεπώς, σύμφωνα με τον 1^{ο} νόμο του Newton:

$$\left\{\begin{matrix} Σώμα\ A: \sum F_y = 0\,,\ N_A = w_A\,,\ N_A = m_A \cdot g\,,\ N_A = 40\ \mathrm{N} \\ Σώμα\ B: \sum F_y = 0\,,\ N_B = w_B\,,\ N_B = m_B \cdot g\,,\ N_B = 10\ \mathrm{N} \end{matrix}\right\}.$$ (Μονάδες 2)

Για την μέγιστη στατική (οριακή) τριβή ισχύει:

$$\left\{\begin{matrix} Σώμα\ A: T_{ολ,A} = \mu_{ορ} \cdot N_A = 10\ \mathrm{N} \\ Σώμα\ B: T_{ολ,B} = \mu_{ορ} \cdot N_B = 2{,}5\ N \end{matrix}\right\}.$$ (Μονάδες 2)

Η δύναμη $\vec{F}$ ασκείται στο σώμα Α τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$. Η κίνηση του συστήματος αρχίζει την ίδια χρονική στιγμή, επειδή: $20\ \mathrm{N} = F > T_{ολ,A} + T_{ολ,B} = 12{,}5\ \mathrm{N}$. (Μονάδες 2)

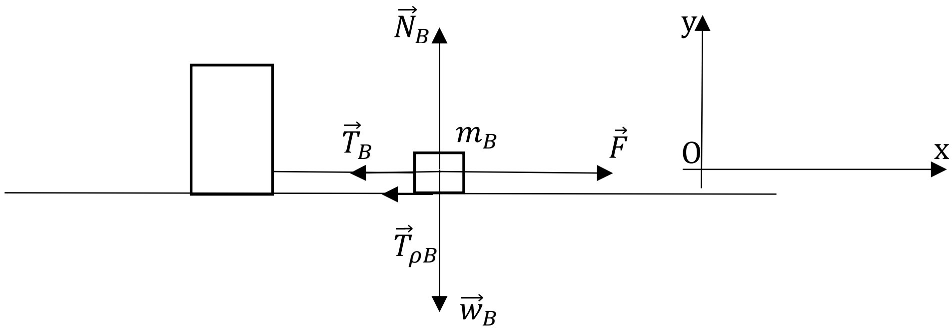
Μονάδες 6

4.2. Για την τριβή ολίσθησης ισχύει: $\left\{\begin{matrix} Σώμα\ A: T_{ολ,A} = \mu_{ολ} \cdot N_A = 8\ \mathrm{N} \\ Σώμα\ B: T_{ολ,B} = \mu_{ολ} \cdot N_B = 2\ N \end{matrix}\right\}.$ (Μονάδες 2)

Από τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για το σύστημα των σωμάτων Α και Β:

$\sum F_x = (m_A + m_B) \cdot a\,,\ a = \frac{F - T_{ολ,A} - T_{ολ,B}}{m_A + m_B}\,,\ a = 2\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. (Μονάδες 3)

Το σώμα Β κινείται με επιτάχυνση ίση με την επιτάχυνση του συστήματος: $\alpha_B = \alpha = 2\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. (Μονάδες 2)



Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα Β είναι οι εικονιζόμενες. $\vec{T}_B$ είναι η δύναμη που δέχεται το σώμα Β από το νήμα (τάση του νήματος). Επειδή το νήμα είναι ιδανικό, ίσου μέτρου, αλλά αντίθετης κατεύθυνσης δύναμη δέχεται και το σώμα Α από το νήμα. Από τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για το σώμα Β ισχύει:

$\sum F_{Bx} = m_B \cdot a_B$, $F - T_{o\lambda,B} - T_B = m_B \cdot a$, $T_B =$
$F - T_{o\lambda,B} - m_B \cdot a = 16$ N. (Μονάδες 3)

Μονάδες 10

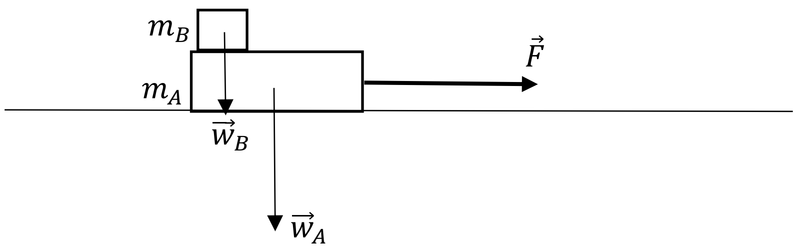
4.3. Τη χρονική στιγμή t_1 = 10 s το σύστημα των σωμάτων Α και Β έχει ταχύτητα: $\upsilon_1 = \alpha \cdot t_1 = 20\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. (Μονάδες 2) Η ισχύς της δύναμης $\vec{F}$ τη χρονική στιγμή t_1 = 10 s είναι: $P_1 = F \cdot \upsilon_1 = 400$ W. (Μονάδες 2)

Μονάδες 4

4.4. Από τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ μέχρι τη χρονική στιγμή t_1 = 10 s το σύστημα των σωμάτων Α και Β μετατοπίζεται κατά: $\Delta x_1 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_1^2$, $\Delta x_1 = 100\ \mathrm{m}$. (Μονάδες 2) Το έργο της δύναμης $\vec{F}$ από τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ μέχρι τη χρονική στιγμή t_1 = 10 s είναι: $W_{\vec{F}} = F \cdot \Delta x_1 = 2000$ J. (Μονάδες 3)

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 4

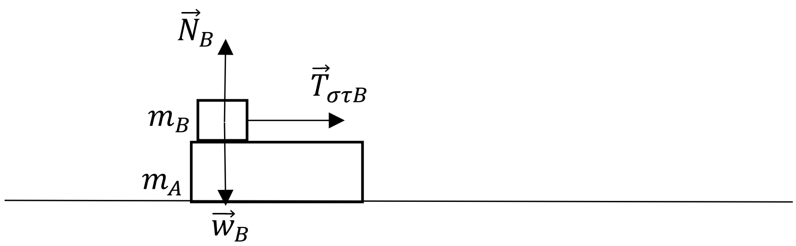


4.1. Από τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για το σύστημα των σωμάτων Α και Β:

$\sum F_x = (m_A + m_B) \cdot a\,,\ a = \frac{F}{m_A + m_B}\,,\ a = 4\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

Μονάδες 6

4.2. Το σώμα Β κινείται με επιτάχυνση ίση με την επιτάχυνση του συστήματος: $\alpha_B = \alpha = 4\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. (Μονάδες 3)



Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα Β είναι οι εικονιζόμενες. $\vec{T}_{\sigma\tau,B}$ είναι η στατική τριβή που δέχεται το σώμα Β. Η κατεύθυνσή της είναι η εικονιζόμενη, αφού το σώμα Β επιταχύνεται προς τα δεξιά. Η $\vec{T}_{\sigma\tau,B}$ είναι η μοναδική οριζόντια δύναμη που ασκείται στο σώμα Β και σύμφωνα με τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής, η επιτάχυνση και η συνισταμένη δύναμη είναι διανύσματα συγγραμμικά και ομόρροπα. Από τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για το σώμα Β ισχύει:

$\sum F_{Bx} = m_B \cdot a_B\,,\ T_{\sigma\tau,B} = m_B \cdot a\,,\ T_{\sigma\tau,B} = 4\ \mathrm{N}$. (Μονάδες 3)

Μονάδες 6

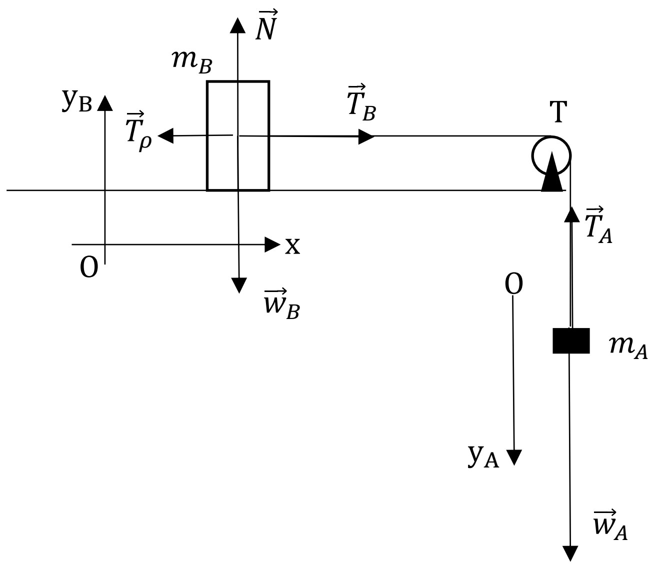
4.3. Τη χρονική στιγμή t_1 = 10 s το σύστημα των σωμάτων Α και Β έχει ταχύτητα: $\upsilon_1 = \alpha \cdot t_1 = 40\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. (Μονάδες 3) Η ισχύς της δύναμης $\vec{F}$ τη χρονική στιγμή t_1 = 10 s είναι: $P_1 = F \cdot \upsilon_1 = 800\ \mathrm{W}$. (Μονάδες 3)

Μονάδες 6

4.4. Από τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ μέχρι τη χρονική στιγμή t_1 = 10 s το σύστημα των σωμάτων Α και Β μετατοπίζεται κατά: $\Delta x_1 = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t_1^2$, $\Delta x_1 = 200\ \mathrm{m}$. (Μονάδες 3) Το έργο της δύναμης $\vec{F}$ από τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ μέχρι τη χρονική στιγμή t_1 = 10 s είναι: $W_{\vec{F}} = F \cdot \Delta x_1 = 4000\ \mathrm{J}$. (Μονάδες 4)

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4



4.1. Οι εξωτερικές δυνάμεις που δέχεται το σύστημα σώμα Α – σώμα Β – ιδανικό νήμα – τροχαλία αμελητέας μάζας, είναι τα βάρη των σωμάτων Α και Β, $\vec{w}_A$ και $\vec{w}_B$ αντίστοιχα και οι δυνάμεις που δέχεται το σώμα Β από το οριζόντιο δάπεδο, δηλαδή η κάθετη στο δάπεδο αντίδραση $\vec{N}$ και η τριβή $\vec{T}_\rho$. Το σώμα Β δεν κινείται στον άξονα Oy_B του σχήματος. Συνεπώς, από τον 1ο νόμο του Newton:

$\sum F_{yB} = 0$, $N = w_B$, $N = m_B \cdot g$, $N = 10$ N. (Μονάδες 2)

Η μέγιστη στατική (οριακή) τριβή που αναπτύσσεται μεταξύ του σώματος Β και του οριζόντιου δαπέδου έχει μέτρο: $T_{\rho,o\rho} = \mu_{o\rho} \cdot N$, $T_{\rho,o\rho} = 5$ N. (Μονάδες 2)

Επειδή, τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ ισχύει: $40\text{ N} = w_A > T_{\rho,o\rho} = 5\text{ N}$, η κίνηση του συστήματος θα ξεκινήσει τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$. (Μονάδες 2)

Μονάδες 6

4.2. Το μέτρο της τριβής ολίσθησης $\vec{T}_{o\lambda}$ είναι ίσο με το μέτρο της μέγιστης στατικής (οριακής) τριβής $\vec{T}_{o\rho}$, αφού: $\mu_{o\lambda} = \mu_{o\rho} = 0{,}5$. (Μονάδες 2) Εφαρμόζοντας τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για το σύστημα έχουμε: $\sum F_{\varepsilon\xi} = (m_A + m_B) \cdot a$, $a = \frac{w_A - T_{o\lambda}}{m_A + m_B}$, $a = 7\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. (Μονάδες 4)

Μονάδες 6

4.3. Ισχύουν: $\upsilon_1 = \alpha \cdot t_1 = 0{,}7\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ (Μονάδες 3) και $\Delta x_1 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_1^2 = 0{,}035$ m. (Μονάδες 3)

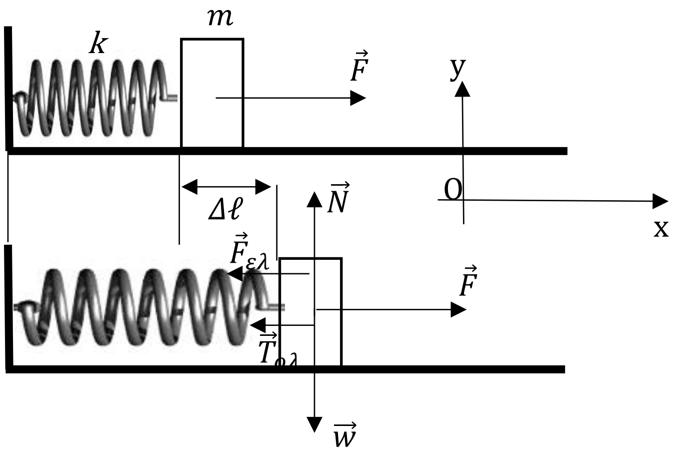
Μονάδες 6

4.4. Η θερμότητα που εκλύεται στο περιβάλλον από τη χρονική στιγμή που αρχίζει η κίνηση του συστήματος σώμα Α – ιδανικό νήμα – σώμα Β μέχρι τη χρονική στιγμή t_1 = 0,1 s ισούται με την απόλυτη τιμή του έργου της τριβής ολίσθησης:

$Q = \left|W_{T_{ο\lambda}}\right| = T_{ο\lambda} \cdot \Delta x_1 = 0{,}175$ J.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4

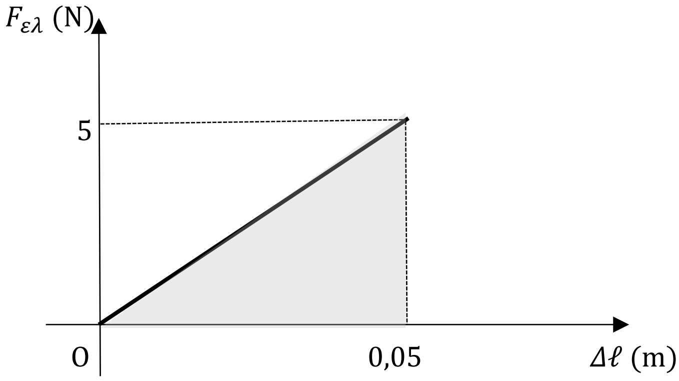


4.1. Στον άξονα Oy δεν υπάρχει κίνηση, οπότε, σύμφωνα με τον 1ο νόμο του Newton: $\sum F_y = 0$, $N = w$, $N = m \cdot g$, $N = 10$ N. (Μονάδες 2) Η τριβή ολίσθησης έχει μέτρο: $T_{o\lambda} = \mu_{o\lambda} \cdot N$, $T_{o\lambda} = 5$ N. (Μονάδες 2) Το σώμα έχει τη μέγιστη ταχύτητά του όταν διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του, δηλαδή τη θέση στην οποία $\sum F_x = 0$. Αυτό συμβαίνει γιατί ενώ οι δυνάμεις $\vec{F}$ και $\vec{T}_{o\lambda}$ είναι σταθερές, η δύναμη $\vec{F}_{\varepsilon\lambda}$ από το παραμορφωμένο, ιδανικό ελατήριο έχει μέτρο που αυξάνεται με την έκτασή του, σύμφωνα με το νόμο του Hooke: $F_{\varepsilon\lambda} = k \cdot \Delta\ell$. Έτσι, όσο: $F > T_{o\lambda} + F_{\varepsilon\lambda}$ το σώμα επιταχύνεται, ενώ το σώμα αρχίζει να επιβραδύνεται όταν $F < T_{o\lambda} + F_{\varepsilon\lambda}$. Συνεπώς, το σώμα έχει τη μέγιστη ταχύτητά του όταν διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του, δηλαδή τη θέση στην οποία:

$\sum F_x = 0$, $F = F_{\varepsilon\lambda} + T_{o\lambda}$, $F = k \cdot \Delta\ell + T_{o\lambda}$, $\Delta\ell = \frac{F - T_{o\lambda}}{k}$, $\Delta\ell = 0{,}05$ m. (Μονάδες 2)

Μονάδες 6

4.2. Το μέτρο της δύναμης που ασκεί ένα παραμορφωμένο ιδανικό ελατήριο είναι ανάλογο της παραμόρφωσης του ελατηρίου (νόμος Hooke): $F_{\varepsilon\lambda} = k \cdot \Delta\ell$. Από τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ μέχρι τη χρονική στιγμή κατά την οποία το σώμα έχει τη μέγιστη ταχύτητά του η $\vec{F}_{\varepsilon\lambda}$ έχει αντίθετη κατεύθυνση από τη μετατόπιση (αρνητικό έργο) και μέτρο που αυξάνεται με την αύξηση της μετατόπισης όπως στο διάγραμμα που ακολουθεί:



Το γραμμοσκιασμένο εμβαδό εκφράζει την απόλυτη τιμή του έργου της $\vec{F}_{\varepsilon\lambda}$. Έτσι:

$$W_{\vec{F}_{\varepsilon\lambda}} = -\frac{1}{2}\cdot 0{,}05\ \mathrm{m}\cdot 5\ \mathrm{N} = -\ 0{,}125\ \mathrm{J}$$

Μονάδες 7

4.3. Ισχύει: $W_{\vec{F}} = F\cdot \Delta\ell = 0{,}5\ \mathrm{J}$.

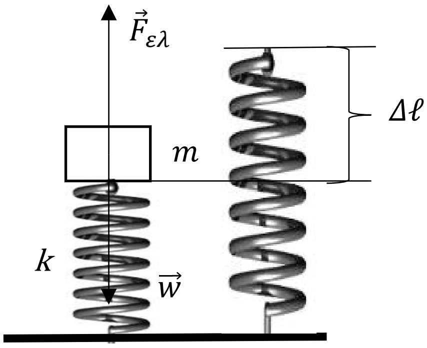
Μονάδες 6

4.4. Ισχύει: $Q = \left|W_{\vec{T}_{o\lambda}}\right| = T_{o\lambda}\cdot \Delta\ell = 0{,}25\ \mathrm{J}$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 4

4.1.



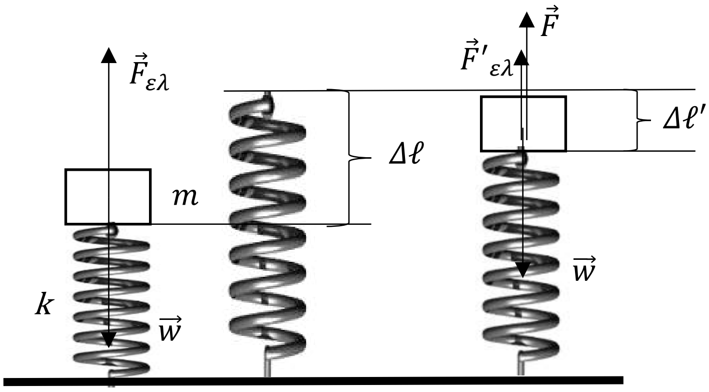
Στη θέση ισορροπίας του συστήματος, το σώμα δέχεται το βάρος του $\vec{w}$ και τη δύναμη από το συσπειρωμένο ελατήριο $\vec{F}_{\varepsilon\lambda}$. Επειδή το σώμα ισορροπεί, σύμφωνα με τον 1ο νόμο του Newton: $\sum F = 0$, $w = F_{\varepsilon\lambda}$, $m \cdot g = k \cdot \Delta\ell$, $\Delta\ell = \frac{m \cdot g}{k} = 0{,}1 \text{ m}$.

Μονάδες 6

4.2. Το σώμα έχει μέγιστη ταχύτητα όταν διέρχεται από τη νέα, μετά την επίδραση της δύναμης $\vec{F}$, θέση ισορροπίας του, δηλαδή στην θέση όπου $\sum F'_x = 0$. Αυτό συμβαίνει γιατί ενώ οι δυνάμεις $\vec{F}$ και $\vec{w}$ είναι σταθερές, η δύναμη $\overrightarrow{F'}_{\varepsilon\lambda}$ από το παραμορφωμένο, ιδανικό ελατήριο έχει μέτρο που ελαττώνεται με την μείωση της συσπείρωσής του $\Delta\ell'$, σύμφωνα με το νόμο του Hooke: $F'_{\varepsilon\lambda} = k \cdot \Delta\ell'$. Έτσι, καθώς το σώμα ανέρχεται και μέχρι να φθάσει στη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου, το μέτρο της δύναμης $\overrightarrow{F'}_{\varepsilon\lambda}$ έχει μέτρο που μειώνεται και κατεύθυνση κατακόρυφη και με φορά προς τα πάνω. Όσο:

$$F + F'_{\varepsilon\lambda} > w \,,\; k \cdot \Delta\ell' > w - F \,,\; \Delta\ell' > \frac{m \cdot g}{k} - \frac{F}{k} \,,\; \Delta\ell' > 0{,}05 \text{ m}$$

το σώμα επιταχύνεται, ενώ το σώμα αρχίζει να επιβραδύνεται όταν $\Delta\ell < 0{,}05 \text{ m}$. Συνεπώς, το σώμα έχει τη μέγιστη ταχύτητά του όταν διέρχεται από τη νέα, μετά την επίδραση της δύναμης $\vec{F}$, θέση ισορροπίας του, δηλαδή τη θέση στην οποία: $\Delta\ell' = 0{,}05 \text{ m}$.



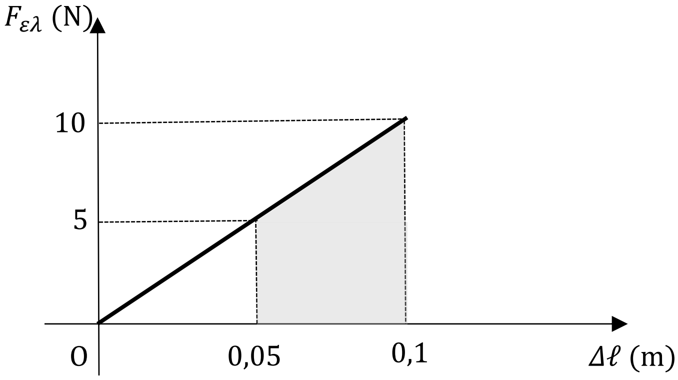
Μονάδες 6

4.3. $W_{\vec{F}} = F \cdot (\Delta\ell - \Delta\ell') = 0{,}25$ J.

Μονάδες 6

4.4. Το μέτρο της δύναμης που ασκεί ένα παραμορφωμένο ιδανικό ελατήριο είναι ανάλογο της παραμόρφωσης του ελατηρίου (νόμος Hooke): $F_{\varepsilon\lambda} = k \cdot \Delta\ell$. Έτσι, το έργο της δύναμης $\vec{F}_{\varepsilon\lambda}$ πρέπει να υπολογιστεί από το διάγραμμα $F_{\varepsilon\lambda} - \Delta\ell$ (Μονάδες 3).

Από τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ μέχρι τη χρονική στιγμή κατά την οποία το σώμα έχει τη μέγιστη ταχύτητά του, η $\vec{F}_{\varepsilon\lambda}$ έχει ίδια κατεύθυνση με τη μετατόπιση (θετικό έργο) και μέτρο που μεταβάλλεται ανάλογα με τη συσπείρωση του ελατηρίου, όπως στο διάγραμμα που ακολουθεί:



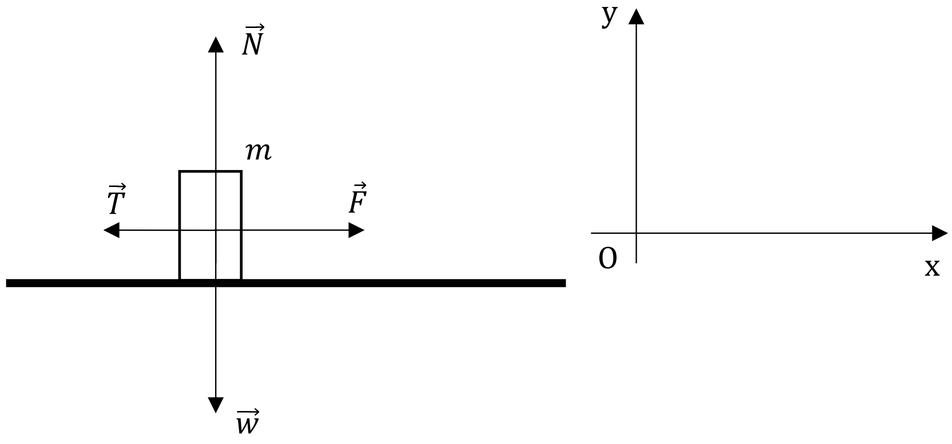
(Μονάδες 2)

Το γραμμοσκιασμένο εμβαδό εκφράζει την απόλυτη τιμή του έργου της $\vec{F}_{\varepsilon\lambda}$. Έτσι:

$W_{\vec{F}_{\varepsilon\lambda}} = \frac{5\,N + 10\,\mathrm{N}}{2} \cdot 0{,}05\ \mathrm{m} = 0{,}375$ J (Μονάδες 2)

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4



4.1. Για κάθε χρονική στιγμή t ισχύει:

$$\sum F_y = 0 \,,\; N = w \,,\; N = m \cdot g \,,\; N = 10\,\mathrm{N}$$

Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ το σώμα είναι ακίνητο και συνεπώς η τριβή που δέχεται από το δάπεδο είναι στατική. Για το μέτρο της μέγιστης στατικής (οριακής) τριβής ισχύει: $T_{o\rho} = \mu_{o\rho} \cdot N \,,\; T_{o\rho} = 5\,\mathrm{N}$. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ το μέτρο της δύναμης $\vec{F}$ είναι $F = 10\,\mathrm{N} > 5\,\mathrm{N} = T_{o\rho}$, συνεπώς το σώμα αρχίζει να κινείται τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$.

Μονάδες 6

4.2. Το σώμα έχει τη μέγιστη ταχύτητά του στη θέση ισορροπίας του:

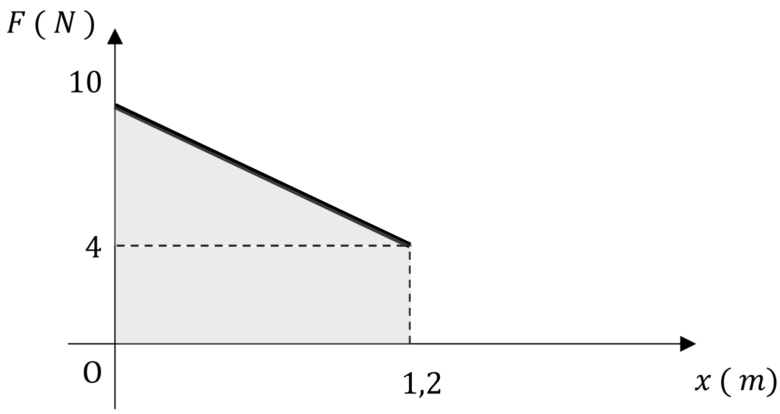
$\sum F_x = 0 \,,\; F - T_{o\lambda} = 0 \,,\; F = \mu_{o\lambda} \cdot N \,,\; F = 4\,\mathrm{N}$. Αυτό συμβαίνει στη θέση: $4 = 10 - 5 \cdot x\,(S.I) \,,\; x = 1{,}2\,\mathrm{m}$.

Μονάδες 6

4.3. Η εκλυόμενη θερμότητα ισούται με την απόλυτη τιμή του έργου της τριβής ολίσθησης: $Q = \left|W_{\vec{T}_{o\lambda}}\right| = T_{o\lambda} \cdot x = \mu_{o\lambda} \cdot N \cdot x = 4{,}8\,\mathrm{J}$

Μονάδες 6

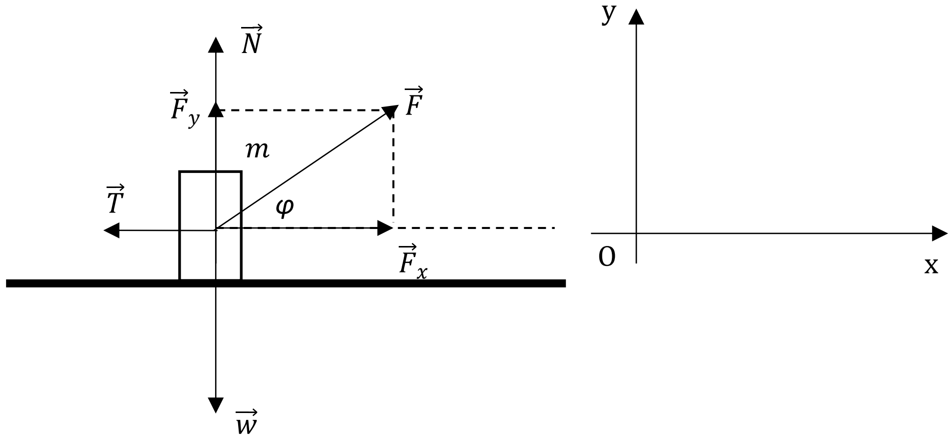
4.4. Εφόσον καλούμαστε να υπολογίσουμε έργο δύναμης μεταβλητού μέτρου, δεν είναι δυνατό να εργαστούμε αλγεβρικά. Καταφεύγουμε λοιπόν στον υπολογισμό μέσω εμβαδού.



$$W_{\vec{F}} = \frac{10\,\mathrm{N} + 4\,\mathrm{N}}{2} \cdot 1{,}2\,m = 8{,}4\,\mathrm{J}$$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4



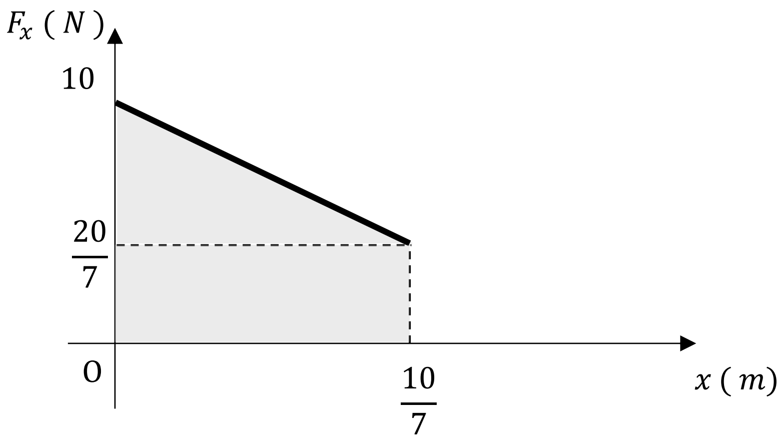
4.1. Ισχύουν: $\begin{Bmatrix} F_x = F \cdot συνφ = 10 - 5 \cdot x\,(S.I.) \\ F_y = F \cdot ημφ = 10 - 5 \cdot x\,(S.I.) \end{Bmatrix}$. Για κάθε χρονική στιγμή t ισχύει: $\sum F_y = 0$, $N + F_y = w$, $N = m \cdot g - F \cdot ημφ$, $N = 5 \cdot x\,(S.I.)$. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ το σώμα είναι ακίνητο και συνεπώς η τριβή που δέχεται από το δάπεδο είναι στατική. Για το μέτρο της μέγιστης στατικής (οριακής) τριβής, στη θέση $x = 0$, ισχύει: $T_{ορ} = \mu_{ορ} \cdot N$, $T_{ορ} = 0$. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ το μέτρο της δύναμης $\vec{F}_x$ είναι $F_x = 10\ \text{N} > 0 = T_{ορ}$, συνεπώς το σώμα αρχίζει να κινείται τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$.

Μονάδες 6

4.2. Το σώμα έχει τη μέγιστη ταχύτητά του στη θέση ισορροπίας του:
$\sum F_x = 0$, $F_x - T_{ολ} = 0$, $F_x = \mu_{ολ} \cdot N$, $10 - 5 \cdot x = 2 \cdot x$, $x = \frac{10}{7}$ m.

Μονάδες 6

4.3. Ισχύει: $W_{\vec{F}} = W_{\vec{F}_x} + W_{\vec{F}_y} = W_{\vec{F}_x} + 0 = W_{\vec{F}_x}$

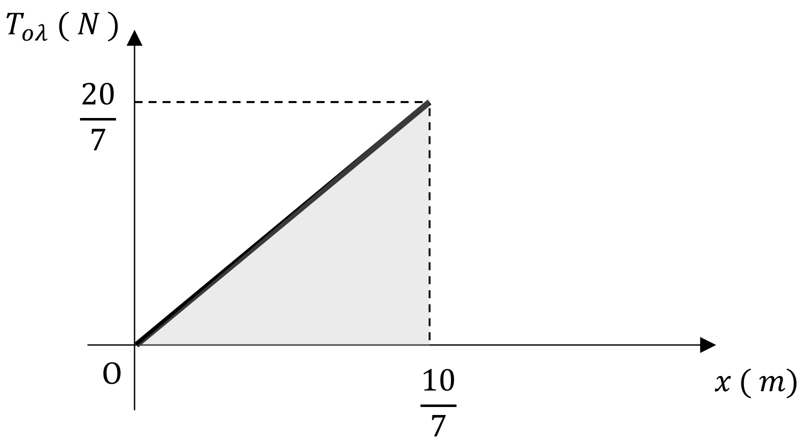


$$W_{\vec{F}_x} = \frac{10\ \mathrm{N} + \frac{20}{7}\ \mathrm{N}}{2} \cdot \frac{10}{7}\ \mathrm{m} = \frac{450}{49}\ \mathrm{J}$$

Μονάδες 7

4.4. Η εκλυόμενη θερμότητα Q ισούται με την απόλυτη τιμή του έργου της τριβής ολίσθησης.

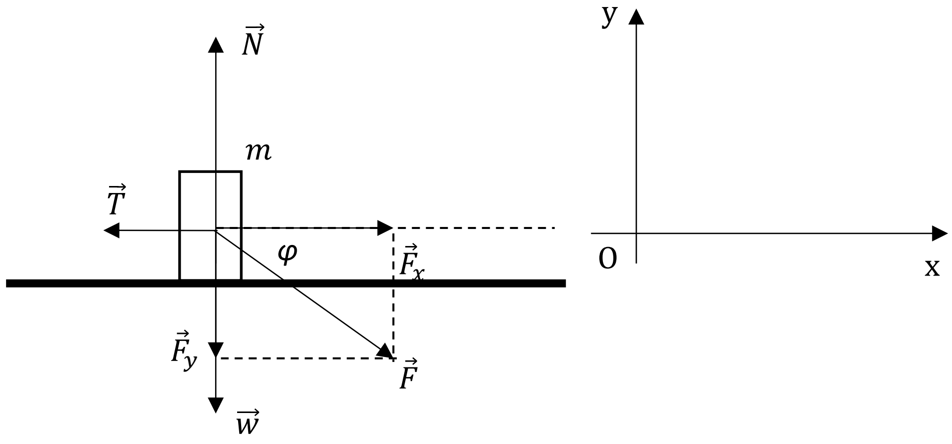
Ισχύει: : $T_{ολ} = \mu_{ολ} \cdot N = 2 \cdot x\,(\mathrm{S.I.})$, $Q = \left|W_{\vec{T}_{ολ}}\right|$.



$$Q = \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{7}\ \mathrm{m} \cdot \frac{20}{7}\ \mathrm{N} = \frac{100}{49}\ \mathrm{J}$$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 4



4.1. Ισχύουν: $\begin{Bmatrix} F_x = F \cdot \text{συν}\varphi = 10 - 5 \cdot x\,(\text{S.I.}) \\ F_y = F \cdot \text{ημ}\varphi = 10 - 5 \cdot x\,(\text{S.I.}) \end{Bmatrix}$. Για κάθε χρονική στιγμή t ισχύει: $\sum F_y = 0$, $N = F_y + w$, $N = m \cdot g + F \cdot \text{ημ}\varphi$, $N = 20 - 5 \cdot x\,(\text{S.I.})$. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ το σώμα είναι ακίνητο και συνεπώς η τριβή που δέχεται από το δάπεδο είναι στατική. Για το μέτρο της μέγιστης στατικής (οριακής) τριβής, στη θέση $x = 0$, ισχύει: $T_{ορ} = \mu_{ορ} \cdot N$, $T_{ορ} = 9\,\text{N}$. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ το μέτρο της δύναμης $\vec{F}_x$ είναι $F_x = 10\,\text{N} > 0 = T_{ορ}$, συνεπώς το σώμα αρχίζει να κινείται τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$.

Μονάδες 6

4.2. Το σώμα έχει τη μέγιστη ταχύτητά του στη θέση ισορροπίας του:

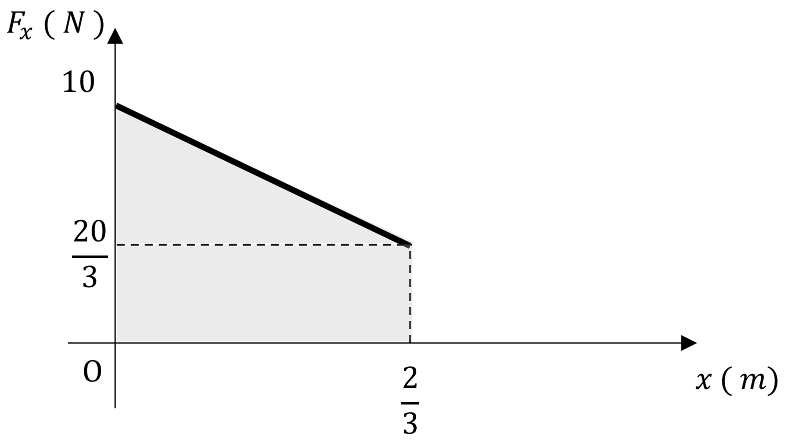
$$\sum F_x = 0,\ F_x - T_{ολ} = 0,\ F_x - \mu_{ολ} \cdot N = 0,\ 10 - 5 \cdot x = 8 - 2 \cdot x$$

Τελικά είναι:

$$x = \frac{2}{3}\,\text{m}$$

Μονάδες 6

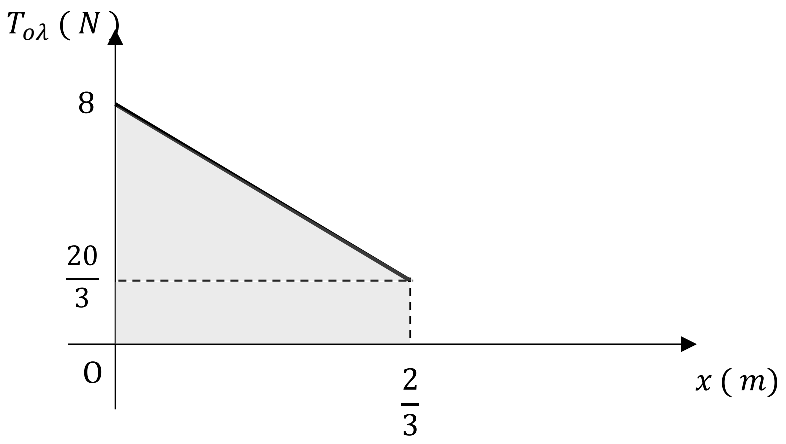
4.3. Ισχύει: $W_{\vec{F}} = W_{\vec{F}_x} + W_{\vec{F}_y} = W_{\vec{F}_x} + 0 = W_{\vec{F}_x}$



$$W_{\vec{F}_x} = \frac{10\ \mathrm{N} + \frac{20}{3}\ \mathrm{N}}{2} \cdot \frac{2}{3}\ \mathrm{m} = \frac{50}{9}\ \mathrm{J}$$

Μονάδες 7

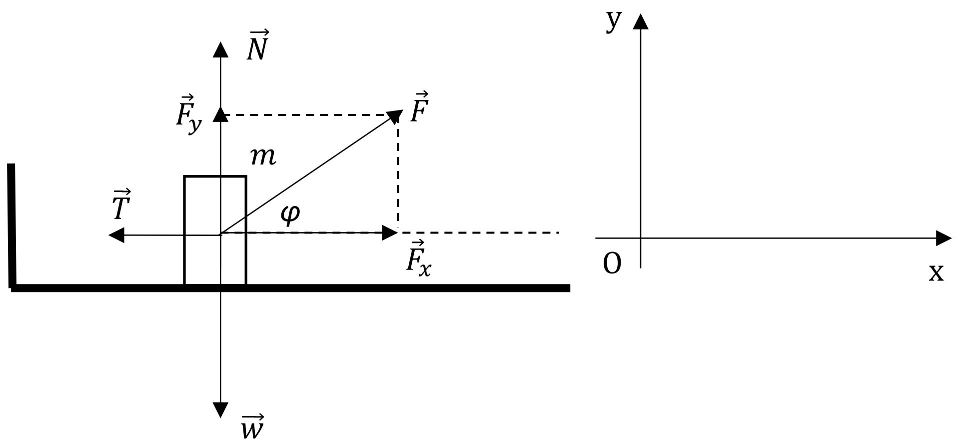
4.4. Η εκλυόμενη θερμότητα ισούται με την απόλυτη τιμή του έργου της τριβής ολίσθησης:
$Q = \left| W_{\vec{T}_{o\lambda}} \right|$, $T_{o\lambda} = \mu_{o\lambda} \cdot N = 8 - 2 \cdot x$ (S . I .).



$$Q = \frac{8\ \mathrm{N} + \frac{20}{3}\ \mathrm{N}}{2} \cdot \frac{2}{3}\ \mathrm{m} = \frac{44}{9}\ \mathrm{J}$$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 4



4.1. Ισχύουν: $\begin{cases} F_x = F \cdot \text{συν}\varphi = 6 + 5 \cdot x\,(\text{S.I.}) \\ F_y = F \cdot \text{ημ}\varphi = 6 + 5 \cdot x\,(\text{S.I.}) \end{cases}$. Για κάθε χρονική στιγμή t ισχύει: $\sum F_y = 0$, $N + F_y = w$, $N = m \cdot g - F \cdot \text{ημ}\varphi$, $N = 4 - 5 \cdot x\,(\text{S.I.})$. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ το σώμα είναι ακίνητο και συνεπώς η τριβή που δέχεται από το δάπεδο είναι στατική. Για το μέτρο της μέγιστης στατικής (οριακής) τριβής, στη θέση $x = 0$, ισχύει: $T_{ορ} = \mu_{ορ} \cdot N$, $T_{ορ} = 2\,\text{N}$. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ το μέτρο της δύναμης $\vec{F}_x$ είναι $F_x = 6\,\text{N} > 2\,\text{N} = T_{ορ}$, συνεπώς το σώμα αρχίζει να κινείται τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$.

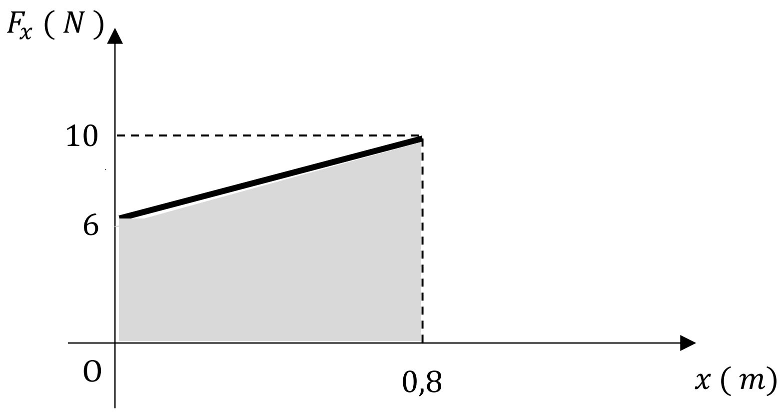
Μονάδες 6

4.2. Το σώμα χάνει την επαφή του με το οριζόντιο δάπεδο όταν: $N = 0$. Από την έκφραση της N, στην οποία καταλήξαμε προηγουμένως:

$$4 - 5 \cdot x = 0 \quad (\text{S.I.})$$
$$4 = 5 \cdot x \quad (\text{S.I.})$$
$$x = 0{,}8\,m$$

Μονάδες 6

4.3. Ισχύει: $W_{\vec{F}} = W_{\vec{F}_x} + W_{\vec{F}_y} = W_{\vec{F}_x} + 0 = W_{\vec{F}_x}$

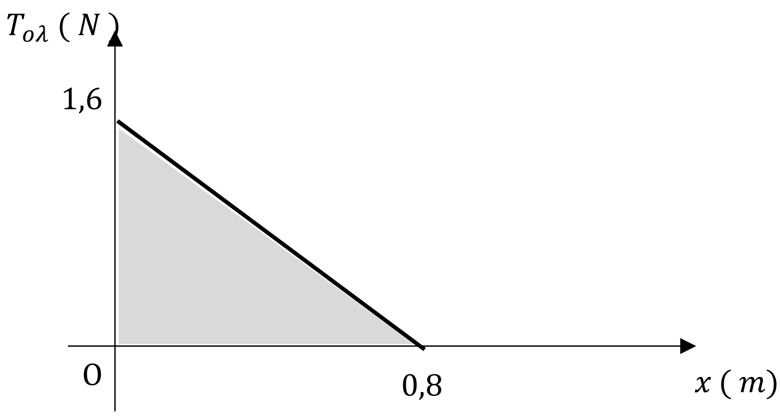


$$W_{\vec{F}_x} = \frac{10\ \mathrm{N} + 6\ \mathrm{N}}{2} \cdot 0{,}8\ \mathrm{m} = 6{,}4\ \mathrm{J}$$

Μονάδες 7

4.4. Η εκλυόμενη θερμότητα ισούται με την απόλυτη τιμή του έργου της τριβής ολίσθησης:

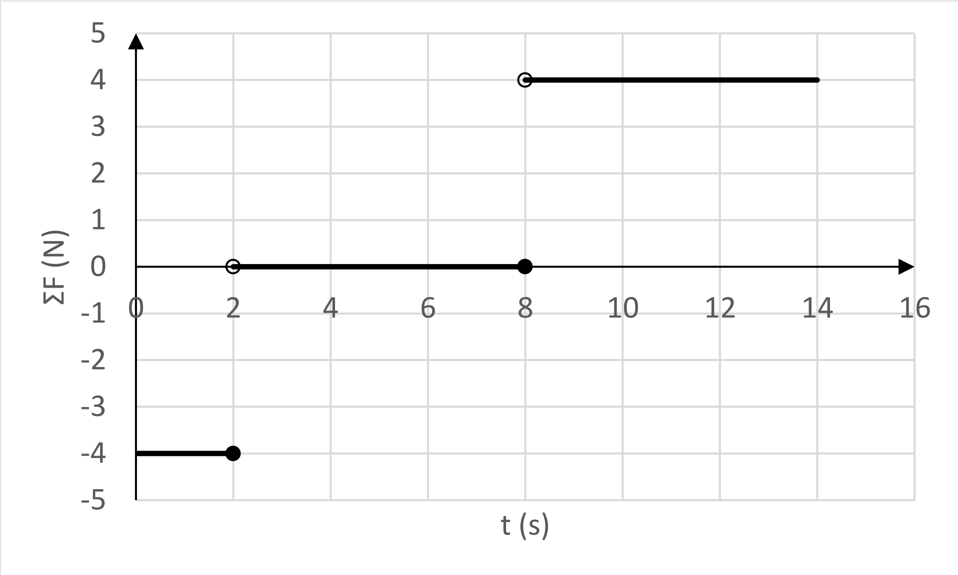
$Q = \left| W_{\vec{T}_{ολ}} \right|$, $T_{ολ} = \mu_{ολ} \cdot N = 1{,}6 - 2 \cdot x$ (S . I .).



$$Q = \frac{1}{2} \cdot 0{,}8\ \mathrm{m} \cdot 1{,}6\ \mathrm{N} = 0{,}64\ \mathrm{J}$$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 4



4.1.

Α. Από τη χρονική στιγμή t_0 = 0 μέχρι τη χρονική στιγμή t_1 = 2 s:

$\sum F_1 = -4\,\mathrm{N}$, $m \cdot a_1 = -4\,\mathrm{N}$, $a_1 = -4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. (Μονάδα 1)

Ισχύουν:

$\upsilon_1 = \upsilon_0 + \alpha_1 \cdot t_1 = -8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ (Μονάδες 1)

και

$x_1 = x_0 + \upsilon_0 \cdot t_1 + \frac{1}{2} \cdot a_1 \cdot t_1^2$, $x_1 = -8\,\mathrm{m}$. (Μονάδες 1)

Μονάδες 3

Β. Από τη χρονική στιγμή t_1 = 2 s μέχρι τη χρονική στιγμή t_2 = 8 s: $\sum F_2 = 0$. (Μονάδα 1)

Ισχύουν: $\upsilon_2 = \upsilon_1 = -8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ (Μονάδες 1) και

$x_2 = x_1 + \upsilon_1 \cdot (t_2 - t_1)$, $x_2 = -56\,\mathrm{m}$. (Μονάδες 2)

Μονάδες 4

Γ. Από τη χρονική στιγμή t_2 = 8 s μέχρι τη χρονική στιγμή t_3 = 14 s:

$\sum F_1 = 4\,\mathrm{N}$, $m \cdot a_3 = 4\,\mathrm{N}$, $a_3 = 4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. (Μονάδα 1)

Ισχύουν:

$\upsilon_3 = \upsilon_2 + \alpha_3 \cdot (t_3 - t_2) = 16\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ (Μονάδες 2)

και

$x_3 = x_2 + \upsilon_2 \cdot (t_3 - t_2) + \frac{1}{2} \cdot a_3 \cdot (t_3 - t_2)^2$, $x_3 = -32\,\mathrm{m}$. (Μονάδες 2)

Μονάδες 5

Δ. $\Delta K_{0,3} = K_3 - K_0 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \upsilon_3^2 - 0,\ \Delta K_{0,3} = 128\text{ J}.$

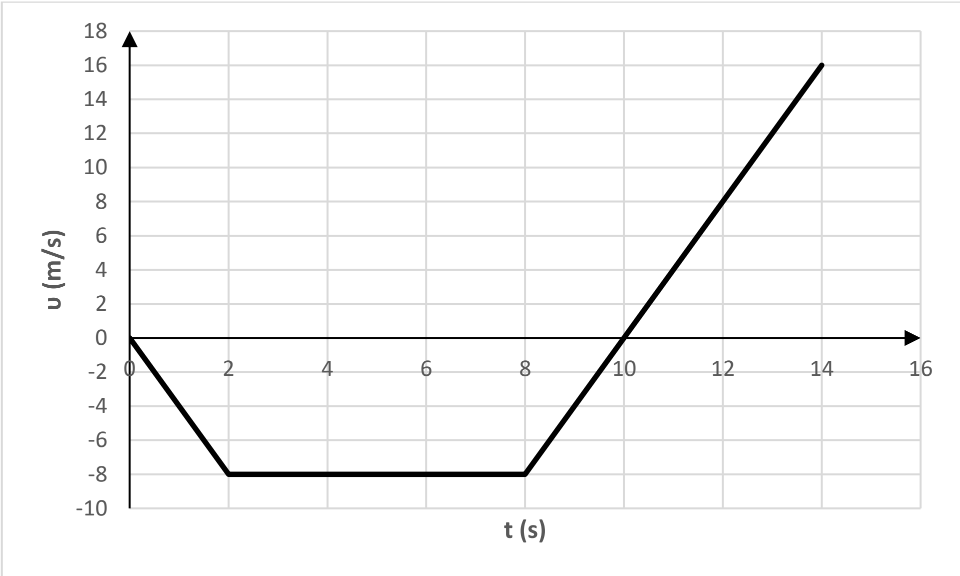
Μονάδες 2

Ε. Από την αρχή διατήρησης της ενέργειας: $\Delta K_{0,3} = W_{\sum \vec{F}_{0,3}},\ W_{\sum \vec{F}_{0,3}} = 128\text{ J}.$

Μονάδες 2

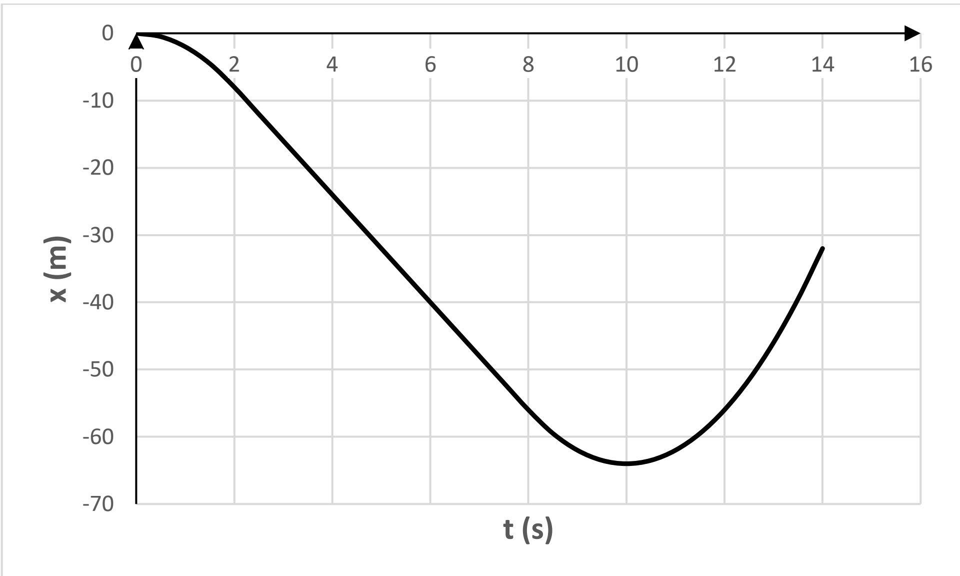
4.2.

Α.



Μονάδες 4

Β. θέσης – χρόνου (*x – t)*



Μονάδες 5

Ενδεικτική Λύση

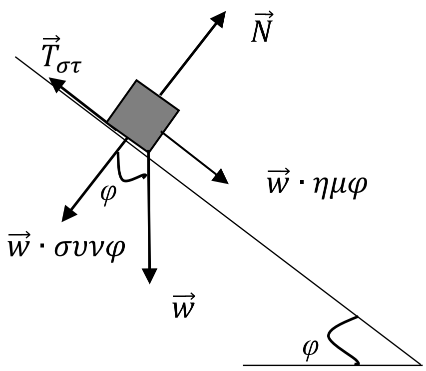
2.1) Σωστή απάντηση: (α).

Όταν το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος (δηλαδή όταν δεν έχει υποστεί καμία παραμόρφωση), δεν ασκεί δύναμη, συνεπώς η επιλογή (β) απορρίπτεται.

Σε κάθε άλλη περίπτωση, η δύναμη του ελατηρίου τείνει να το επαναφέρει στο φυσικό του μήκος. Στην περίπτωση (γ), θα έπρεπε λοιπόν να έχει φορά προς τα αριστερά. Η μόνη ορθή επιλογή είναι τελικά η (α).

2.2) Σωστές απαντήσεις: (α – iii), (β – ii), (γ – i)

Ο κύβος ισορροπεί οπότε σύμφωνα με τον 1ο νόμο του Newton η συνολική δύναμη που του ασκείται είναι μηδέν. Αν αναλύσουμε τη δύναμη του βάρους, η παράλληλη προς το κεκλιμένο επίπεδο συνιστώσα του θα είναι αντίθετη της (στατικής) τριβής, ενώ η κάθετη στο κεκλιμένο επίπεδο θα είναι αντίθετη της κάθετης δύναμης επαφής $\vec{N}$ που ασκεί το επίπεδο στον κύβο.



Συνεπώς, η κάθετη δύναμη επαφής που ασκεί το επίπεδο στον κύβο είναι ίση με $m \cdot g \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi$.

Η στατική τριβή μεταξύ κύβου και επιπέδου είναι ίση με $m \cdot g \cdot \eta\mu\varphi$.

Η συνισταμένη των δύο αυτών δυνάμεων (αφού ο κύβος ισορροπεί) θα έχει το ίδιο μέτρο με το βάρος, δηλ. $m \cdot g$, αλλά αντίθετη φορά.

13658

<u>Ενδεικτική λύση</u>

4.1.α

$\upsilon_1 = \alpha \cdot t_1 \Rightarrow 2\, {}^{m}/_{s} = \alpha \cdot 4s \Rightarrow \boldsymbol{\alpha = 0,5\ {}^{m}/_{s^2}}$ ***(Μονάδες 2)***

4.1.β

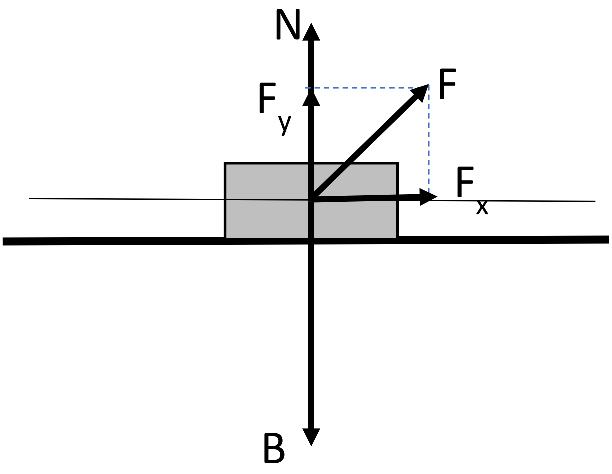
Αν δεν υπήρχε τριβή:

$F_x = m \cdot \alpha' \Rightarrow F \cdot \sigma\upsilon\nu 60^0 = m \cdot \alpha'$

(Μονάδα 1)

$\Rightarrow 100N \cdot \dfrac{1}{2} = 20kg \cdot \alpha' \Rightarrow \boldsymbol{\alpha' = 2,5\ {}^{m}/_{s^2}}$

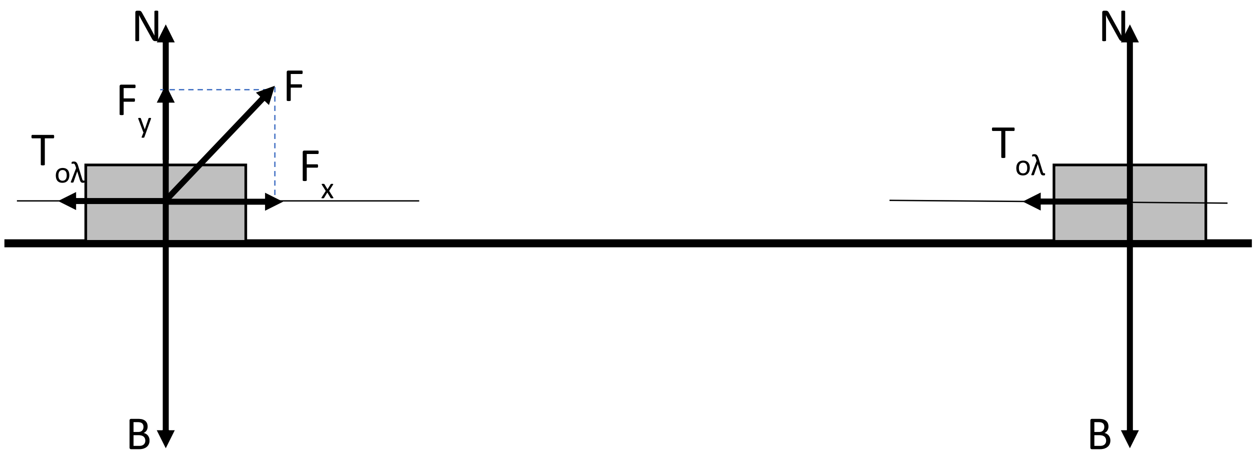
(Μονάδες 2)



Επομένως

$\alpha < \alpha'$ άρα υπάρχει τριβή ***(Μονάδα 1)***

4.2



Από 0 s – 4 s

Από 4 s - t_2

(Μονάδες 7)

4.3.α

Έχουμε

$T = \mu \cdot N\ (1)$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N + F_y = B \Rightarrow N = m \cdot g - F \cdot \eta\mu 60^0$

$\Rightarrow N = 20\ \mathrm{Kg} \cdot \frac{10\ \mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} - 100\ \mathrm{N} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \boldsymbol{N \cong 115\ \mathrm{N}}\ (2)$

(Μονάδες 2)

$\Sigma F_x = m \cdot \alpha \Rightarrow F_x - T_{o\lambda} = m \cdot \alpha \Rightarrow F \cdot \sigma\upsilon\nu 60^0 - T_{o\lambda} = m \cdot \alpha \Rightarrow$

$T_{o\lambda} = 100\ \mathrm{N} \cdot \frac{1}{2} - 20\ \mathrm{Kg} \cdot 0{,}5\ {}^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s}^2} \Rightarrow \boldsymbol{T_{o\lambda} = 40\ \mathrm{N}}$ *(3)*

(Μονάδες 2)

Η (1) λόγω των (2) και (3) γίνεται: $40N = \mu \cdot 115N \Rightarrow \mu = \frac{40}{115} \Rightarrow \boldsymbol{\mu \simeq 0,35}$ ***(Μονάδα 1)***

4.3.β

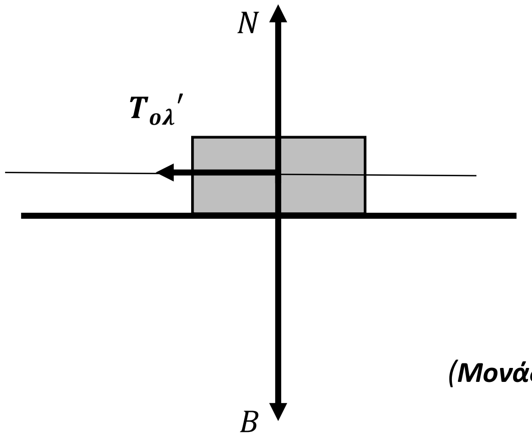
$$W = F \cdot s \cdot \ \sigma\upsilon\nu 60^0 \ \ (1)$$

$$s = \frac{1}{2}\alpha \cdot t_1^2 \Rightarrow s = \frac{1}{2} 0.5\ {}^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s}^2}\,(4\ \mathrm{s})^2 \Rightarrow \boldsymbol{s = 4\ m}$$ ***(Μονάδα 1)***

Από την (1) με αντικατάσταση προκύπτει: $W = 100\ \mathrm{N} \cdot 4\ \mathrm{m} \cdot\ 0{,}5 \Rightarrow \boldsymbol{W = 200\ \mathrm{J}}$ ***(Μονάδα 1)***

4.4.

Μετά την χρονική στιγμή $t_1 = 4$ s έχουμε:



Η νέα $T'_{o\lambda} = \mu \cdot N = \mu \cdot mg$

$\Rightarrow T'_{o\lambda} = 0{,}35 \cdot 20\ \mathrm{Kg} \cdot 10\ {}^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s}^2} \Rightarrow \boldsymbol{T'_{o\lambda} = 70\ \mathrm{N}}$

(Μονάδες 2)

Από Θ.Μ.Κ.Ε., για το χρονικό διάστημα 4 s $\longrightarrow t_2$, έχουμε:

$K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = W_{o\lambda} \Rightarrow 0 - \frac{1}{2} m \cdot \upsilon^2 = -T'_{o\lambda} \cdot s_1 \Rightarrow \frac{1}{2} 20\ \mathrm{kg} \cdot (2\ {}^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s}})^2 = 70\ \mathrm{N} \cdot s_1 \Rightarrow \boldsymbol{s_1 = \frac{4}{7}\ \mathrm{m}}$

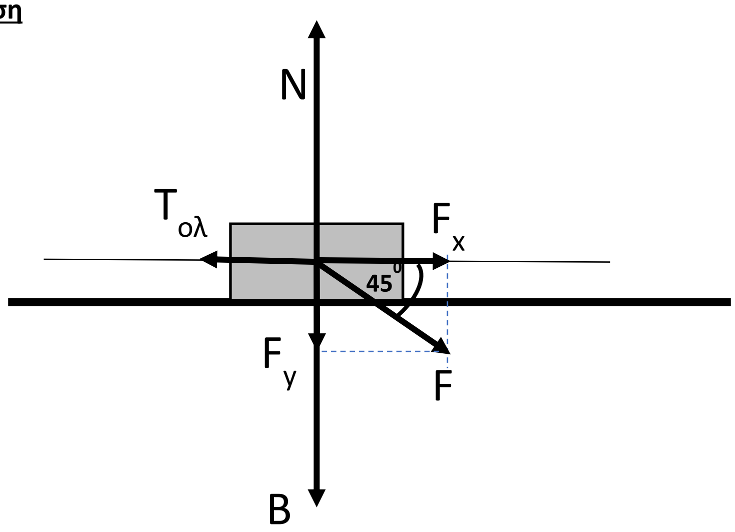
(Μονάδες 2)

$s_{o\lambda} = s + s_1 \Rightarrow \boldsymbol{s_{o\lambda} = \frac{32}{7}\ \mathrm{m}}$

(Μονάδα 1)

<u>**Ενδεικτική λύση**</u>

4.1



(Μονάδες 5)

4.2

$T_{ολ} = \mu \cdot N$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N - F_y - B = 0 \Rightarrow N = F \cdot \eta\mu 45^0 + m \cdot g \Rightarrow$

$N = 20\ \mathrm{N} \cdot 0{,}7 + 2\ \mathrm{Kg} \cdot 10\ ^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s}^2} \Rightarrow$

$\boldsymbol{N = 34\ \mathrm{N}\ (1)}$

(Μονάδες 5)

$T_{ολ} = \mu \cdot N \overset{(1)}{\Rightarrow}\ T_{ολ} = 0{,}2 \cdot 34N \Rightarrow\ \boldsymbol{T_{ολ} = 6{,}8\ \mathrm{N}}$

(Μονάδες 3)

4.3

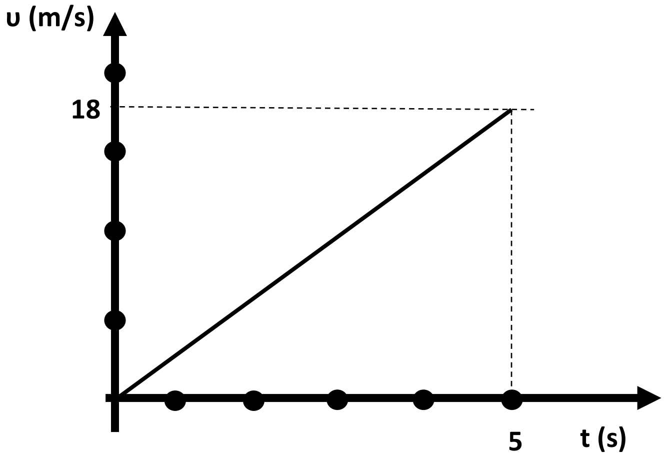
$\Sigma F_x = m \cdot a \Rightarrow F_x - T_{ολ} = m \cdot a \Rightarrow F \cdot \sigma\upsilon\nu 45^0 - T_{ολ} = m \cdot a \Rightarrow$

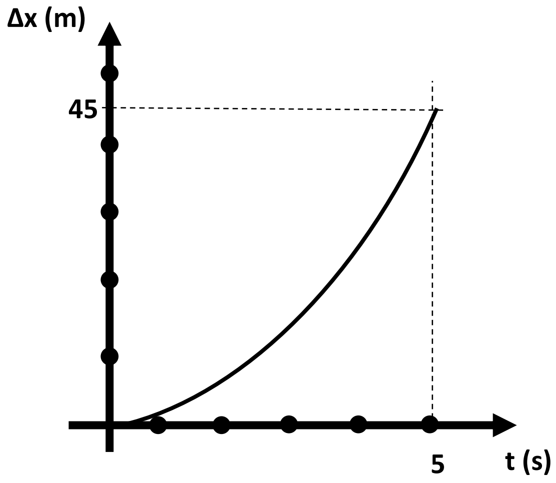
$20N \cdot 0{,}7 - 6{,}8N = 2Kg \cdot a \Rightarrow \boldsymbol{a = 3{,}6\ ^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s}^2}}$ ***(Μονάδες 3)***

$\upsilon = \alpha \cdot \Delta t \Rightarrow \upsilon = 3{,}6\ ^{m}/_{s^2} \cdot 5s \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon = 18\ \mathrm{m/s}}$ ***(Μονάδες 2)***

$\Delta x = \frac{1}{2} a \cdot (\Delta t)^2 \Rightarrow \Delta x = \frac{1}{2}\ 3{,}6\ ^{m}/_{s^2} \cdot (5s)^2 \Rightarrow \boldsymbol{\Delta x = 45\ \mathrm{m}}$ ***(Μονάδες 3)***

4.4

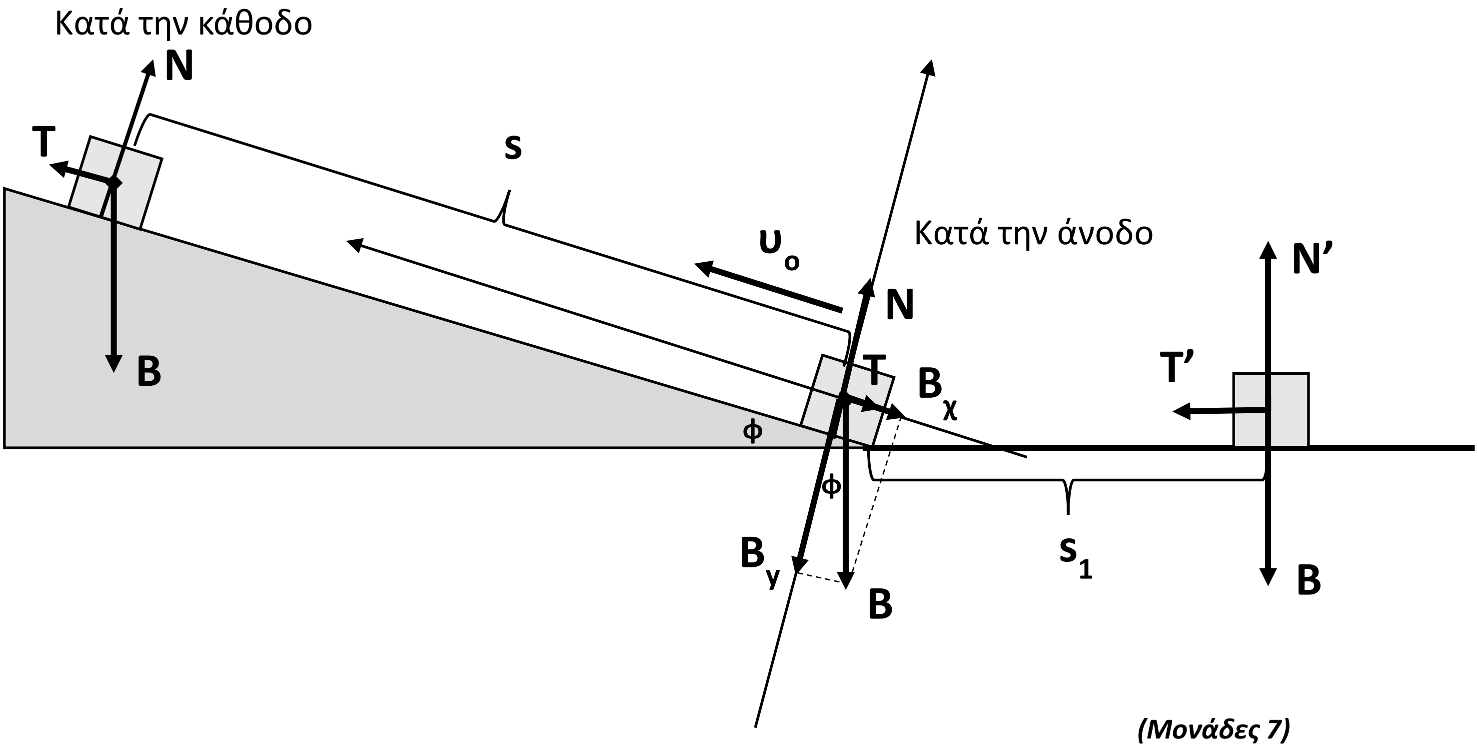




(Μονάδες 4)

<u>**Ενδεικτική λύση**</u>

4.1



(Μονάδες 7)

4.2

Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Κ.Ε. κατά την άνοδο του κιβωτίου επάνω στο κεκλιμένο επίπεδο.

$$K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi.} = W_{o\lambda} \Rightarrow 0 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -mg\eta\mu 30^0 s - Ts$$

$$\Rightarrow 0 - \frac{1}{2} \cdot 5\,\mathrm{Kg} \cdot (10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})^2 = -5\,\mathrm{Kg} \cdot 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 8\,\mathrm{m} - T \cdot 8\,\mathrm{m} \Rightarrow \boldsymbol{T} = \frac{\mathbf{25}}{\mathbf{4}}\,\mathbf{N} = \mathbf{6,25\,N}$$

(Μονάδες 4)

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N - mg\sigma\upsilon\nu 30^0 = 0 \Rightarrow N = 5\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \boldsymbol{N} = \mathbf{25\sqrt{3}\,N}$$

$$T = \mu \cdot N \Rightarrow \frac{25}{4}\,\mathrm{N} = \mu \cdot 25\sqrt{3}\,\mathrm{N} \Rightarrow \boldsymbol{\mu} = \frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{12}}$$

(Μονάδες 2+1=3)

4.3

Για να επιστρέψει το σώμα στην βάση του κεκλιμένου επιπέδου θα πρέπει: $\boldsymbol{B_x} > \boldsymbol{T}$

$$B_x = mg\eta\mu 30^0 = 5\,\mathrm{Kg} \cdot 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow \boldsymbol{B_x} = \mathbf{25\,N} > \mathbf{T}$$

(Μονάδες 1+2=3)

4.4

Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Κ.Ε. για την συνολική διαδρομή του κιβωτίου επάνω στο κεκλιμένο επίπεδο. Το έργο του βάρους του σώματος είναι μηδέν καθώς το βάρος είναι συντηρητική δύναμη και το σώμα, επιστρέφοντας στη θέση από την οποία ξεκίνησε, διαγράφει κλειστή διαδρομή επάνω στο κεκλιμένο επίπεδο.

$$K_{τελ} - K_{αρχ} = W_{ολ} \Rightarrow \frac{1}{2}mυ^2 - \frac{1}{2}mυ_0^2 = W_{βαρ} - 2Ts$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 5\ \text{Kg} \cdot υ^2 - \frac{1}{2} \cdot 5\ \text{Kg} \cdot (10\ \frac{\text{m}}{\text{s}})^2 = 0 - \frac{25}{4}\ \text{N} \cdot 16\ \text{m} \Rightarrow \boldsymbol{υ = 2\sqrt{15}\ \frac{m}{s}}$$

(Μονάδες 1+3=4)

Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Κ.Ε. για την διαδρομή του κιβωτίου επάνω στο οριζόντιο επίπεδο.

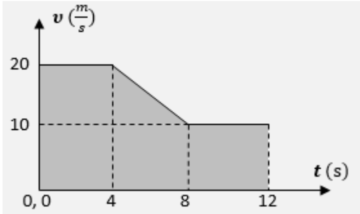
$$T' = μ \cdot N' = μ \cdot m \cdot g \Rightarrow T' = \frac{\sqrt{3}}{12} 50\ \text{N} \Rightarrow \boldsymbol{T' \cong 7\ N} \quad (1)$$

$$K_{τελ} - K_{αρχ.} = W_{ολ} \overset{(1)}{\Rightarrow} 0 - \frac{1}{2}mυ^2 = -T's_1 \overset{(1)}{\Rightarrow} \boldsymbol{s_1 \cong 21,4\ m}$$

(Μονάδες 2+2=4)

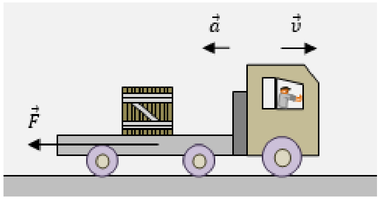
ΘΕΜΑ 4 (Ενδεικτικές απαντήσεις)

4.1 Το μέτρο της μετατόπισης του οχήματος υπολογίζεται ως εμβαδόν της σκιασμένης επιφάνειας που οριοθετείται από την γραφική παράσταση ταχύτητας-χρόνου και τον άξονα χρόνων από τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$, μέχρι τη στιγμή $t_3 = 12\,\mathrm{s}$. Το σχήμα μπορεί να αναλυθεί σε παραλληλόγραμμα και ένα τραπέζιο. Έτσι:



$$\Delta x = E_1 + E_2 + E_3 = \left[20 \cdot 4 + \frac{(20+10)\cdot 4}{2} + 10 \cdot 4\right]\,\mathrm{m} = \mathbf{180\ m}$$

4.2 Η επιβράδυνση του οχήματος συμβαίνει από τη χρονική στιγμή $t_1 = 4\,\mathrm{s}$, μέχρι τη στιγμή $t_2 = 8\,\mathrm{s}$. Με την βοήθεια του δεδομένου διαγράμματος ταχύτητας-χρόνου μπορούμε να υπολογίσουμε την τιμή της επιτάχυνσης στην διάρκεια του φρεναρίσματος:



$$a = \frac{\Delta\upsilon}{\Delta t} = \frac{(10-20)\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{(8-4)\,\mathrm{s}} = -2{,}5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

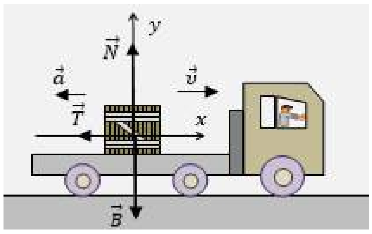
Έτσι η συνισταμένη δύναμη η οποία επιβραδύνει το όχημα υπολογίζεται με την βοήθεια του θεμελιώδους νόμου της μηχανικής:

$$F = (m+M)\cdot a = 3000\cdot(-2{,}5)\,\mathrm{N} = -7500\,\mathrm{N}$$

Άρα το μέτρο της συνισταμένης δύναμης που επιβραδύνει το όχημα είναι:

$$|\boldsymbol{F}| = \mathbf{7500\ N}$$

4.3 Κατά την διάρκεια του φρεναρίσματος του φορτηγού, το κιβώτιο τείνει να ολισθήσει προς τα εμπρός πάνω στην καρότσα. Δημιουργείται τριβή που εμποδίζει την ολίσθηση, δηλαδή στατική τριβή, όπως στο σχήμα.
Κατακόρυφα στο κιβώτιο, έχουμε ισορροπία δυνάμεων:



$$\Sigma F_y = N - B = 0$$

ή $\quad N = B = m\cdot g = 2000\,\mathrm{N}$

Έστω T το μέτρο της στατικής τριβής που δέχεται το κιβώτιο από την καρότσα. Εφαρμόζουμε τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής οριζόντια για το κιβώτιο:

$$\Sigma F_x = m\cdot a$$

ή $\; -T = m\cdot a$, οπότε $\; T = 500\,\mathrm{N}$

Επειδή πρόκειται για στατική τριβή, για το μέτρο της πρέπει να ισχύει η σχέση:

$T \le \mu_{o\rho.}\cdot N$, όπου $\mu_{o\rho.}$ ο συντελεστής οριακής στατικής τριβής.

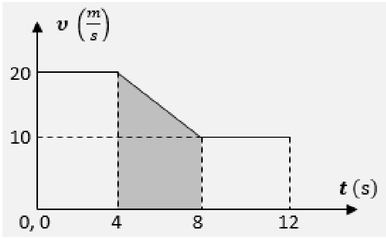
Έτσι καταλήγουμε στην σχέση:

$\mu_{o\rho.} \ge \frac{T}{N}$, ή $\mu_{o\rho.} \ge 0{,}25$

Τελικά δηλαδή συμπεραίνουμε ότι πρέπει: $\quad \boldsymbol{\mu_{o\rho.}^{min} = 0{,}25}$

4.4 Μπορούμε να υπολογίσουμε το μέτρο της μετατόπισης του οχήματος αλλά και του κιβωτίου κατά την διάρκεια του φρεναρίσματος, ως εμβαδόν του σκιασμένου σχήματος (τραπεζίου) στο δεδομένο διάγραμμα ταχύτητας-χρόνου, το οποίο δημιουργείται από την γραφική παράσταση και τον άξονα χρόνων, από τη χρονική στιγμή $t_1 = 4\,\mathrm{s}$, μέχρι τη στιγμή $t_2 = 8\,\mathrm{s}$:

$$\Delta x' = \frac{(20+10)\cdot 4}{2}\ m = 60\ m$$



Το έργο της στατικής τριβής στο κιβώτιο στη διάρκεια του φρεναρίσματος είναι:

$$W_T = -T \cdot \Delta x' = -30000\ \mathrm{J}$$

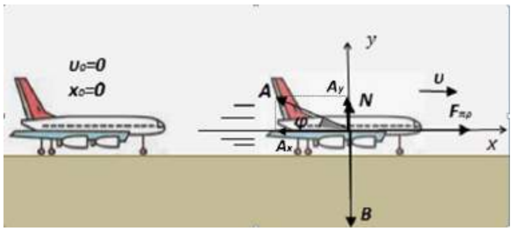
ΘΕΜΑ 4 (Ενδεικτικές απαντήσεις)

4.1 Αναλύουμε την αντίσταση του αέρα $\vec{A}$ σε μια κατακόρυφη συνιστώσα $\vec{A}_y$, μέτρου

$A_y = A \cdot ημφ = 1000 \cdot 0{,}6 \cdot x = 600 \cdot x$, (S.I)

και σε μια οριζόντια συνιστώσα $\vec{A}_x$, μέτρου

$A_x = A \cdot συνφ = 1000 \cdot 0{,}8 \cdot x = 800 \cdot x$, (S.I)



Το αεροσκάφος φτάνει σε κατάσταση απογείωσης, όταν η κατακόρυφη συνιστώσα $\vec{A}_y$ εξουδετερώνει το βάρος του $\vec{B}$, με αποτέλεσμα να μην δέχεται δύναμη από το δάπεδο ($\vec{N} = \vec{0}$). Δηλαδή όταν:

$$A_y = B = m \cdot g = 3 \cdot 10^5 \text{ N}$$

ή $600 \cdot x = 3 \cdot 10^5, (S.I)$, δηλαδή στη θέση $x = \frac{300000}{600} \text{ m} = \mathbf{500\ m}$ από την αρχική θέση έναρξης της τροχοδρόμησης του αεροσκάφους.

4.2 Η κίνηση του αεροσκάφους μέχρι την απογείωσή του είναι ευθύγραμμη επιταχυνόμενη κίνηση εξαιτίας της οριζόντιας συνισταμένης δύναμης:

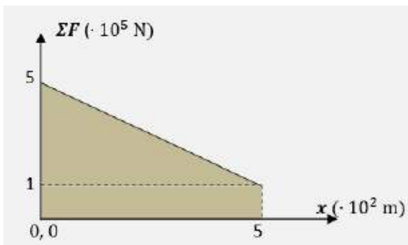
$$\Sigma F_x = F_{πρ.} - A_x = 5 \cdot 10^5 - 800 \cdot x, (S.I) \qquad (1)$$

Επειδή η συνισταμένη δύναμη είναι μεταβλητή, η επιτάχυνση του αεροσκάφους είναι μεταβλητή και η κίνησή του είναι μη ομαλά επιταχυνόμενη.
Για να υπολογίσουμε το μέτρο της ταχύτητάς του τη στιγμή της απογείωσης, εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής κινητικής ενέργειας για το αεροσκάφος, από την έναρξη της κίνησης, μέχρι την θέση της απογείωσης:

$$\Delta K = W_{ολ}, \text{ ή } \frac{1}{2} \cdot m \cdot \upsilon^2 = W_{\Sigma F_x} \qquad (2)$$

Θα υπολογίσουμε το έργο της $\overrightarrow{\Sigma F_x}$, ως εμβαδόν του σχήματος που δημιουργείται από την γραφική παράσταση δύναμης-θέσης και τον άξονα θέσεων για την μετατόπιση του αεροσκάφους, μέχρι την θέση απογείωσης. Με την βοήθεια της συνάρτησης (1), κατασκευάζουμε τον διπλανό πίνακα τιμών και τελικά το διάγραμμα δύναμης-θέσης:

x (m)	ΣF_x (N)
0	$5 \cdot 10^5$
500	10^5



$$W_{\Sigma F_x} = E = \frac{(5+1) \cdot 10^5 \cdot 5 \cdot 10^2}{2} = 15 \cdot 10^7 \text{ J}$$

Έτσι από την εξίσωση (2) προκύπτει:

$$\upsilon = \sqrt{\frac{2 \cdot W_{\Sigma F_x}}{m}} = \mathbf{100\ \frac{m}{s}}$$

4.3 Εφαρμόζουμε τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής στην οριζόντια διεύθυνση κίνησης του αεροσκάφους:

$$\Sigma F_x = m \cdot a$$

Οπότε με την βοήθεια και της σχέσης (1) προκύπτει για $x = 500$ m:

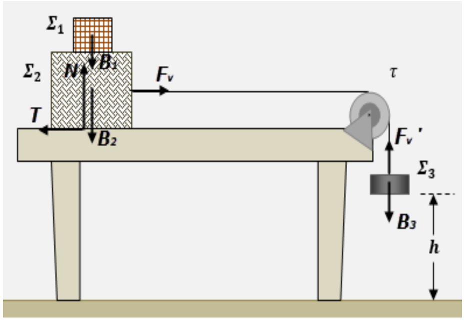
$$a = \frac{\Sigma F_x}{m} = \frac{10^5}{3 \cdot 10^4} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \mathbf{\frac{10}{3}\ \frac{m}{s^2}}$$

4.4 Η ισχύς του προωθητικού μηχανισμού του αεροσκάφους, την στιγμή της απογείωσης είναι:

$$P_{\pi\rho.} = F_{\pi\rho.} \cdot \upsilon = 5 \cdot 10^5 \cdot 100\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}} = \mathbf{5 \cdot 10^7\ W}$$

ΘΕΜΑ 4 (Ενδεικτικές απαντήσεις)

4.1 Αρχικά το σύστημα ισορροπεί. Από την ισορροπία του σώματος Σ_3 μπορούμε να υπολογίσουμε το μέτρο της δύναμης που ασκεί το τεντωμένο νήμα στα σώματα:



$$F_\nu = F_\nu{}' = B_3 = m_3 \cdot g = 20\ \mathrm{N}$$

Η δύναμη που εμποδίζει την ολίσθηση του συστήματος των σωμάτων Σ_1, Σ_2 είναι η τριβή του Σ_2 με τον πάγκο. Άρα:

$$T = F_\nu = 20\ \mathrm{N}$$

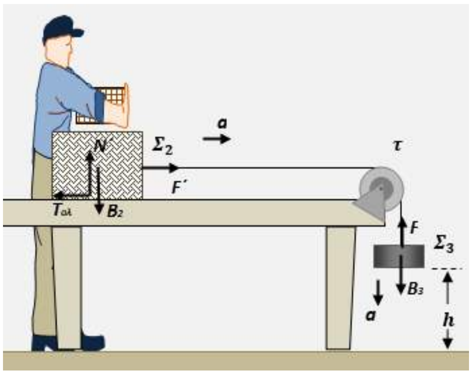
Από την κατακόρυφη ισορροπία των δυνάμεων που δέχεται το σύστημα των σωμάτων Σ_1, Σ_2, έχουμε $N = B_1 + B_2 = (m_1 + m_2) \cdot g = 120\ \mathrm{N}$

Έτσι η μέγιστη στατική (οριακή) τριβή μεταξύ του Σ_2 και του πάγκου είναι:

$$T_{o\rho.} = \mu_{o\rho.} \cdot N = 30\ \mathrm{N}$$

Διαπιστώνουμε ότι η στατική τριβή που δημιουργείται μεταξύ του σώματος Σ_2 και του πάγκου είναι μικρότερη από την οριακή στατική τριβή. Γι’ αυτό το σύστημα δεν κινείται.

4.2 Μόλις αφαιρεθεί το σώμα Σ_1 από την κατακόρυφη ισορροπία δυνάμεων στο σώμα του Σ_2 προκύπτει $N' = B_2 = m_2 \cdot g = 40\ \mathrm{N}$



Έτσι η οριακή στατική τριβή για να ισορροπεί το του Σ_2 προκύπτει τώρα

$$T_{o\rho.}{}' = \mu_{o\rho.} \cdot N' = 10\ \mathrm{N}$$

Τώρα το σύστημα αρχίζει να ολισθαίνει αφού η δύναμη που το τραβάει είναι το βάρος του σώματος Σ_3 -: $B_3 = m_3 \cdot g = 20\ \mathrm{N}$ και είναι $B_3 > T_{o\rho.}{}'$

Η τριβή μεταξύ του Σ_2 και του πάγκου γίνεται τριβή ολίσθησης και είναι

$$T_{o\lambda.} = \mu_{o\lambda.} \cdot N' = 8\ \mathrm{N}$$

Η επιτάχυνση των σωμάτων του συστήματος έχει μέτρο:

$$a = \frac{\Sigma F}{m_3 + m_2} = \frac{B_3 - T_{o\lambda.}}{m_3 + m_2} = \frac{12}{6}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

4.3 Το σώμα Σ_3 κινείται κατακόρυφα με την επιτάχυνση που υπολογίσαμε και ισχύει:

$$h = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

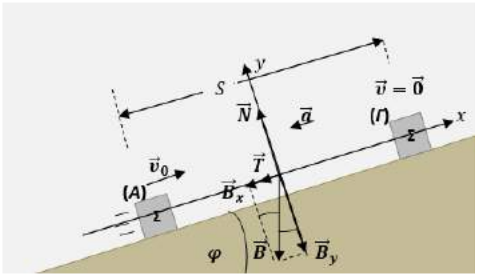
οπότε προκύπτει: $t = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{a}} = 1 \text{ s}$

4.4 Στον ίδιο χρόνο η μετατόπιση του σώματος Σ_2 είναι $\Delta x = h = 1 \text{ m}$ και η παραγόμενη θερμότητα ίση κατά μέτρο με το έργο της τριβής ολίσθησης:

$$Q = |W_T| = T \cdot \Delta x = 8 \text{ J}$$

13667

ΘΕΜΑ 4 (Ενδεικτικές απαντήσεις)



4.1 Κατά την άνοδο του σώματος Σ από το σημείο εκτόξευσης (Α), μέχρι το σημείο μηδενισμού της ταχύτητάς του (Γ), οι δυνάμεις που δέχεται είναι το βάρος του $\vec{B}$, η κάθετη δύναμη στήριξης $\vec{N}$ και η τριβή $\vec{T}$ από το κεκλιμένο δάπεδο. Δημιουργούμε ένα ελεύθερο διάγραμμα δυνάμεων μεταφέροντας όλες τι δυνάμεις στο κέντρο του σώματος και ένα σύστημα κάθετων αξόνων x΄x και y΄y, με τον x΄x άξονα παράλληλο στο κεκλιμένο δάπεδο και αναλύουμε το βάρος σε δύο συνιστώσες $\vec{B}_x$ και $\vec{B}_y$ στους άξονες αυτούς.

Στον άξονα y΄y οι δυνάμεις ισορροπούν. Άρα ισχύει:

$$\Sigma F_y = 0\,,$$

$$\text{Δηλαδή}\quad N - B_y = 0$$

$$\text{ή}\ \ N = B_y = m \cdot g \cdot συνφ = 0{,}8 \cdot m \cdot g$$

Το μέτρο της τριβής ολίσθησης, σύμφωνα με τον νόμο της τριβής είναι:

$$T = \mu \cdot N = 0{,}25 \cdot 0{,}8 \cdot m \cdot g = 0{,}2 \cdot m \cdot g$$

Εφαρμόζουμε τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής στον άξονα x΄x:

$$\Sigma F_x = m \cdot a$$

$$\text{ή}\quad -T - B_x = m \cdot a$$

$$\text{οπότε}\ \ a = -\frac{(T + m\cdot g\cdot ημφ)}{m} = -\frac{(0{,}2\cdot m\cdot g + 0{,}6\cdot m\cdot g)}{m} = -0{,}8 \cdot g = -8\ \frac{\mathrm{m}}{s^2}$$

Άρα το μέτρο της επιβράδυνσης του σώματος είναι

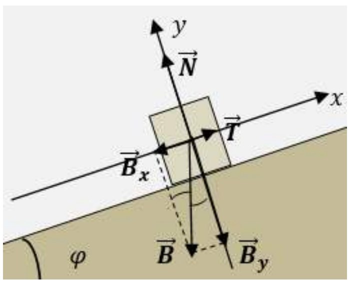
$$|a| = 8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

4.2 Εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας, για την κίνηση του σώματος από το (Α), ως το (Γ):

$$ΔK = W_{B_x} + W_T$$

$$\text{ή}\ \ 0 - \frac{1}{2}\cdot m \cdot v_0^2 = -B_x \cdot S - T \cdot S$$

$$\text{ή}\ \ S = \frac{m\cdot v_0^2}{2\cdot(B_x + T)} = \frac{m\cdot v_0^2}{2\cdot(m\cdot g\cdot ημφ + \mu\cdot m\cdot g\cdot συνφ)} = \frac{v_0^2}{2\cdot g\cdot(ημφ + \mu\cdot συνφ)} = \frac{64}{2\cdot 10\cdot 0{,}8}\,\mathrm{m} = 4\ \mathrm{m}$$



4.3 Όταν το σώμα φτάσει στο ανώτατο σημείο πάνω στο κεκλιμένο δάπεδο, μηδενίζεται στιγμιαία η ταχύτητά του και εξαιτίας του βάρους του τείνει να κινηθεί προς τα κάτω. Η τριβή που δέχεται από το δάπεδο αντιστρέφεται, έχει φορά προς τα πάνω ώστε να αντιτίθεται στην ολίσθηση του σώματος. Για να αποφασίσουμε αν θα κινηθεί προς τα κάτω, πρέπει να συγκρίνουμε το μέτρο της συνιστώσας $\vec{B}_x$, με το μέτρο της οριακής τριβής, για την οποία δόθηκε ότι είναι ίσο με το μέτρο της τριβής ολίσθησης:

$$\frac{B_x}{T} = \frac{m \cdot g \cdot ημφ}{\mu \cdot m \cdot g \cdot συνφ} = \frac{ημφ}{\mu \cdot συνφ} = \frac{0{,}6}{0{,}25 \cdot 0{,}8} = 3$$

$$\text{Έτσι προκύπτει}\qquad B_x > T$$

Άρα το σώμα επιστρέφει προς τη βάση του κεκλιμένου δαπέδου.

4.4 Η ενέργεια που μετατρέπεται σε θερμότητα κατά την κίνηση του σώματος από το σημείο εκτόξευσης, μέχρι να περάσει και πάλι από αυτό επιστρέφοντας, είναι σε απόλυτη τιμή ίση με το έργο της τριβής σε αυτή την διαδρομή:

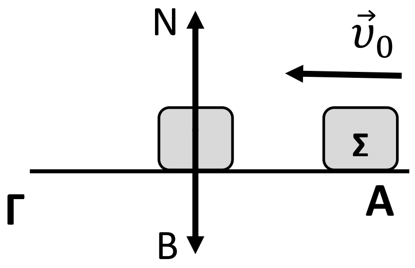
$$Q = \left|W_{T_{o\lambda}}\right| = |-T \cdot S - T \cdot S| = 2 \cdot T \cdot S = 2 \cdot \mu \cdot m \cdot g \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi \cdot S$$

Τελικά $Q = 2 \cdot 0{,}25 \cdot 2 \cdot 10 \cdot 0{,}8 \cdot 4\ \mathrm{J} = 32\ \mathrm{J}$

Ενδεικτική λύση

4.1

13669



Σχεδίαση δυνάμεων: ***(Μονάδες 2)***

Το οριζόντιο επίπεδο ΑΓ είναι λείο, άρα δεν ασκείται δύναμη τριβής κατά μήκος του οριζόντιου άξονα x'x. Επίσης δεν ασκείται άλλη οριζόντια δύναμη στο σώμα, οπότε $\Sigma F_x = 0$.

Επίσης $\Sigma F_y = 0$.

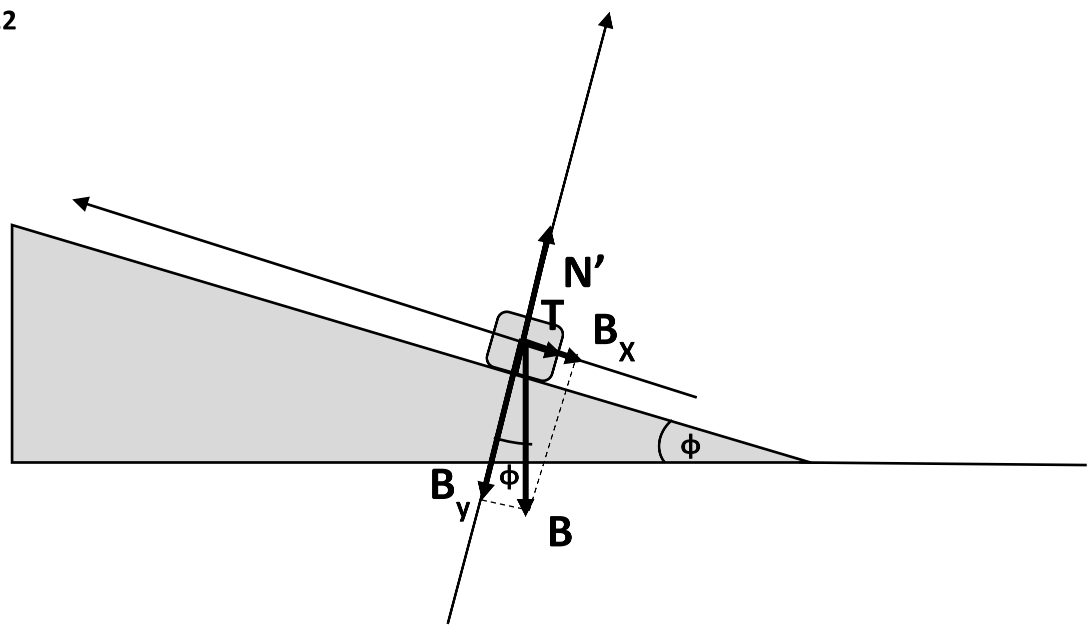
Άρα το σώμα Σ εκτελεί στο επίπεδο αυτό Ευθύγραμμη Ομαλή Κίνηση: $\upsilon_\Gamma = \upsilon_A = \upsilon_{0,}$

$$A\Gamma = \upsilon_0 \cdot t \Rightarrow \upsilon_0 = \frac{A\Gamma}{t} = \frac{20m}{2s} \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon_0 = 10\ \frac{m}{s}}$$

Η Κινητική Ενέργεια του σώματος στο Γ είναι : $K = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \upsilon_\Gamma^2 = \frac{1}{2} \cdot 1\ \mathrm{Kg} \cdot \left(10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 \Rightarrow \boldsymbol{K = 50\ \mathrm{J}}$

(Μονάδες 3)

4.2



Σχεδίαση δυνάμεων κατά την άνοδο του σώματος-Ανάλυση σε άξονες: ***(Μονάδες 5)***

4.3

Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. από την βάση του κεκλιμένου επιπέδου έως την θέση όπου μηδενίζεται η ταχύτητα του σώματος.

$$K_{τελ} - K_{αρχ} = W_B + W_{Τολ} \Rightarrow 0 - \frac{1}{2} m \cdot υ_Γ^2 = -m \cdot g \cdot ημ30^0 \cdot s - T_{ολ} \cdot s \ (1)$$ ***(Μονάδες 3)***

$$ΣF_y = 0 \Rightarrow N' - m \cdot g \cdot συν30^0 = 0 \Rightarrow N' = m \cdot g \cdot συν30^0 \ (2)$$ ***(Μονάδα 1)***

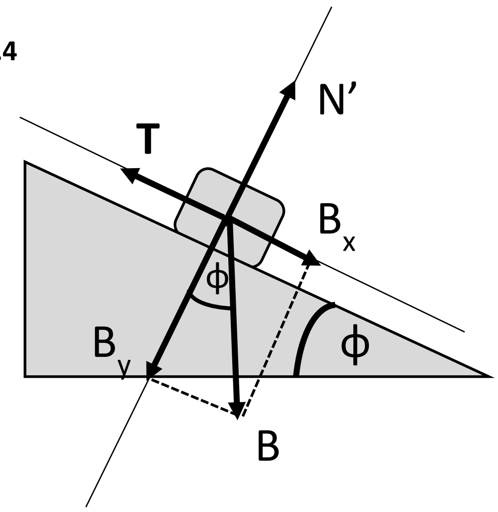
$$T_{ολ} = μ \cdot N' \overset{(2)}{\Rightarrow} T_{ολ} = μ \cdot m \cdot g \cdot συν30^0 \ (3)$$ ***(Μονάδα 1)***

$$(1) \overset{(3)}{\Rightarrow} 0 - \frac{1}{2} m \cdot υ_Γ^2 = -m \cdot g \cdot ημ30^0 \cdot s - μ \cdot m \cdot g \cdot συν30^0 \cdot s$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}(10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})^2 = -(10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot \frac{1}{2}) \cdot s - \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot (10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}) \cdot s \Rightarrow \boldsymbol{s} = \mathbf{5\ m}$$

(Μονάδες 3)

4.4



Σχεδιασμός δυνάμεων και ειδικότερα της Τριβής στην ανώτερη θέση, όταν έχει μηδενιστεί η ταχύτητα του σώματος, καθώς το σώμα τείνει να κινηθεί προς τα κάτω.

(Μονάδα 1)

Για να κινηθεί το σώμα προς τα κάτω θα πρέπει $B_x > T_{ορ} = T_{ολ}$ ***(Μονάδα 1)***

$$B_x = m \cdot g \cdot ημ30^0 = 1Kg \cdot 10 \frac{m}{s^2} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow \boldsymbol{B_x} = \mathbf{5\ N}$$

$$T_{ορ} = T_{ολ} = μ \cdot m \cdot g \cdot συν30^0 = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \left(10 \frac{m}{s^2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow \boldsymbol{T_{ορ}} = \boldsymbol{T_{ολ}} = \mathbf{5\ N}$$

(Μονάδες 2Χ2=4)

$\boldsymbol{B_x} = \boldsymbol{T_{ορ}} = \boldsymbol{T_{ολ}}$ άρα το σώμα **δεν** επιστρέφει στην βάση του κεκλιμένου επιπέδου. ***(Μονάδα 1)***

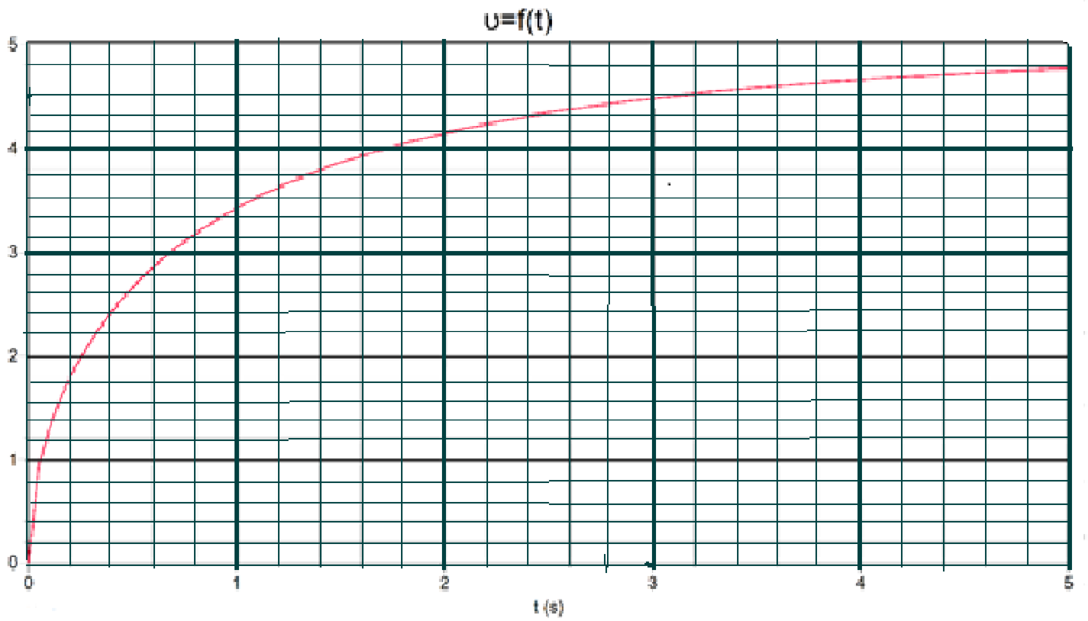
1.1 δ

1.2 α

1.3 β

1.4 δ

1.5 Σ, Λ, Λ, Σ, Σ



3.1) Αν η κίνηση του σώματος ήταν ελεύθερη πτώση, η γραφική παράσταση ταχύτητας-χρόνου θα ήταν ευθεία διερχόμενη από την αρχή των αξόνων σύμφωνα με την εξίσωσή ταχύτητας σε αυτήν την κίνηση που είναι:

$$\upsilon = g \cdot t$$

Άρα η κίνηση δεν είναι ελεύθερη πτώση, δηλαδή κατά την πτώση υπάρχει δύναμη αντίστασης από τον αέρα η οποία δεν μπορεί να θεωρηθεί αμελητέα.

Μονάδες 5

3.2) Εφόσον δεν υπάρχουν πληροφορίες για τη συνάρτηση της δύναμης αντίστασης, ο μόνος τρόπος να εκτιμήσουμε το ύψος είναι να υπολογίσουμε το εμβαδό που περικλείεται από τη γραφική παράσταση και τον άξονα των χρόνων. Σύμφωνα με την κλίμακα το κάθε «κουτάκι» έχει εμβαδό που είναι αριθμητικά ίσο με:

$$(0{,}2 \cdot 0{,}2)\frac{m}{s} \cdot s = 0{,}04\, m$$

Και κάτω από τη γραφική παράσταση περικλείονται περίπου 498 «κουτάκια», οπότε:

$$(498 \cdot 0{,}04)m = 19{,}92m \cong 20m$$

Σημείωση: Στο ερώτημα δεν μας ενδιαφέρει η ακρίβεια με την οποία θα μετρηθούν τα κουτάκια αλλά η μέθοδος που θα ακολουθηθεί για να εκτιμηθεί το ύψος πτώσης. Όσοι ακολουθήσουν τη σωστή μέθοδο και εκτιμήσουν το ύψος πτώσης μεταξύ 18m και 22m (450 έως 550 «κουτάκια), να βαθμολογηθούν με όλες τις μονάδες.

Μονάδες 8

3.3) Στο σημείο που αφήνεται το σώμα η μηχανική ενέργεια του σώματος ως προς το έδαφος είναι:

$$E_{\alpha\rho\chi} = K_{\alpha\rho\chi} + U_{\alpha\rho\chi} = 0 + m \cdot g \cdot h = (4 \cdot 10 \cdot 20)J = 800J$$

Μονάδες 2

Ενώ ακριβώς πριν προσκρούσει στο έδαφος η μηχανική του ενέργεια είναι:

$$E_{\tau\varepsilon\lambda} = K_{\tau\varepsilon\lambda} + U_{\tau\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \upsilon_{\tau\varepsilon\lambda}^2 + 0 = \left(\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4{,}8^2\right) J = 46{,}08J$$

Μονάδες 2

όπου η ταχύτητα πρόσκρουσης $\upsilon_{\tau\varepsilon\lambda} = 4{,}8m/s$ λαμβάνεται από την γραφική παράσταση.

Άρα το ποσοστό μεταβολής της μηχανικής ενέργειας θα είναι:

$$\frac{E_{\tau\varepsilon\lambda} - E_{\alpha\rho\chi}}{E_{\alpha\rho\chi}} \cdot 100\% = \frac{46{,}08 - 800}{800} \cdot 100\% = -94{,}24\%$$

Το πρόσημο στον παραπάνω υπολογισμό δηλώνει τη μείωση της μηχανικής ενέργειας.

Μονάδες 2

3.4) Οι χρονικές εξισώσεις της ταχύτητας *υ(t)* και της μετατόπισης *Δy(t)* στην ελεύθερη πτώση είναι:

$$\upsilon(t) = g \cdot t = 10 \cdot t\ (S.I)\ (1)$$

$$\Delta y(t) = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = 5 \cdot t^2\ (S.I)\ (2)$$

Μονάδες 2

Από την εξίσωση (2) θέτοντας $\Delta y = h = 20\ m$, υπολογίζουμε το χρόνο πτώσης:

$$20 = 5 \cdot t^2 \text{ ή } t^2 = 4s^2 \text{ ή } t = 2\ s$$

Μονάδες 2

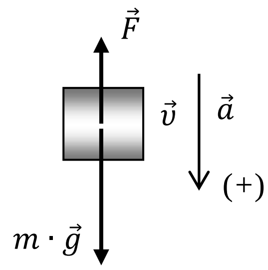
Και από την εξίσωση (1): $\upsilon(t) = g \cdot t = 10 \cdot t = 20m/s$.

Μονάδες 2

13696

Ενδεικτική Επίλυση Θέμα 4

4.1) Το βάρος έχει την κατεύθυνση του σχήματος και μέτρο:



$$w = m \cdot g = 200\ N,$$

Επειδή $w > F$, το δέμα θα εκτελεί ευθύγραμμη επιταχυνόμενη κίνηση προς τα κάτω και το μέτρο της επιτάχυνσης του, υπολογίζεται από το 2ο νόμο του Newton:

$$\sum F = m \cdot a \text{ ή } m \cdot g - F = m \cdot a \text{ ή } \alpha = \frac{200 - 100}{20} m/s^2 = 5m/s^2$$

(Μονάδες 4)

Οι χρονικές εξισώσεις της ταχύτητας *υ(t)* και της μετατόπισης *Δy(t)* θα είναι:

$$\upsilon(t) = a \cdot t = 5 \cdot t\ (S.I)\ (1)$$

$$\Delta y(t) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 = 2{,}5 \cdot t^2\ (S.I)\ (2)$$

(Μονάδες 2)

4.2) Από την εξίσωση (2) θέτοντας $\Delta y = H = 40\ m$, υπολογίζουμε το χρόνο πτώσης:

$$40 = 2{,}5 \cdot t^2 \text{ ή } t^2 = 16 \text{ ή } t = 4\ s$$

Και αντικαθιστώντας στην εξίσωση (1) υπολογίζουμε την ταχύτητα με την οποία προσγειώνεται το δέμα στο έδαφος:

$$\upsilon = 20m/s.$$

(Μονάδες 6)

4.3) Υπολογίζουμε τη δυναμική ενέργεια στην αρχική θέση U_1 καθώς και το ύψος από το έδαφος για το οποίο ισχύει $U_2 = \frac{1}{4} \cdot U_1$:

$$U_1 = m \cdot g \cdot H = 8000\ J \text{ και}$$

$$U_2 = m \cdot g \cdot h \text{ ή } \frac{U_1}{4} = m \cdot g \cdot h \text{ ή } m \cdot g \cdot h = 2000 \text{ ή } h = 10m$$

(Μονάδες 3)

Εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας (ΘΜΚΕ) για τη μετατόπιση $\Delta h = H - h = 30\ m$ μεταξύ των παραπάνω θέσεων:

$$K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = W_w + W_F \text{ ή } \frac{1}{2} m \cdot \upsilon^2 - 0 = +m \cdot g \cdot \Delta h - F \cdot \Delta h \text{ ή } 10 \cdot \upsilon^2 = 3000,$$

$$\text{Άρα } \upsilon = 10 \cdot \sqrt{3}\ m/s$$

(Μονάδες 4)

4.4) Τη στιγμή που το δέμα αφήνεται ελεύθερο κινείται με την ταχύτητα του ελικοπτέρου, άρα θα έχει αρχική ταχύτητα μέτρου $\upsilon_0 = 10m/s$ και φορά προς τα πάνω. Το δέμα θα εκτελέσει κατακόρυφη βολή προς τα πάνω στο βαρυτικό πεδίο της Γης.

(Μονάδες 2)

Αναλυτικότερα, κατά την άνοδο, η κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη με επιβράδυνση $\vec{g}$ και από τις εξισώσεις κίνησης υπολογίζουμε την μετατόπιση του δέματος:

$$\upsilon = \upsilon_0 - g \cdot t \text{ ή } 0 = 10 - 10 \cdot t_{\alpha\nu} \text{ ή } t_{\alpha\nu} = 1s, \text{ και}$$

$$\Delta y_1 = \upsilon_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot {t_{\alpha\nu}}^2 = 10 - 5 = 5m$$

(Μονάδες 2)

Κατά την κάθοδο, η κίνηση είναι ελεύθερη πτώση και η μετατόπιση του δέματος θα είναι:

$$\Delta y_2 = \Delta y_1 + H = 45\ m$$

Άρα το συνολικό διάστημα που διανύει το δέμα, μέχρι να φτάσει το έδαφος είναι:

$$S = |\Delta y_1| + |\Delta y_2| = 50\ m$$

(Μονάδες 2)

<u>Ενδεικτική επίλυση Θέματος 4 :</u>

Η καρύδα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση (κατακόρυφη βολή προς τα πάνω) στο βαρυτικό πεδίο της Γης. Εφαρμόζοντας τον 2º νόμο του Newton κατά την κίνηση και λαμβάνοντας ως θετική τη φορά του βάρους, αποδεικνύουμε ότι η επιτάχυνση $\vec{\alpha}$ είναι ίση με εκείνη της βαρύτητας:

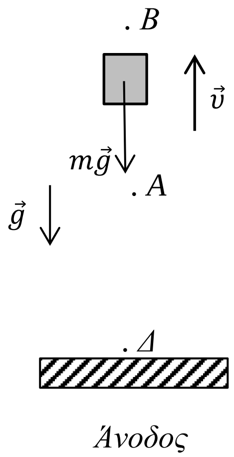
$$\Sigma F = m \cdot a \text{ ή } m \cdot g = m \cdot a \text{ ή } \alpha = g$$

Κατά την κίνηση της καρύδας, αφού σε αυτήν ασκείται μόνο το βάρος της, η μηχανική ενέργεια διατηρείται.

4.1) Η μηχανική ενέργεια, τη στιγμή της εκτόξευσης υπολογίζεται από το άθροισμα της κινητικής και της δυναμικής ενέργειας ως προς το έδαφος στη θέση (Α):

$$E_A = K_A + U_A = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \upsilon_A^2 + m \cdot g \cdot H = 5 + 15 = 20\,J$$

(Μονάδες 6)



4.2) Εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας (ΘΜΚΕ) για τη μετατόπιση του σώματος από το Α στο Β, θεωρώντας *(ΑΒ) =* h_1 *και* $\vec{\upsilon_B} = 0$:

$$K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = W_B \text{ ή } 0 - \frac{1}{2} m\upsilon_A^2 = -mgh_1 \text{ ή } h_1 = 5m$$

(Μονάδες 3)

Άρα το σημείο Β (μέγιστο ύψος) απέχει από το έδαφος (σημείο Δ) :

$$(B\Delta) = H + h_1 = 20\,m,$$

(Μονάδα 1)

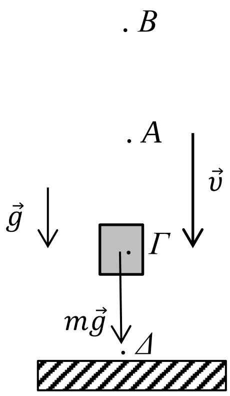
και η δυναμική ενέργεια ως προς το έδαφος είναι ίση με:

$$U_B = U_{max} = m \cdot g \cdot (B\Delta) = 20J.$$

(Μονάδες 2)

<u>Σχόλιο:</u> Αν κάποιος μαθητής απαντήσει κάνοντας χρήση της διατήρησης της μηχανικής ενέργειας θα αξιολογηθεί αντίστοιχα.

4.3) Έστω θέση Γ στην οποία η κινητική ενέργεια της καρύδας είναι ίση με τη δυναμική της ενέργεια, δηλαδή: $U_Γ = K_Γ$. Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας στις θέσεις Α και Γ:



Κάθοδος

$$E_A = E_Γ \text{ ή } 20 = K_Γ + U_Γ = 2 \cdot U_Γ \text{ ή } U_Γ = 10\, J \text{ ή } m \cdot g \cdot (ΓΔ) = 10 \text{ ή}$$

$$\boldsymbol{(ΓΔ) = 10\ m}$$

(Μονάδες 7)

4.4) **Άνοδος:** Η καρύδα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα $\overrightarrow{υ_A}$. Από την εξίσωση της ταχύτητας υπολογίζουμε τη χρονική στιγμή t_1 που η καρύδα φτάνει στο μέγιστο ύψος (θέση Β):

$$υ_B = υ_A - g \cdot t_1 \text{ ή } 0 = 10 - 10 \cdot t_1 \text{ ή } t_1 = 1s.$$

(Μονάδες 3)

Κάθοδος: Η καρύδα εκτελεί ελεύθερη πτώση. Αν $Δt$ η χρονική διάρκεια της πτώσης χρησιμοποιούμε την εξίσωση της κίνησης για να την υπολογίσουμε:

$$(BΔ) = \frac{1}{2} g Δt^2 \text{ ή } Δt = 2s.$$

(Μονάδες 2)

Άρα η χρονική στιγμή t_2 που η καρύδα φτάνει στο έδαφος είναι:

$$t_2 = t_1 + Δt = 3s.$$

(Μονάδα 1)

Ενδεικτική επίλυση Θέματος 4 :

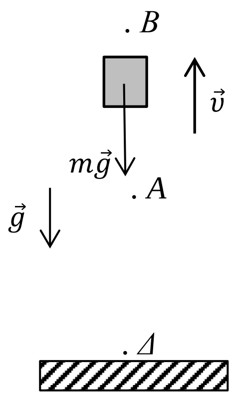
4.1) Το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση (κατακόρυφη βολή προς τα πάνω) στο βαρυτικό πεδίο της Γης. Εφαρμόζοντας τον $2^{ο}$ νόμο του Newton κατά την κίνηση, λαμβάνοντας ως θετική τη φορά του βάρους αποδεικνύουμε ότι η επιτάχυνση $\vec{\alpha}$ είναι ίση με την επιτάχυνση της βαρύτητας:

$$\Sigma F = m \cdot a \text{ ή } m \cdot g = m \cdot a \text{ ή } \alpha = g$$

Κατά την κίνηση του σώματος (ανιχνευτής-καταγραφέας μετεωρολογικών δεδομένων), αφού σε αυτό ασκείται μόνο το βάρος του, η μηχανική ενέργεια διατηρείται. Εφαρμόζουμε τη διατήρηση της μηχανικής ενέργεια στη θέση εκτόξευσης (θέση Δ) και στο μέγιστος ύψος H (θέση Β):

$$E_\Delta = E_B \text{ ή } K_\Delta + U_\Delta = K_B + U_B \text{ ή } \frac{1}{2} \cdot m \cdot \upsilon_\Delta^2 + 0 = 0 + m \cdot g \cdot H$$

$$\text{ή } \upsilon_\Delta = \sqrt{2 \cdot g \cdot H} \text{ ή } \upsilon_\Delta = 30\, m/s$$



Άνοδος

Μονάδες 6

4.2) Έστω Α το σημείο της τροχιάς στο οποίο η κινητική ενέργεια του σώματος είναι τετραπλάσια της δυναμικής και h_A το αντίστοιχο ύψος. Ισχύει:

$$K_A = 4 \cdot U_A$$

Εφαρμόζουμε τη διατήρηση της μηχανικής ενέργεια στη θέση εκτόξευσης (θέση Δ) και σε ύψος h_A από το έδαφος (θέση Α):

$$E_\Delta = E_A \text{ ή } K_\Delta + U_\Delta = K_A + U_A \text{ ή } K_\Delta + 0 = 4 \cdot U_A + U_A$$

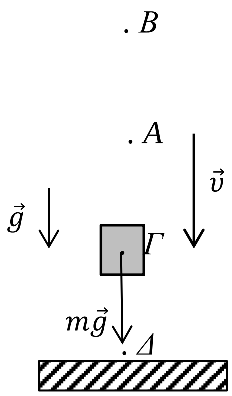
$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot \upsilon_\Delta^2 = 5 \cdot m \cdot g \cdot h_A \text{ ή } h_A = \frac{\upsilon_\Delta^2}{10 \cdot g} \text{ ή } h_A = 9\, m$$

Μονάδες 6

4.3) Άνοδος: Το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα $\vec{\upsilon}_A$. Από την εξίσωση της ταχύτητας υπολογίζουμε τη χρονική διάρκεια της ανόδου (από τη θέση Δ στη θέση Β):

$$\upsilon_B = \upsilon_\Delta - g \cdot \Delta t \text{ ή } 0 = 30 - 10 \cdot \Delta t \text{ ή } \Delta t = 3\, s.$$

Μονάδες 2



Κάθοδος

Κάθοδος: Το σώμα εκτελεί ελεύθερη πτώση από ύψος $H = 45\ m$. Αν $\Delta t'$ η χρονική διάρκεια της πτώσης χρησιμοποιούμε την εξίσωση της κίνησης για να την υπολογίσουμε:

$$H = \frac{1}{2} g \Delta t'^2 \text{ή } \Delta t' = 3\ s,$$

Μονάδες 2

Άρα ο συνολικός χρόνος κίνησης του σώματος είναι:

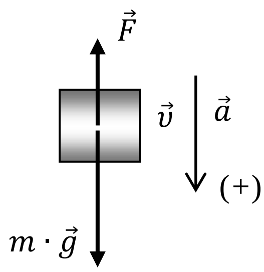
$$\Delta t_{ο\lambda} = \Delta t + \Delta t' = 6s$$

Και η μέση ταχύτητα θα είναι ίση με:

$$\upsilon_\mu = \frac{S_{ο\lambda}}{\Delta t_{ο\lambda}} = \frac{H+H}{\Delta t_{ο\lambda}} = \frac{90}{6} = 15 m/s.$$

Μονάδες 2

4.4) Κατά την κάθοδο του σώματος, στην επιτυχημένη δοκιμή των μαθητών η δύναμη *F* και το βάρος έχουν τη φορά του σχήματος. Το βάρος έχει μέτρο:



$$w = m \cdot g = 5\ N,$$

Επειδή $w > F$, το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση προς τα κάτω και το μέτρο της επιτάχυνσης του υπολογίζεται από το 2ο νόμο του Newton:

$$\sum F = m \cdot a \text{ ή } m \cdot g - F = m \cdot a \text{ ή } \alpha = \frac{5 - 4{,}55}{0{,}5} m/s^2 = 0{,}9\ m/s^2$$

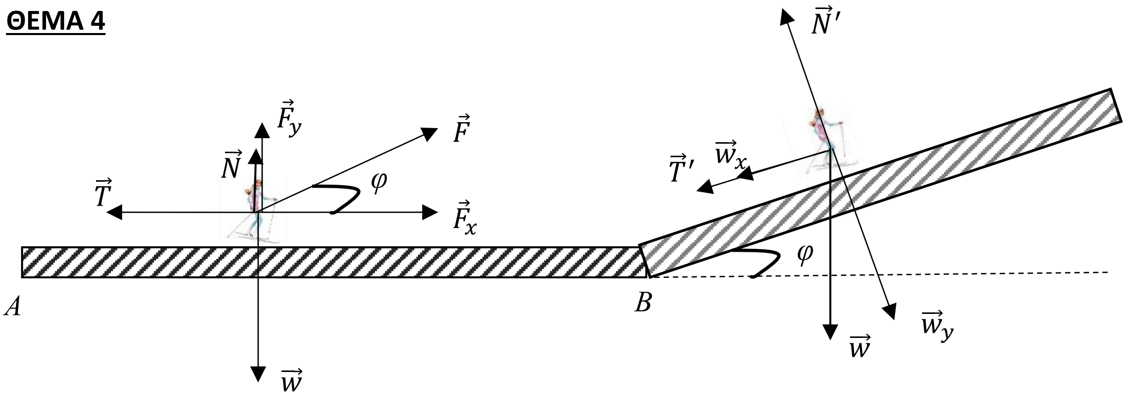
Μονάδες 5

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση της κίνησης υπολογίζουμε τη χρονική διάρκεια της πτώσης:

$$H = \frac{1}{2} \alpha \cdot \Delta t_{\pi\tau}{}^2 \text{ή } \Delta t_{\pi\tau} = 100\ s,$$

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 4



Στο σχήμα έχουν σχεδιαστεί τόσο οι δυνάμεις που ασκούνται στην σκιέρ στο οριζόντιο επίπεδο όσο και στην πλαγιά. Στο οριζόντιο τμήμα της διαδρομής η δύναμη $\vec{F}$ έχει αναλυθεί σε συνιστώσες σε άξονα παράλληλο και κάθετο στο οριζόντιο επίπεδο αντίστοιχα, ενώ στην πλαγιά η $\vec{F}$ έχει καταργηθεί και η δύναμη του βάρους έχει αναλυθεί σε συνιστώσες σε άξονα παράλληλο και κάθετο στην πλαγιά.

4.1) Οριζόντιο επίπεδο

Για τα μέτρα των δυνάμεων που έχουν σχεδιαστεί υπολογίζουμε:

$$F_x = F \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi = 150\ N$$

$$F_y = F \cdot \eta\mu\varphi = 200\ N$$

$$w = m \cdot g = 500\ N$$

Στον κατακόρυφο άξονα ισχύει ο 1ος νόμος του Newton, οπότε:

$$\sum \vec{F}_y = 0 \text{ ή } \vec{N} + \vec{F}_y + \vec{w} = 0 \text{ ή } N = w - F_y = 300\ N$$

Μονάδες 6

4.2) Από το νόμο της τριβής, υπολογίζουμε το μέτρο της τριβής στην οριζόντια πίστα:

$$T = \mu \cdot N = 0{,}5 \cdot 300N = 150\ N$$

Μονάδες 3

Στη συνέχεια υπολογίζουμε το μέτρο της συνισταμένης δύναμης στον οριζόντιο άξονα λαμβάνοντας ως θετική τη φορά της κίνησης:

$$\sum F_x = F_x - T = (150 - 150)N = 0$$

Άρα στην οριζόντια πίστα (AB), η σκιέρ εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση.

Μονάδες 3

4.3) Από την εξίσωση κίνησης στην οριζόντια πίστα (AB) υπολογίζουμε τη χρονική στιγμή που η αθλήτρια τερματίζει (σημείο Β):

$$\Delta x = \upsilon \cdot \Delta t \text{ ή } 22 = 11 \cdot (t_1 - t_0) \text{ ή } t_1 = \frac{22}{11} s = 2\ s$$

Πλαγιά

Για τα μέτρα των δυνάμεων που έχουν σχεδιαστεί υπολογίζουμε:

$$w_x = w \cdot \eta\mu\varphi = 400\ N$$
$$w_y = w \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi = 300\ N$$

Μονάδες 2

Στον άξονα που είναι κάθετος στην πλαγιά ισχύει ο 1ος νόμος του Newton, οπότε:

$$\sum \vec{F}_y = 0 \text{ ή } \vec{N}' + \vec{w}_y = 0 \text{ ή } N' = w_y = 300\ N$$

Από το νόμο της τριβής, υπολογίζουμε το μέτρο της τριβής στην πλαγιά:

$$T' = \mu \cdot N' = 0{,}5 \cdot 300N = 150\ N$$

Μονάδες 2

Εφαρμόζουμε το 2ο νόμο του Newton στον άξονα της κίνησης λαμβάνοντας ως θετική τη φορά της ταχύτητας:

$$\sum \vec{F}_x = m \cdot \vec{a}, \text{ή } -T' - w_x = m \cdot a \quad , \quad -550 = 50\,\alpha \text{ ή}$$
$$\alpha = -11 m/s^2$$

Μονάδες 2

Η σκιέρ εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση και τελικά ακινητοποιείται. Από την εξίσωση ταχύτητας σε αυτήν την κίνηση υπολογίζουμε τη χρονική στιγμή της ακινητοποίησης:

$$\upsilon = \upsilon_0 + \alpha \cdot \Delta t \text{ ή } 0 = 11 - 11 \cdot \Delta t \text{ ή } \Delta t = 1s$$
$$\text{ή } (t_2 - t_1) = 1s \text{ ή } t_2 = 3s,$$

και από την εξίσωση κίνησης το μήκος *d*:

$$d = \upsilon_0 \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot \Delta t^2 = (11 - 5{,}5)\ m = 5{,}5\ m$$

Άρα το συνολικό μήκος της διαδρομής θα είναι:

$$(\text{ΑΒ}) + (\text{ΒΓ}) = (22 + 5{,}5)m = 27{,}5\ m$$

Μονάδες 2

4.4) Η δύναμη που ασκείται από την πλαγιά στην αθλήτρια κατά τη διάρκεια της κίνησής της σε αυτήν, είναι η συνισταμένη της τριβής T' και της κάθετης δύναμης επαφής N' και έχει μέτρο:

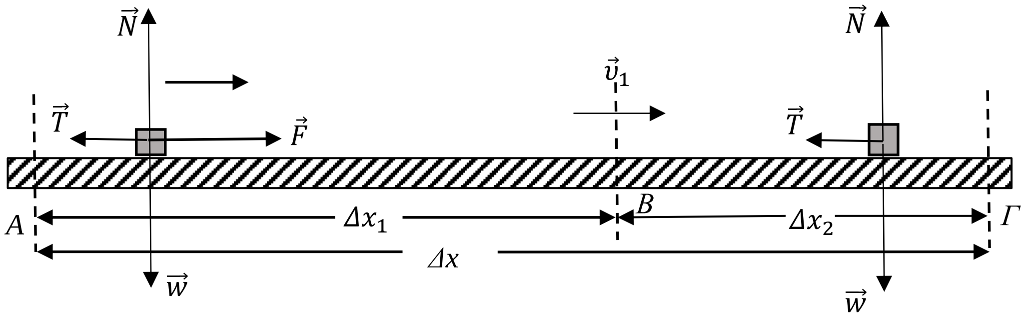
$$A = \sqrt{T'^2 + N'^2} = 150 \cdot \sqrt{5}\ N$$

Μονάδες 5

(Σχόλιο: Οι μαθητές μπορούν να προχωρήσουν, ανάλογα με την στρατηγική που θα επιλέξουν, στην ανάλυση δυνάμεων και στον υπολογισμό των αντίστοιχων μέτρων σε διάφορα σημεία της λύσης. Για το σωστό σχήμα, την ανάλυση των δυνάμεων και τους σωστούς υπολογισμούς να βαθμολογηθούν μέχρι και με 5 Μονάδες)

ΘΕΜΑ 4

Ενδεικτική Λύση



Στο παραπάνω σχήμα απεικονίζεται τόσο η διαδρομή κατά την οποία το αυτοκίνητο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση (ΑΒ), όσο και η διαδρομή κατά την οποία το αυτοκίνητο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση (ΒΓ) μέχρι να ακινητοποιηθεί (σημείο Γ). Έχουν σχεδιαστεί επίσης οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα σε κάθε κίνηση.

4.1) Στον άξονα που είναι κάθετος στο οριζόντιο επίπεδο ισχύει ο 1ος νόμος του Newton, οπότε:

$$\sum \vec{F}_y = 0 \text{ ή } \vec{N} + \vec{w} = 0 \text{ ή } N = w = m \cdot g = 12500\, N$$

Και από το νόμο της τριβής, υπολογίζουμε το μέτρο της:

$$T = \mu \cdot N = 0{,}8 \cdot 12500\, N = 10000\, N$$

Οπότε το έργο της για τη διαδρομή (ΒΓ) θα είναι:

$$W_T = |\vec{T}| \cdot |\Delta \vec{x}_2| \cdot \sigma\upsilon\nu 180^o = -(10000 \cdot 16)J = -160000J$$

Μονάδες 5

4.2) Εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας (ΘΜΚΕ) για τη μετατόπιση του σώματος από το Β στο Γ:

$$K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = W_B + W_N + W_T \text{ ή } 0 - \frac{1}{2} m \upsilon_1^2 = 0 + 0 + W_T$$

$$\text{ή } -\frac{1}{2} \cdot 1250kg \cdot \upsilon_1^2 = -160000J \text{ ή } \upsilon_1 = 16m/s \text{ ή } \upsilon_1 = 57{,}6km/h$$

Άρα ο οδηγός την χρονική στιγμή t_1, δεν είχε παραβιάσει το όριο ταχύτητας.

Μονάδες 7

4.3) Στη διαδρομή (ΑΒ) το αυτοκίνητο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση χωρίς αρχική ταχύτητα και από την εξίσωση της ταχύτητας υπολογίζουμε την επιτάχυνση του:

$$\upsilon_1 = \alpha \cdot t_1 \text{ ή } \alpha = \frac{\upsilon_1}{t_1} \text{ ή } a = \frac{16m/s}{8s} = 2m/s^2$$

Μονάδες 3

Για να υπολογίσουμε το μήκος της διαδρομής (ΑΒ) χρησιμοποιούμε την εξίσωση της κίνησης:

$$(AB) = \frac{1}{2}\alpha \cdot {t_1}^2 \text{ή } (AB) = 64m$$

Μονάδες 3

4.4) Για να υπολογίσουμε το μέτρο της δύναμης F που επιταχύνει το αυτοκίνητο στη χρονική διάρκεια από 0 → t_1 εφαρμόζουμε τον 2ο νόμο του Newton στον άξονα της κίνησης, :

$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}$, ή λαμβάνοντας ως θετική τη φορά της επιτάχυνσης

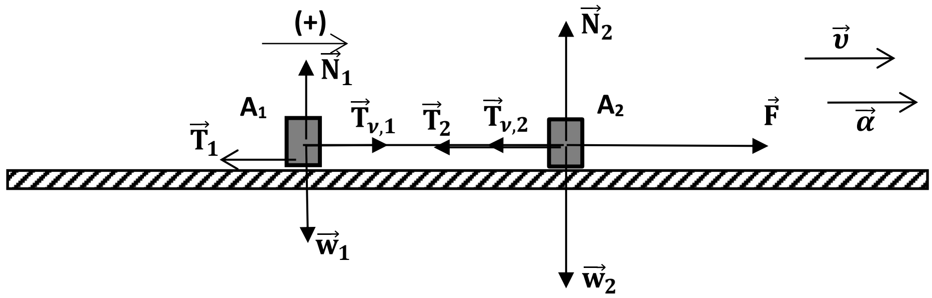
$$F - T = m \cdot a \text{ ή } F - 10000N = (1250 \cdot 2)N \text{ ή } F = 12500N$$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4

Ενδεικτική Λύση

4.1)



Στο παραπάνω σχήμα φαίνονται οι δυνάμεις που ασκούνται στο κάθε αυτοκίνητο, όταν κινούνται ρυμουλκώντας το ένα το άλλο.

Μονάδες 3

Στον άξονα που είναι κάθετος στον οριζόντιο δρόμο ισχύει ο 1ος νόμος του Newton για το κάθε αυτοκίνητο, οπότε:

$$\text{A1: } \sum \vec{F}_y = 0 \text{ ή } \vec{N}_1 + \vec{w}_1 = 0 \text{ ή } N_1 = w_1 = m_1 \cdot g = 20000\ N$$

Και από το νόμο της τριβής, υπολογίζουμε το μέτρο της:

$$T_1 = \mu_1 \cdot N_1 = (0{,}3 \cdot 20000)N = 6000\ N$$

Μονάδες 2

Ομοίως για το αυτοκίνητο 2, υπολογίζουμε:

$$\text{A2: } \sum \vec{F}_y = 0 \text{ ή } \vec{N}_2 + \vec{w}_2 = 0 \text{ ή } N_2 = w_2 = m_2 \cdot g = 30000\ N$$

Και από το νόμο της τριβής, υπολογίζουμε το μέτρο της:

$$T_2 = \mu_2 \cdot N_2 = (0{,}4 \cdot 30000)N = 12000\ N$$

Μονάδες 2

4.2) Λόγω αβαρούς και μη εκτατού σκοινιού για τα μέτρα των τάσεων, ισχύει:

$$T_{v,1} = T_{v,2} = T_v$$

Μονάδες 1

Εφαρμόζουμε τον 2ο νόμο του Newton στον άξονα της κίνησης για το σύστημα των δύο αυτοκινήτων:

$$\sum \vec{F} = m_{o\lambda} \cdot \vec{a}, \text{ ή λαμβάνοντας ως θετική τη φορά του σχήματος,}$$

$$F + T_{v,1} - T_{v,2} - T_1 - T_2 = (m_1 + m_1) \cdot a \text{ , ή}$$

$$F - T_1 - T_2 = (m_1 + m_2) \cdot a \text{ ή } (33000 - 18000)N = 5000kg \cdot a \text{ , ή}$$

$$a = 3m/s^2$$

Μονάδες 5

4.3) Εφαρμόζουμε τον 2ο νόμο του Newton για το Α1 στον άξονα της κίνησης :

$$\sum \vec{F} = m_1 \cdot \vec{a}, \text{ ή λαμβάνοντας ως θετική τη φορά του σχήματος,}$$

$$T_{\nu,1} - T_1 = m_1 \cdot a \text{ ή } T_{\nu,1} - 6000N = (2000 \cdot 3)N \text{ ή } T_{\nu,1} = 12000N$$

Μονάδες 3

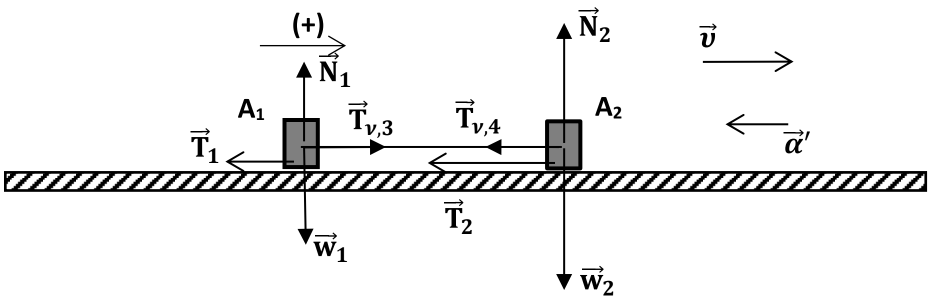
Εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας (ΘΜΚΕ) για τη μετατόπιση του Α1 κατά $\Delta x = 6m$:

$$\Delta K = W_{w_1} + W_{N_1} + W_{T_1} + W_{T_{\nu,1}} \text{ ή } \Delta K = 0 + 0 + T_{\nu,1} \cdot \Delta x - T_1 \cdot \Delta x$$

$$\text{ή } \Delta K = \big((12000 - 6000) \cdot 6\big)J \text{ ή } \Delta K = 36000J$$

Μονάδες 4

4.4)



Στο παραπάνω σχήμα, φαίνονται οι δυνάμεις που ασκούνται στα αυτοκίνητα μετά την κατάργηση της $\vec{F}$. Λόγω αβαρούς και μη εκτατού σκοινιού για τα μέτρα των τάσεων, ισχύει:

$$T_{\nu,3} = T_{\nu,4} = T_\nu{}'$$

Έστω ότι το σκοινί παραμένει τεντωμένο, οπότε θα ισχύει:

$$T_{\nu,3} > 0 \ (1)$$

Εφαρμόζουμε τον 2ο νόμο του Newton στον άξονα της κίνησης για το σύστημα των δύο αυτοκινήτων:

$$\sum \vec{F} = m_{o\lambda} \cdot \vec{a}', \text{ ή λαμβάνοντας ως θετική τη φορά του σχήματος,}$$

$$T_{\nu,3} - T_{\nu,4} - T_1 - T_2 = (m_1 + m_1) \cdot a' \text{ , ή}$$

$$-T_1 - T_2 = (m_1 + m_2) \cdot a' \text{ ή } -18000N = 5000kg \cdot a' \text{ , ή}$$

$$a' = -3{,}6 \ m/s^2$$

Η φορά της επιτάχυνσης είναι αντίρροπη της ταχύτητας οπότε η κίνηση είναι επιβραδυνόμενη.

Μονάδες 3

Εφαρμόζουμε το 2ο νόμο του Newton για το Α1 στον άξονα της κίνησης :

$\sum \vec{F} = m_1 \cdot \vec{a}'$, ή λαμβάνοντας ως θετική τη φορά του σχήματος,

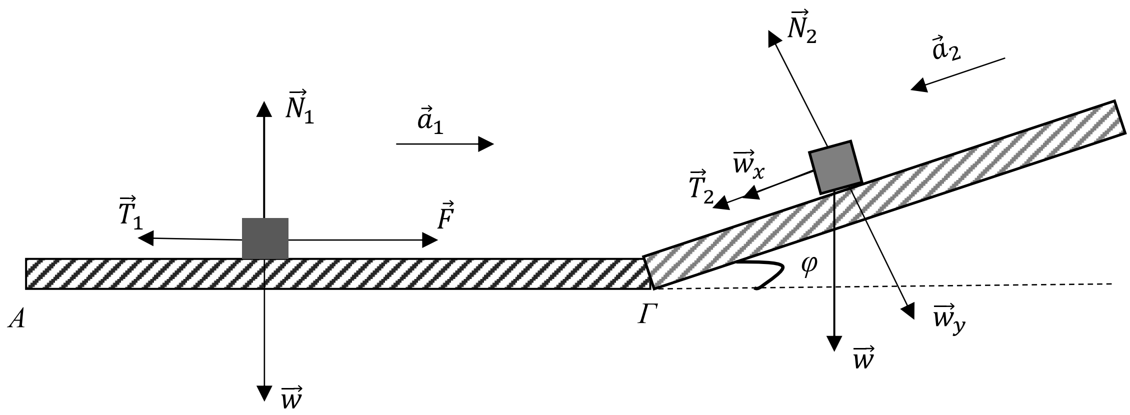
$$+T_{\nu,3} - T_1 = m_1 \cdot a \text{ ή } T_{\nu,3} - 6000N = -(2000 \cdot 3{,}6)N \text{ ή } T_{\nu,3} = -1200N$$

Το αποτέλεσμα παραβιάζει την υπόθεση που κάναμε και περιγράφεται στην (1), άρα το σκοινί μετά την κατάργηση της $\vec{F}$ παύει να είναι τεντωμένο με συνέπεια να υπάρχει πιθανότητα σύγκρουσης των αυτοκινήτων.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 4

Ενδεικτική Λύση



Στο σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στο snowmobile και στο παιδί τόσο στο οριζόντιο επίπεδο όσο και στην πλαγιά. Στην πλαγιά η $\vec{F}$ έχει καταργηθεί και η δύναμη του βάρους έχει αναλυθεί σε συνιστώσες σε άξονα παράλληλο και κάθετο στην πλαγιά.

4.1) Στον κατακόρυφο άξονα ισχύει ο 1ος νόμος του Newton, οπότε:

$$\sum \vec{F}_y = 0 \text{ ή } \vec{N}_1 + \vec{w} = 0 \text{ ή } N_1 = w = 1000\ N$$

Μονάδα 1

Από το νόμο της τριβής, υπολογίζουμε το μέτρο της τριβής στην οριζόντια διαδρομή:

$$T_1 = \mu_1 \cdot N_1 = 0{,}2 \cdot 1000N = 200\ N$$

Μονάδες 2

Στη συνέχεια εφαρμόζουμε τον 2ο νόμο του Newton λαμβάνοντας ως θετική τη φορά της κίνησης:

$$\sum \vec{F}_x = m \cdot \vec{a}, \text{ή } F - T_1 = m \cdot a_1, \text{ή } 300 - 200 = 100 \cdot \alpha_1 \text{ή}$$

$$\alpha_1 = 1m/s^2$$

Μονάδες 3

4.2) Το snowmobile και το παιδί στην οριζόντια διαδρομή εκτελούν ευθύγραμμη ομαλή επιταχυνόμενη κίνηση. Από την εξίσωση κίνησης υπολογίζεται η χρονική διάρκεια Δt_1 αυτής της κίνησης:

$$s = \frac{1}{2}\alpha_1 \cdot \Delta t_1{}^2 \text{ή } \Delta t_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot s}{a_1}} \text{ ή } \Delta t_1 = 10s$$

Μονάδες 3

Και από την εξίσωση της ταχύτητας υπολογίζουμε την ταχύτητα (υ_1) στο σημείο Γ:

$$\upsilon_1 = \alpha_1 \cdot \Delta t_1 = 10m/s$$

Μονάδες 3

4.3) Για τα μέτρα των δυνάμεων που έχουν σχεδιαστεί στην χιονισμένη πλαγιά υπολογίζουμε:

$$w = m \cdot g = 1000\,N,$$
$$w_x = m \cdot g \cdot \eta\mu\varphi = 600\,N$$
$$w_y = m \cdot g \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi = 800\,N$$

Μονάδες 2

Στον άξονα που είναι κάθετος στην πλαγιά ισχύει ο 1ος νόμος του Newton, οπότε:

$$\sum \vec{F}_y = 0 \text{ ή } \vec{N}_2 + \vec{w}_y = 0 \text{ ή } N_2 = w_y = 800\,N$$

Και από το νόμο της τριβής, υπολογίζουμε το μέτρο της:

$$T_2 = \mu_2 \cdot N_2 = 0{,}5 \cdot 800N = 400\,N$$

Μονάδες 2

Στη συνέχεια εφαρμόζουμε τον 2ο νόμο του Newton στον άξονα της κίνησης στην χιονισμένη πλαγιά :

$\sum \vec{F}_x = m \cdot \vec{a}_2$, ή λαμβάνοντας ως θετική τη φορά της επιβράδυνσης,

$$w_x + T_2 = m \cdot a_2 \text{ ή } a_2 = \frac{w_x + T_2}{m} \text{ ή } a_2 = \frac{1000N}{100kg} \text{ ή } a_2 = 10m/s^2$$

Μονάδες 3

4.4) Το όχημα και το παιδί εκτελούν ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση στην χιονισμένη πλαγιά. Από την εξίσωση της ταχύτητας, υπολογίζεται η χρονική διάρκεια Δt_2 αυτής της κίνησης:

$$\upsilon = \upsilon_0 - a_2 \cdot \Delta t_2 \text{ ή } \upsilon_\Delta = \upsilon_\Gamma - a_2 \cdot \Delta t_2 \text{ ή } 0 = 10 - 10 \cdot \Delta t_2 \text{ ή } \Delta t_2 = 1s$$

Μονάδες 3

Και από την εξίσωση κίνησης υπολογίζουμε το διάστημα που θα διανύσει το όχημα και το παιδί, στη χιονισμένη πλαγιά μέχρι να ακινητοποιηθεί:

$$(\Gamma\Delta) = \upsilon_o \cdot \Delta t_2 - \tfrac{1}{2} \cdot \alpha_2 \cdot {\Delta t_2}^2 \text{ ή } (\Gamma\Delta) = \left(10 \cdot 1 - \tfrac{1}{2} \cdot 10 \cdot 1^2\right) m$$
$$\text{ή } (\Gamma\Delta) = 5\,m.$$

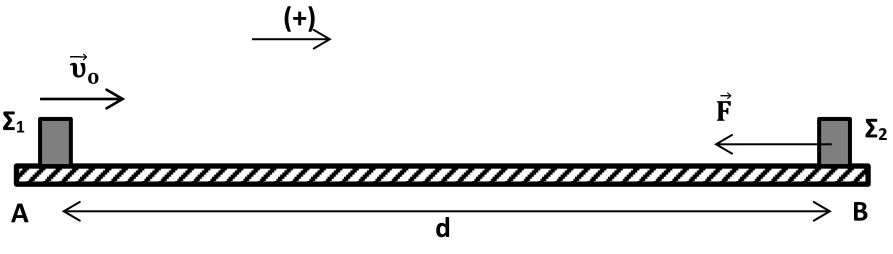
Εφόσον $(\Gamma\Delta) < d$, η σύγκρουση με τον σκιέρ αποφεύγεται.

Μονάδες 3

13707

Θέμα 4

Ενδεικτική Λύση



4.1) Για να υπολογίσουμε την επιτάχυνση του $Σ_2$ εφαρμόζουμε τον 2^ο νόμο του Newton στον άξονα της κίνησης :

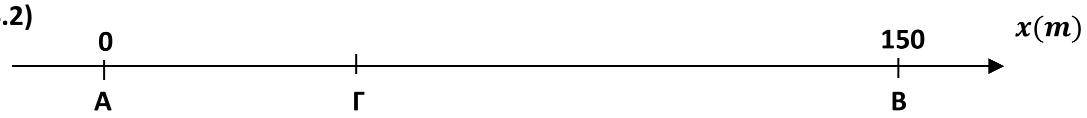
$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}, \text{ ή σύμφωνα με τη θετική φορά,}$$

$$-F = m_2 \cdot a \text{ ή } -8N = (4kg) \cdot a \text{ ή } a = -2m/s^2$$

Άρα η επιτάχυνση του $Σ_2$ έχει μέτρο $2m/s^2$, οριζόντια διεύθυνση και αρνητική φορά.

Μονάδες 5

4.2)



Θεωρούμε προσανατολισμένο άξονα θέσεων με οριζόντια διεύθυνση, θετική φορά προς τα δεξιά και αρχή ($x = 0$) το σημείο Α. Το $Σ_1$ εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση με εξίσωση θέσης:

$$x_1 = +\upsilon_0 \cdot t \text{ ή } x_1 = 5 \cdot t \ (S.I)$$

Το $Σ_2$ εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση χωρίς αρχική ταχύτητα, με εξίσωση θέσης:

$$x_2 = x_0 + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \text{ ή } x_2 = 150 - t^2 \ (S.I)$$

Μονάδες 2

Τη χρονική στιγμή t_1 που οι κύβοι θα συναντηθούν (σημείο Γ) θα ισχύει:

$$x_1 = x_2 \text{ ή } 5 \cdot t_1 = 150 - {t_1}^2 \text{ ή } {t_1}^2 + 5 \cdot t_1 - 150 = 0 \ (1)$$

Η διακρίνουσα της δευτεροβάθμιας εξίσωσης (1) είναι:

$$\Delta = 5^2 - 4 \cdot (-150) = 625$$

Και οι λύσεις της (1) είναι:

$$t_1 = \frac{-5 + \sqrt{625}}{2} = 10s \ (\delta \varepsilon \kappa \tau ή) \text{ ή}$$

$$t_1 = \frac{-5 - \sqrt{625}}{2} = -15s \ (\alpha \pi o \rho \rho ί \pi \tau \varepsilon \tau \alpha \iota)$$

Μονάδες 4

Η συνάντηση συμβαίνει στο σημείο Γ, η θέση του οποίου είναι:

$$x_{Γ} = 5 \cdot t_1 = 50m$$

Άρα η συνάντηση συμβαίνει σε απόσταση 50m από το σημείο Α.

Μονάδες 2

4.3) Το έργο της δύναμης $\vec{F}$ στη μετατόπιση του $Σ_2$ από το Β στο Γ που πραγματοποιείται στο χρονικό διάστημα 0 → t_1 υπολογίζεται ως εξής:

$$W_F = |\vec{F}| \cdot |Δ\vec{x}_{ΒΓ}| \cdot συν0^o = 8 \cdot 100 \cdot (+1)\, J = +800\, J$$

Μονάδες ***5***

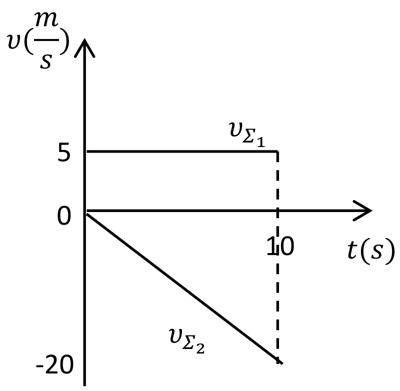
4.4) Η εξίσωση της ταχύτητας για το $Σ_1$ είναι:

$$υ_1 = +5m/s = σταθερή$$

Ενώ για το $Σ_2$ αντίστοιχα έχουμε:

$$υ_2 = α \cdot t = -2 \cdot t\ (S.I)$$

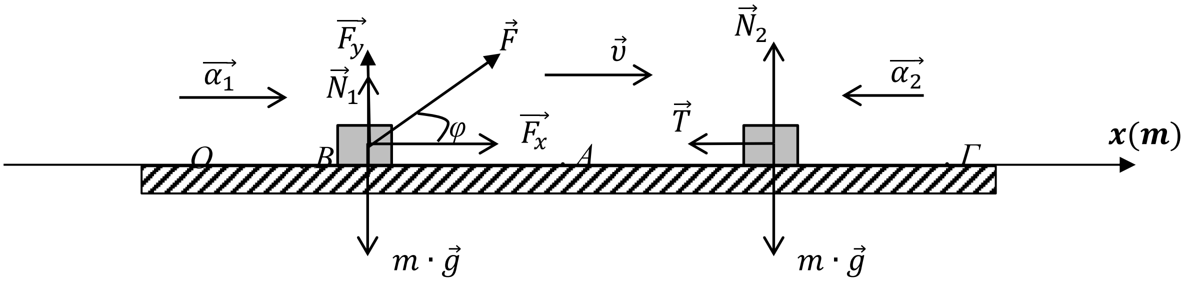
Και στη συνέχεια απεικονίζεται το ζητούμενο διάγραμμα για $0 \le t \le 10s$



Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4

Ενδεικτική Λύση



4.1) Στο σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στον κύβο τόσο στο λείο τμήμα της διαδρομής (ΟΑ) όσο και στο τραχύ (ΑΓ). Η $\vec{F}$ (που ασκείται μόνο στο λείο τμήμα) έχει αναλυθεί σε συνιστώσες σε οριζόντιο και κατακόρυφο άξονα και τα μέτρα τους υπολογίζονται ως εξής:

$$F_y = F \cdot \eta\mu\varphi = 6\,N$$

$$F_x = F \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi = 8\,N$$

Μονάδες 2

Στη συνέχεια εφαρμόζουμε τον 2ο νόμο του Newton στον οριζόντιο άξονα:

$\sum \vec{F_x} = m \cdot \vec{a}_1$, ή λαμβάνοντας ως θετική τη φορά της ταχύτητας,

$$F_x = m \cdot a_1 \text{ ή } a_1 = \frac{F_x}{m} \text{ ή } a_1 = \frac{8\,N}{4\,kg} \text{ ή } a_1 = 2\,m/s^2$$

Ο κύβος στη διαδρομή (ΟΑ) εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση δηλαδή σε κάθε θέση της διαδρομής, οπότε και στη θέση Β $(x_B = 1\,m)$, η επιτάχυνση έχει μέτρο 2 m/s^2 και είναι ομόρροπη της ταχύτητας.

Μονάδες 3

4.2) Στη διαδρομή (ΟΑ) η μετατόπιση του κύβου είναι:

$$\Delta x_1 = x_A - x_O = (3-0)m = 3m$$

Εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας (ΘΜΚΕ) για την μετατόπιση Δx_1:

$$K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = W_{F_x} + W_{F_y} + W_N + W_w \text{ ή } \frac{1}{2}m \cdot \upsilon_A^2 - \frac{1}{2}m \cdot \upsilon_0^2 = +F_x \cdot \Delta x_1 + 0 + 0 + 0$$

$$\text{ή } 2 \cdot \upsilon_A^2 - \ 2kg \cdot 2^2\frac{m^2}{s^2} = 8N \cdot 3m \text{ ή } \upsilon_A^2 = \frac{24+8}{2}\frac{m^2}{s^2} \text{ ή } \upsilon_A = 4m/s$$

Μονάδες 7

4.3) Ο κύβος στη διαδρομή (ΑΓ) εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση. Από την εξίσωση της ταχύτητας υπολογίζουμε το μέτρο της επιβράδυνσης $\vec{\alpha}_2$ (η κατεύθυνση της έχει σχεδιαστεί στο σχήμα):

$$\upsilon = \upsilon_0 - a_2 \cdot \Delta t \text{ ή } \upsilon_\Gamma = \upsilon_A - a_2 \cdot \Delta t \text{ ή } 0 = 4m/s - \alpha_2 \cdot 4s \text{ ή } a_2 = 1m/s^2$$

Μονάδες 2

Ενώ η μετατόπιση για την διαδρομή (ΑΓ) θα είναι:

$$\Delta x_2 = \upsilon_o \cdot \Delta t - \frac{1}{2} \cdot \alpha_2 \cdot \Delta t^2 \text{ ή } \Delta x_2 = \left(4 \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4^2\right) m$$

$$\text{ή } \Delta x_2 = 8\ m.$$

Μονάδες 3

Όμως,

$$\Delta x_2 = x_\Gamma - x_A \text{ ή } 8m = x_\Gamma - 3m \text{ ή } x_\Gamma = +11m$$

Μονάδες 1

4.4) Εφαρμόζουμε τον 2ο νόμο του Newton στον οριζόντιο άξονα για τη διαδρομή (ΑΓ):

$\sum \vec{F}_x = m \cdot \vec{\alpha}_2$, ή λαμβάνοντας ως θετική τη φορά της επιβράδυνσης $\vec{\alpha}_2$,

$$T = m \cdot a_2 \text{ ή } T = 4N$$

Μονάδες 2

Στον κατακόρυφο άξονα ισχύει ο 1ος νόμος του Newton, οπότε:

$$\sum \vec{F}_y = 0 \text{ ή } \vec{N}_2 + \vec{w} = 0 \text{ ή } N_2 = w = 40\ N$$

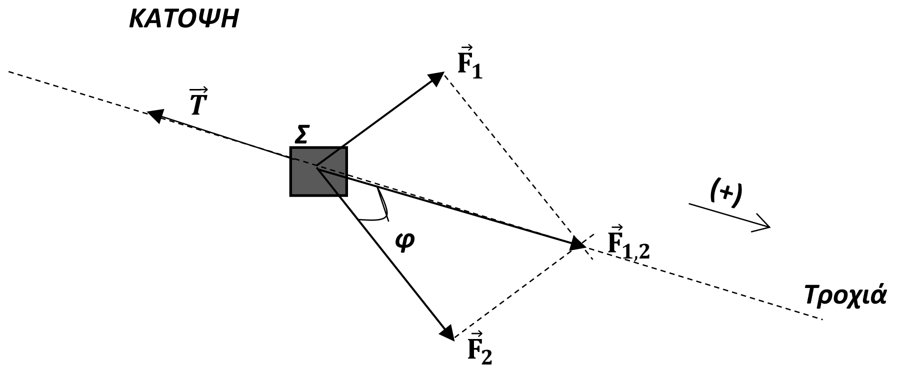
Και από το νόμο της τριβής, υπολογίζουμε το συντελεστή τριβής ολίσθησης κύβου δαπέδου:

$$T = \mu \cdot N_2 \text{ ή } \mu = \frac{T}{N_2} = \frac{4}{40} = 0{,}1$$

Μονάδες 5

Θέμα 4

Ενδεικτική Λύση



4.1) Για να συνθέσουμε τις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ εφαρμόζουμε τον κανόνα του παραλληλογράμμου και η διαγώνιος του, που έχει κοινή αρχή με τα διανύσματα των δυνάμεων που συνθέτουμε έχει μέτρο:

$$F_{1,2} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} \text{ ή } F_{1,2} = 10N$$

$$\text{Και } εφφ = \frac{F_1}{F_2} = \frac{3}{4} \text{ (κατεύθυνση)}$$

Μονάδες 5

4.2) Θεωρώντας ότι στο σώμα δεν ασκείται τριβή, εφαρμόζουμε τον 2^ο νόμο του Newton στη διεύθυνση της συνιστάμενης των $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$:

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}, \text{ ή σύμφωνα με τη θετική φορά,}$$

$$F_{1,2} = m \cdot a \text{ ή } α = 10m/s^2$$

Αυτό είναι άτοπο σύμφωνα με την εκφώνηση καθώς δίνεται ότι το σώμα μετά την t_o κινείται με σταθερή επιτάχυνση μέτρου $α_1 = 2m/s^2$. Οπότε στο Σ ασκείται τριβή στη διεύθυνση της τροχιάς, αντίρροπη της $\vec{F}_{1,2}$ και μέτρου που υπολογίζεται από την εφαρμογή του 2^{ου} νόμου του Newton με σεβασμό στη θετική φορά που έχει τεθεί:

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}_1 \text{ ή } F_{1,2} - T = m \cdot a_1 \text{ ή } T = F_{1,2} - m \cdot a_1 \text{ ή } T = 8N$$

Μονάδες 6

4.3) Μέχρι τη χρονική στιγμή $t_1 = 4s$ το Σ εκτελεί ευθύγραμμα ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση έχοντας διανύσει διάστημα:

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot a_1 \cdot {t_1}^2 = 16m$$

και έχοντας αποκτήσει ταχύτητα μέτρου:

$$υ_1 = α_1 \cdot t_1 = 8m/s$$

Μονάδες 2

Εφόσον οι δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ παύουν να ασκούνται, το Σ δέχεται πλέον μόνο την τριβή. Για να υπολογίσουμε την επιτάχυνση του Σ, σε αυτό το τμήμα της διαδρομής του, εφαρμόζουμε τον 2ο νόμο του Newton στον άξονα της κίνησης :

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}_2, \text{ ή σύμφωνα με τη θετική φορά,}$$

$$-T = m \cdot a_2 \text{ ή } -8N = (1kg) \cdot a_2 \text{ ή } a_2 = -8m/s^2$$

Άρα η επιτάχυνση του Σ έχει μέτρο $8m/s^2$ και αρνητική φορά. Εφόσον τα διανύσματα της επιτάχυνσης και της ταχύτητας είναι αντίρροπα η κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη.

Μονάδες 2

Από την εξίσωση της ταχύτητας, υπολογίζεται η χρονική διάρκεια Δt αυτής της κίνησης:

$$\upsilon = \upsilon_0 + a_2 \cdot \Delta t \text{ ή ή } 0 = 8 - 8 \cdot \Delta t \text{ ή } \Delta t = 1s$$

Και στη συνέχεια η χρονική στιγμή της ακινητοποίησης:

$$\Delta t = 1s \text{ ή } (t_2 - t_1) = 1s \text{ ή } t_2 = 5s$$

Το Σ κατά την επιβραδυνόμενη κίνηση διανύει διάστημα:

$$S_2 = \upsilon_o \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \cdot \alpha_2 \cdot \Delta t^2 \text{ ή } (\Gamma\Delta) = \left(8 \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 1^2\right) m$$

$$\text{ή } S_2 = 4\, m.$$

Άρα το συνολικό διάστημα που διάνυσε το Σ από τη χρονική στιγμή $t_o = 0$ έως τη στιγμή που ακινητοποιείται είναι:

$$S_{o\lambda} = S_1 + S_2 = 16m + 4m = 20m$$

Μονάδες 3

4.4) Το έργο της δύναμης $\vec{F}_2$ για το χρονικό διάστημα που ασκείται στο Σ, υπολογίζεται σύμφωνα με τον ορισμό ως εξής:

$$W_{F_2} = \left|\vec{F}_2\right| \cdot |\Delta \vec{x}_1| \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi \ (1)$$

Μονάδες 3

$$\text{Όμως } |\Delta \vec{x}_1| = S_1 = 16\, m\ \kappa\alpha\iota\ \sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{F_2}{F_{1,2}} = \frac{8}{10} = 0{,}8$$

Μονάδες 3

Άρα η (1) γίνεται:

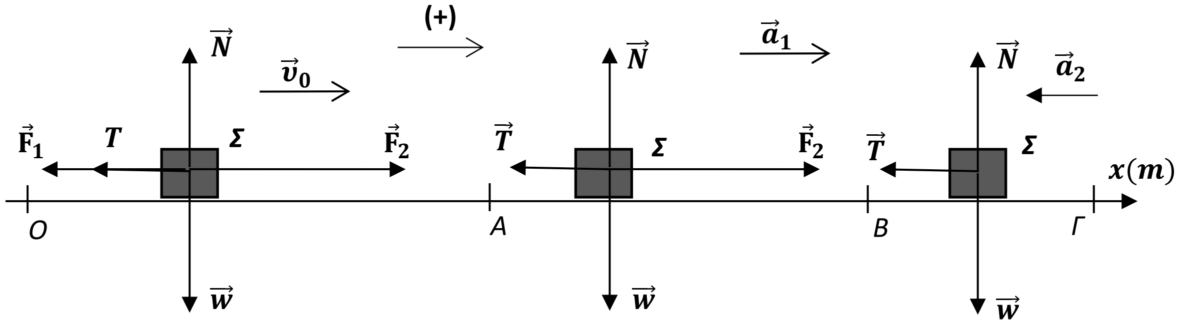
$$W_{F_2} = \left|\vec{F}_2\right| \cdot |\Delta \vec{x}_1| \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi = (8 \cdot 16 \cdot 0{,}8)J = 102{,}4J$$

Μονάδα 1

13710

Θέμα 4

Ενδεικτική Λύση



Στο σχήμα έχουν σχεδιαστεί όλες οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα στις τρεις διαδοχικές κινήσεις που εκτελεί, ενώ έχει ληφθεί ως θετική η φορά της ταχύτητας.

4.1) Στη διαδρομή (ΟΑ) το Σ εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση. Εφαρμόζουμε τον 1^{ο} νόμο του Newton στον άξονα της κίνησης για να υπολογίσουμε το μέτρο της τριβής, ενώ η κατεύθυνση της έχει σχεδιαστεί στο σχήμα:

$$\sum \vec{F} = 0 \text{ ή } F_2 - F_1 - T = 0 \text{ ή } T = 2N$$

Στον κατακόρυφο άξονα ισχύει επίσης ο 1^{ος} νόμος του Newton, οπότε:

$$\sum \vec{F}_y = 0 \text{ ή } \vec{N} + \vec{w} = 0 \text{ ή } N = w = m \cdot g = 20\ N$$

Μονάδες 4

Από το νόμο της τριβής, υπολογίζουμε το συντελεστή τριβής ολίσθησης μεταξύ σώματος και οριζοντίου επιπέδου:

$$T_1 = \mu \cdot N \text{ ή } \mu = \frac{T}{N} = \frac{2}{20} = 0{,}1$$

Μονάδες 2

4.2) Στη διαδρομή (ΑΒ) το Σ εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα $\vec{\upsilon}_0$. Εφαρμόζουμε τον 2^{ο} νόμο του Newton στον άξονα της κίνησης για να υπολογίσουμε την τιμή της επιτάχυνσης $\vec{\alpha}_1$, ενώ η κατεύθυνση της έχει σχεδιαστεί στο σχήμα:

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}_1, \text{ ή}$$

$$F_2 - T = m \cdot a_1 \text{ ή } \alpha_1 = \frac{F_2 - T}{m} = \frac{(8-2)N}{2kg} = 3m/s^2$$

Η μετατόπιση το Σ από τη θέση Α στη θέση Β είναι ίση με:

$$\Delta x_{AB} = x_B - x_A = (32 - 16)m = 16m$$

Μονάδες 2

Από την εξίσωση της μετατόπισης στην ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση υπολογίζουμε τη χρονική της διάρκεια Δt_1:

$$\Delta x_{AB} = \upsilon_0 \cdot \Delta t_1 + \frac{1}{2} \cdot a_1 \cdot {\Delta t_1}^2 \text{ ή } 16 = 5 \cdot \Delta t_1 + 1{,}5 \cdot {\Delta t_1}^2 \; (S.I)$$

$$\text{ή } \; 1{,}5 \cdot {\Delta t_1}^2 + 5 \cdot \Delta t_1 - 16 = 0 \; (S.I)(1)$$

Η διακρίνουσα της δευτεροβάθμιας εξίσωσης (1) είναι:

$$\Delta = (+5)^2 - 4 \cdot 1{,}5 \cdot (-16) = 121$$

Οι λύσεις της (1) είναι:

$$\Delta t_1 = \frac{-5 + \sqrt{121}}{2 \cdot 1{,}5} = 2s \; (\delta\varepsilon\kappa\tau\acute{\eta}) \text{ ή}$$

$$\Delta t_1 = \frac{-5 - \sqrt{121}}{2 \cdot 1{,}5} = -\frac{16}{3} s \; (\alpha\pi o\rho\rho\acute{\iota}\pi\tau\varepsilon\tau\alpha\iota)$$

Μονάδες 3

Η μετατόπιση του Σ από τη θέση Ο στη θέση Α είναι ίση με:

$$\Delta x_{OA} = x_A - x_O = (16 - 0)m = 16m$$

Οπότε η χρονική στιγμή t_1 που το σώμα διέρχεται από το Α θα είναι:

$$\upsilon_o = \frac{\Delta x_{OA}}{\Delta t} \text{ ή } 5m/s = \frac{16m}{t_1 - 0} \text{ ή } t_1 = 3{,}2s$$

Ενώ η χρονική στιγμή t_2 που το σώμα διέρχεται από το Β θα είναι:

$$\Delta t_1 = t_2 - t_1 \text{ ή } t_2 = \Delta t_1 + t_1 = 5{,}2s$$

Μονάδες 2

4.3) Την χρονική στιγμή t_2 που το σώμα διέρχεται από το Β η ταχύτητα του θα είναι:

$$\upsilon_1 = \upsilon_0 + \alpha_1 \cdot \Delta t_1 = (5 + 3 \cdot 2)m/s = 11m/s$$

Στη διαδρομή (ΒΓ) το Σ εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα $\vec{\upsilon}_1$. Εφαρμόζουμε τον 2° νόμο του Newton στον άξονα της κίνησης για να υπολογίσουμε την τιμή της επιβράδυνσης $\overrightarrow{\alpha_2}$, ενώ η κατεύθυνση της έχει σχεδιαστεί στο σχήμα:

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}_2, \text{ ή}$$

$$-T = m \cdot a_2 \text{ ή } \alpha_2 = \frac{-T}{m} = \frac{(-2)N}{2kg} = -1m/s^2$$

Μονάδες 3

Από την εξίσωση της ταχύτητας στην ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση υπολογίζουμε τη χρονική της διάρκεια Δt_2:

$$\upsilon_\Gamma = \upsilon_1 + \alpha_2 \cdot \Delta t_2 \text{ή } 0 = \frac{11m}{s} - \left(\frac{1m}{s^2}\right) \cdot \Delta t_2 \text{ή } \Delta t_2 = 11s$$

Από την εξίσωση της μετατόπισης στην ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση υπολογίζουμε τη μετατόπιση $\Delta\vec{x}_{B\Gamma}$ και στην συνέχεια τη θέση και τη χρονική στιγμή t_3 της ακινητοποίησης του Σ:

$$\Delta x_{B\Gamma} = \upsilon_1 \cdot \Delta t_2 - \frac{1}{2} \cdot a_2 \cdot {\Delta t_2}^2 \text{ ή } \Delta x_{B\Gamma} = (11 \cdot 11 - 0{,}5 \cdot 11^2)m \text{ ή } \Delta x_{B\Gamma} = 60{,}5m$$

Όπου,

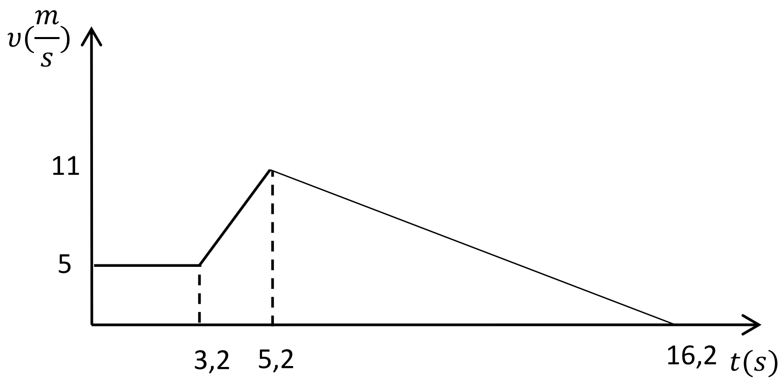
$$\Delta x_{B\Gamma} = x_\Gamma - x_B \text{ ή } 60{,}5m = x_\Gamma - 32m \text{ ή } x_\Gamma = 92{,}5\, m$$

$$\text{Και } \Delta t_2 = t_3 - t_2 \text{ ή } 11s = t_3 - 5{,}2s \text{ ή } t_3 = 16{,}2s$$

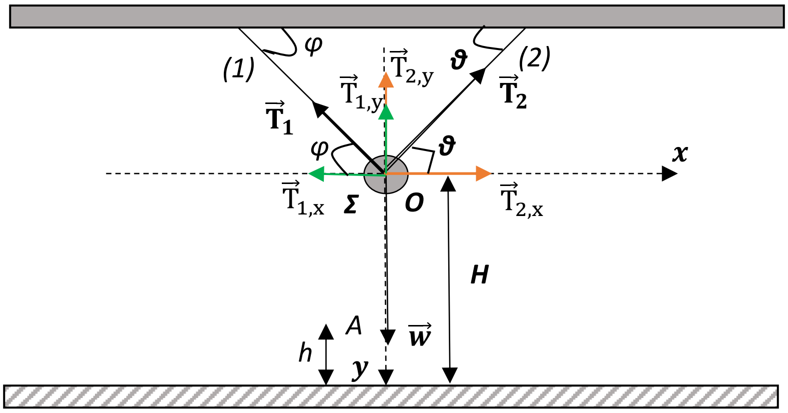
Μονάδες 4

4.4) Αξιοποιώντας αποτελέσματα που υπολογίστηκαν στα προηγούμενα ερωτήματα, κατασκευάζουμε τη γραφική παράσταση της ταχύτητας του σώματος σε συνάρτηση με το χρόνο από τη χρονική στιγμή $t_o = 0$ έως τη στιγμή που το σώμα ακινητοποιείται.

Μονάδες 5



Θέμα 4



4.1) Στο σχήμα έχουν σχεδιαστεί όλες τις δυνάμεις που ασκούνται στην σφαίρα κατά την ισορροπία της. Επίσης θεωρήθηκε ορθογώνιο σύστημα αξόνων xOy, όπου η αρχή Ο ταυτίζεται με τη θέση της σφαίρας Σ. Στη συνέχεια οι τάσεις των νημάτων $\vec{T}_1$ και $\vec{T}_2$ έχουν αναλυθεί σε συνιστώσες στο επιλεγμένο σύστημα αξόνων. Οι γωνίες με το όνομα φ είναι μεταξύ τους ίσες ως εντός εναλλάξ και το ίδιο ισχύει για τις γωνίες με το όνομα ϑ. Στον οριζόντιο άξονα ισχύει ο 1^{ος} νόμος του Newton, οπότε λαμβάνοντας ως θετική τη φορά που φαίνεται στο σχήμα:

$$\sum \vec{F}_x = 0 \text{ ή } \vec{T}_{1,x} + \vec{T}_{2,x} = 0 \text{ ή } T_{2,x} - T_{1,x} = 0 \text{ ή}$$

$$T_2 \cdot συνθ = T_1 \cdot συνφ \text{ ή } T_2 = \frac{T_1 \cdot συνφ}{συνθ} \text{ ή } T_2 = \frac{60 \cdot 0{,}8}{0{,}6} N = 80N$$

Μονάδες 6

4.2) Στον κατακόρυφο άξονα ισχύει επίσης ο 1^{ος} νόμος του Newton, οπότε λαμβάνοντας ως θετική τη φορά που φαίνεται στο σχήμα:

$$\sum \vec{F}_y = 0 \text{ ή } \vec{w} + \vec{T}_{1,y} + \vec{T}_{2,y} = 0 \text{ ή } w - T_{2,y} - T_{1,y} = 0 \text{ ή}$$

$$m \cdot g = T_2 \cdot ημθ + T_1 \cdot ημφ \text{ ή } m = \frac{T_2 \cdot ημθ + T_1 \cdot ημφ}{g} \text{ ή } m = \frac{80 \cdot 0{,}8 + 60 \cdot 0{,}6}{10} kg$$

$$\text{ή } m = 10\ kg$$

Μονάδες 6

4.3) Έστω η θέση Α που απέχει απόσταση h από το οριζόντιο δάπεδο, στην οποία η κινητική ενέργεια της σφαίρας είναι τετραπλάσια από τη βαρυτική δυναμική της ενέργεια, δηλαδή:

$$4 \cdot U_A = K_A$$

Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας στις θέσεις Ο και Α:

$$E_O = E_A \text{ ή } m \cdot g \cdot H = K_A + U_A \text{ ή } m \cdot g \cdot H = 5 \cdot U_A \text{ ή } m \cdot g \cdot H = 5 \cdot m \cdot g \cdot h$$

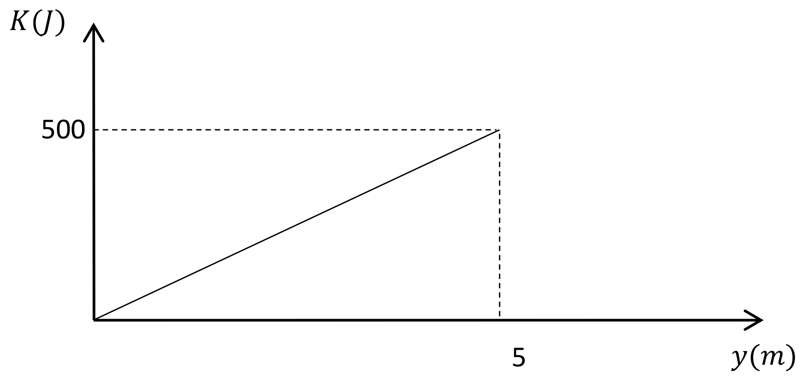
$$\text{ή } h = \frac{H}{5} = 1m$$

Μονάδες 7

4.4) Κατά την πτώση ισχύει η αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας:

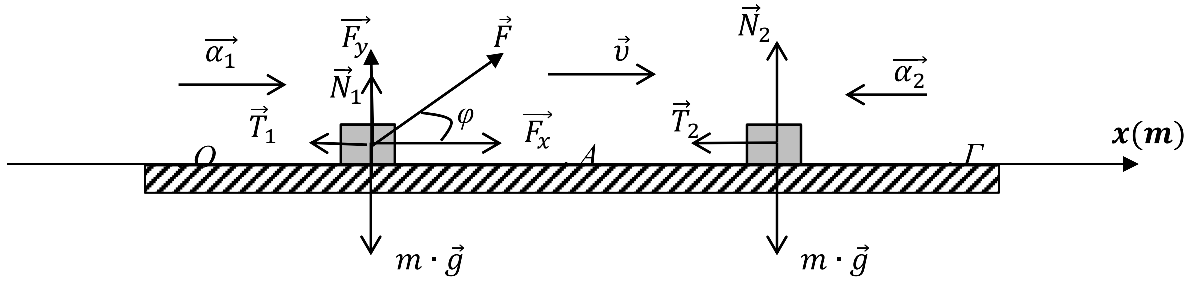
$$E = K + U \text{ ή } K = E - U \text{ ή } K = m \cdot g \cdot H - m \cdot g \cdot (H - y) = 100y, \gamma\iota\alpha\ 0 \leq y \leq 5\ m$$

Με βάση την παραπάνω συνάρτηση κατασκευάζουμε τη γραφική παράσταση *K* = *f* (*y*):



ΘΕΜΑ 4

Ενδεικτική λύση



4.1) Στο σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στον κύβο τόσο στο τμήμα της διαδρομής (ΟΑ) όπου ασκείται η $\vec{F}$ όσο και στη διαδρομή (ΑΓ) όπου η $\vec{F}$ έχει καταργηθεί.

Διαδρομή (ΟΑ)

Η $\vec{F}$ έχει αναλυθεί σε συνιστώσες σε οριζόντιο και κατακόρυφο άξονα και τα μέτρα τους υπολογίζονται ως εξής:

$$F_y = F \cdot ημφ = 10 \cdot 0{,}6\,N = 6\,N$$
$$F_x = F \cdot συνφ = 10 \cdot 0{,}8\,N = 8N$$

Μονάδες 2

Στον κατακόρυφο άξονα ισχύει ο 1^{ος} νόμος του Newton, οπότε:

$$\sum \vec{F}_y = 0 \text{ ή } \vec{N}_1 + \vec{w} + \vec{F}_y = 0 \text{ ή } N_1 + F_y = w$$
$$\text{ή } N_1 = m \cdot g - F_y \text{ ή } N_1 = (10-6)N = 4N$$

Και από το νόμο της τριβής, υπολογίζουμε το μέτρο της σε αυτήν τη διαδρομή:

$$T_1 = μ \cdot N_1 \text{ ή } T_1 = 0{,}5 \cdot 4N = 2N$$

Μονάδες 2

Στη συνέχεια εφαρμόζουμε τον 2^{ο} νόμο του Newton στον οριζόντιο άξονα:

$\sum \vec{F}_x = m \cdot \vec{a}_1$, ή, λαμβάνοντας ως θετική τη φορά της ταχύτητας,

$$F_x - T_1 = m \cdot a_1 \text{ ή } a_1 = \frac{F_x - T_1}{m} \text{ ή } a_2 = \frac{8\,N - 2N}{1\,kg} \text{ ή } a_1 = 6\,m/s^2$$

Άρα ο κύβος στη διαδρομή (ΟΑ) εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με επιτάχυνση που έχει μέτρο 6 m/s^2 και κατεύθυνση ομόρροπη της ταχύτητας.

Μονάδες 2

4.2) Αρχικά εφαρμόζοντας την εξίσωση της ταχύτητας στην διαδρομή (ΟΑ) υπολογίζουμε την τιμή της ταχύτητας τη χρονική στιγμή t_1, όπου η $\vec{F}$ καταργείται:

$$υ_1 = υ_o + α_1 \cdot Δt_1 \text{ ή } υ_1 = υ_o + α_1 \cdot (t_1 - t_0) \text{ ή } υ_1 = \big((1 + 6 \cdot (2-0)\big)m/s$$
$$υ_1 = 13m/s$$

Μονάδες 2

Διαδρομή (ΑΓ)

Η $\vec{F}$ έχει καταργηθεί και στον οριζόντιο άξονα ασκείται μόνο η τριβή η οποία όμως έχει αλλάξει μέτρο, καθώς έχει αλλάξει το μέτρο της κάθετης δύναμης επαφής. Συγκεκριμένα στον κατακόρυφο άξονα ισχύει ο 1^{ος} νόμος του Newton, οπότε:

$$\sum \vec{F}_y = 0 \text{ ή } \vec{N}_2 + \vec{w} = 0 \text{ ή } N_2 = w$$

$$\text{ή } N_2 = m \cdot g \text{ ή } N_2 = 10N$$

Από το νόμο της τριβής, υπολογίζουμε το μέτρο της σε αυτήν τη διαδρομή:

$$T_2 = \mu \cdot N_2 \text{ ή } T_1 = 0{,}5 \cdot 10N = 5N$$

Μονάδες 2

Στη συνέχεια εφαρμόζουμε τον 2^{ο} νόμο του Newton στον οριζόντιο άξονα:

$\sum \vec{F}_x = m \cdot \vec{a}_1$, ή λαμβάνοντας ως θετική τη φορά της ταχύτητας,

$$-T_2 = m \cdot a_2 \text{ ή } a_2 = \frac{-T_2}{m} \text{ ή } a_2 = \frac{-5N}{1\,kg} \text{ ή } a_2 = -5\,m/s^2$$

Άρα, ο κύβος στη διαδρομή (ΑΓ) εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση με επιτάχυνση που έχει μέτρο 5 m/s^2 και κατεύθυνση αντίρροπη της ταχύτητας. Τελικά εφαρμόζοντας την εξίσωση της ταχύτητας στην διαδρομή (ΑΓ) υπολογίζουμε τη χρονική διάρκεια της επιβραδυνόμενης κίνησης και τη χρονική στιγμή t_2 που ο κύβος ακινητοποιείται:

$$\upsilon = \upsilon_o + \alpha_2 \cdot \Delta t_1 \text{ ή } \upsilon_\Gamma = \upsilon_1 + \alpha_2 \cdot \Delta t_2 \text{ ή } 0 = \frac{13m}{s} - 5 \cdot \Delta t_2$$

$$\Delta t_2 = 2{,}6\,s \text{ ή } \Delta t_2 = t_2 - t_1 \text{ ή } t_2 = 4{,}6\,s$$

Μονάδες 3

4.3) Το έργο της τριβής από τη χρονική $t_0 = 0$ έως τη χρονική στιγμή που ο κύβος ακινητοποιείται υπολογίζεται με τη βοήθεια του ορισμού του έργου σταθερής δύναμης:

$$W_T = |\vec{T}_1| \cdot |\Delta\vec{x}_{OA}| \cdot \sigma\upsilon\nu 180^o + |\vec{T}_2| \cdot |\Delta\vec{x}_{A\Gamma}| \cdot \sigma\upsilon\nu 180^o = -T_1 \cdot \Delta x_1 - T_2 \cdot \Delta x_2 \ (1)$$

Μονάδες 2

Εφαρμόζοντας την εξίσωση της μετατόπισης στη διαδρομή (ΟΑ) υπολογίζουμε:

$$\Delta x_1 = \upsilon_o \cdot \Delta t_1 + \frac{1}{2} \cdot \alpha_1 \cdot \Delta t^2 \text{ ή } \Delta x_1 = \left(1 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2^2\right) m$$

$$\text{ή } \Delta x_1 = 14\,m.$$

Μονάδες 2

Αντίστοιχα, εφαρμόζοντας την εξίσωση της μετατόπισης στη διαδρομή (ΑΓ), υπολογίζουμε:

$$\Delta x_2 = \upsilon_1 \cdot \Delta t_2 + \frac{1}{2} \cdot \alpha_2 \cdot \Delta {t_2}^2 \text{ ή } \Delta x_2 = \left(13 \cdot 2{,}6 - \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 2{,}6^{\,2}\right) m$$

$$\text{ή } \Delta x_2 = 16{,}9\,m.$$

Μονάδες 2

Τέλος, αντικαθιστώντας τις μετατοπίσεις στην (1), υπολογίζουμε:

$$W_T = -(2 \cdot 14 + 5 \cdot 16{,}9)J = -112{,}5J$$

Μονάδα 1

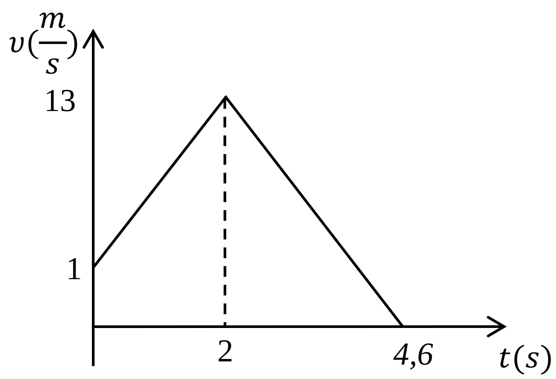
4.4) Η εξίσωση της ταχύτητας για τη διαδρομή (ΟΑ) είναι:

$$\upsilon = \upsilon_o + \alpha_1 \cdot t \text{ ή } \upsilon = 1 + 6 \cdot t \; (S.I), \gamma\iota\alpha \; 0 \leq t \leq 2s$$

Και αντίστοιχα για τη διαδρομή (ΑΓ):

$$\upsilon = \upsilon_o + \alpha_2 \cdot (t-2) \text{ ή } \upsilon = 13 - 5 \cdot (t-2)(S.I), \gamma\iota\alpha \; 2s \leq t \leq 4{,}6s$$

Και στη συνέχεια απεικονίζεται το ζητούμενο διάγραμμα για $0 \leq t \leq 4{,}6 \; s$:



Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 4

Ενδεικτική Λύση

4.1) Το εμβαδό που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης *υ = f(t)* και του άξονα των χρόνων είναι αριθμητικά ίσο με τη μετατόπιση στο αντίστοιχο χρονικό διάστημα. Συγκεκριμένα:

$$\Gamma\iota\alpha\ 0 \le t \le 5s, \Delta x_1 = \frac{\frac{(5+10)m}{s} \cdot 5s}{2} = 37{,}5\ m$$

$$K\alpha\acute{\iota}\ \gamma\iota\alpha\ 5s < t \le 10s, \Delta x_2 = 10m/s \cdot (10-5)s = 50\ m$$

Άρα η μετατόπιση του σώματος από τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ έως τη χρονική στιγμή $t = 10s$ θα είναι:

$\Delta x_{0\to 10s} = \Delta x_1 + \Delta x_2 = 87{,}5\ m$ και θα βρίσκεται στη θέση:

$\Delta x_{0\to 10s} = x - x_o$ ή $x = 92{,}5\ m$

Μονάδες 6

4.2) Όπως στο ερώτημα 4.1 υπολογίζονται οι μετατοπίσεις για τα χρονικά διαστήματα $10s \to 15s$ και $15s \to 20s$ αντλώντας πληροφορίες από το διάγραμμα:

$$\Gamma\iota\alpha\ 10s < t \le 15s, \Delta x_3 = \frac{10m/s \cdot (15-10)s}{2} = 25\ m$$

$$K\alpha\iota\ \gamma\iota\alpha\ 15s < t \le 20s, \Delta x_4 = \frac{-\frac{10m}{s} \cdot (20-15)s}{2} = -25\ m$$

Το συνολικό διάστημα που διανύει το σώμα στο χρονικό διάστημα $0 \to 20\ s$ θα είναι:

$$S_{o\lambda} = |\Delta x_1| + |\Delta x_2| + |\Delta x_3| + |\Delta x_4| = (37{,}5 + 50 + 25 + 25)m = 137{,}5m$$

Και η μέση ταχύτητα του σώματος:

$$\upsilon_\mu = \frac{S_{o\lambda}}{t_{o\lambda}} = \frac{137{,}5m}{20s} = 6{,}875m/s$$

Μονάδες 6

4.3) Αντλώντας πληροφορίες από το διάγραμμα υπολογίζουμε την τιμή της επιτάχυνσης και την τιμή της συνισταμένης δύναμης για κάθε ένα από τα επιμέρους χρονικά διαστήματα:

α) $\Gamma\iota\alpha\ 0 \le t \le 5s, \alpha_1 = \frac{\Delta\upsilon}{\Delta t} = \frac{10-5}{5-0}\ m/s^2 = 1m/s^2$

Με εφαρμογή του 2^{ου} νόμου του Newton:

$$\sum F = m \cdot \alpha_1 = +1N$$

Η κίνηση του σώματος είναι ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη με αρχική ταχύτητα.

β) $\Gamma\iota\alpha\ 5s < t \le 10s, \alpha_2 = \frac{\Delta\upsilon}{\Delta t} = \frac{10-10}{10-5}\ m/s^2 = 0\ m/s^2$

Με εφαρμογή του 2ου νόμου του Newton:

$$\sum F = m \cdot \alpha_2 = 0$$

Η κίνηση του σώματος είναι ευθύγραμμη ομαλή με σταθερή ταχύτητα μέτρου $10m/s$.

γ) $Για\ 10s < t \le 15s, \alpha_3 = \frac{\Delta\upsilon}{\Delta t} = \frac{0-10}{15-10}\frac{m}{s^2} = -2\,m/s^2$

Με εφαρμογή του 2ου νόμου του Newton:

$$\sum F = m \cdot \alpha_3 = -2N$$

Η κίνηση του σώματος είναι ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη και τη χρονική στιγμή $t = 15s$ η ταχύτητα μηδενίζεται.

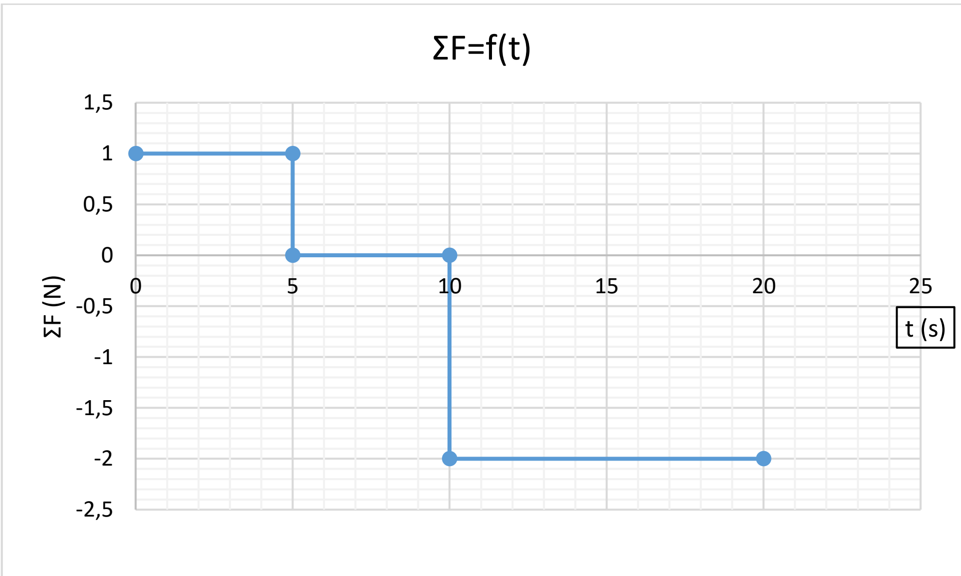
δ) $Για\ 15s < t \le 20s, \alpha_4 = \frac{\Delta\upsilon}{\Delta t} = \frac{-10-0}{20-15}\frac{m}{s^2} = -2\,m/s^2$

Με εφαρμογή του 2ου νόμου του Newton:

$$\sum F = m \cdot \alpha_4 = -2N$$

Παρατηρούμε ότι η τιμή της επιτάχυνσης και της συνισταμένης δύναμης δεν αλλάζει σε σχέση με την περίπτωση γ). Όμως αλλάζει το είδος της κίνησης αφού αλλάζει η φορά κίνησης (αρνητική ταχύτητα). Μετά την $t = 15s$ *η κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη.*

Αξιοποιώντας τους παραπάνω υπολογισμούς κατασκευάζουμε την γραφική παράσταση της τιμής της συνισταμένης δύναμης $\sum \vec{F}$ που ασκείται στο σώμα σε συνάρτηση με το χρόνο, από τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ έως τη χρονική στιγμή $t = 20\ s$:



Μονάδες 7

4.4) Το έργο της συνισταμένης δύναμης $\sum \vec{F}$, από τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ έως τη χρονική στιγμή $t = 20\ s$ υπολογίζεται από το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας:

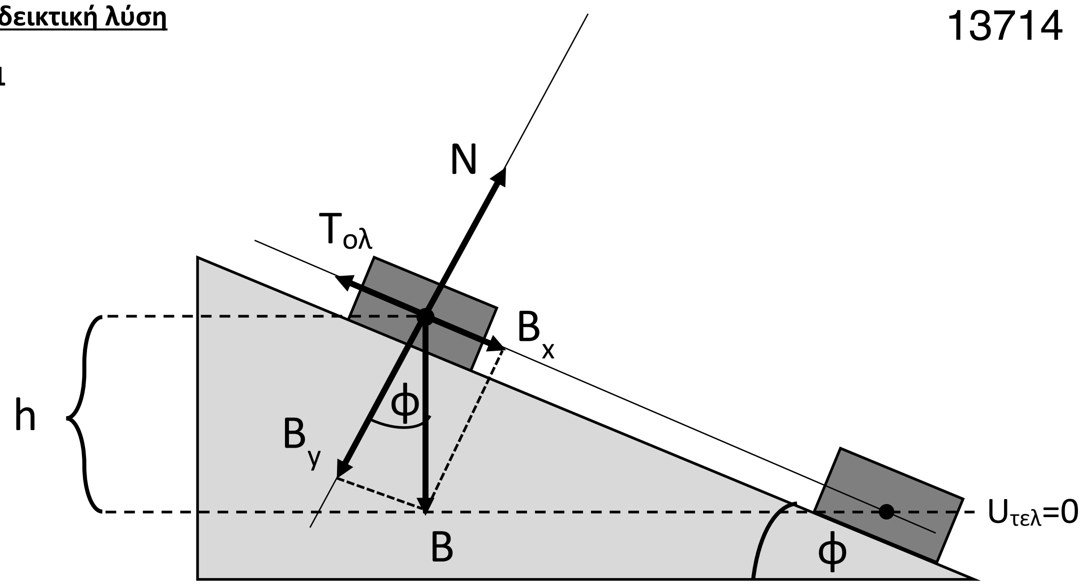
$$W_{\Sigma F} = K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \upsilon_{\tau\varepsilon\lambda}^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot \upsilon_{\alpha\rho\chi}^2 =$$

$$\left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (-10)^2 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (+5)^2\right) J = 37{,}5 J$$

Μονάδες 6

Ενδεικτική λύση 13714

4.1



Σχεδιασμός δυνάμεων ανάλυση σε άξονες: (***Μονάδες 4***)

Υπολογίζουμε την επιτάχυνση με την οποία το κιβώτιο θα κατέβαινε κινούμενο κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου **αν δεν υπήρχε** δύναμη τριβής ολίσθησης.

$$\Sigma F_x = m \cdot a_1 \Rightarrow m \cdot g \cdot \eta\mu 30^0 = m \cdot a_1 \Rightarrow \boldsymbol{a_1 = 5\ \frac{m}{s^2}}$$

Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος, το κιβώτιο ολισθαίνει με επιτάχυνση $\boldsymbol{a = 2\ \frac{m}{s^2} < a_1}$**, άρα** δέχεται δύναμη τριβής ολίσθησης.

(***Μονάδες 4***)

4.2

$$\Sigma F_x = m \cdot a \Rightarrow m \cdot g \cdot \eta\mu 30^0 - T_{o\lambda} = m \cdot \alpha \Rightarrow T_{o\lambda} = m \cdot g \cdot \eta\mu 30^0 - m \cdot \alpha$$

$$\Rightarrow T_{o\lambda} = 1\ \mathrm{kg} \cdot 10 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot \frac{1}{2} - 1\ kg \cdot\ 2 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \Rightarrow \boldsymbol{T_{o\lambda} = 3\ \mathrm{N}}$$

(***Μονάδες 4***)

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N - m \cdot g \cdot \sigma\upsilon\nu 30^0 = 0 \Rightarrow N = 1\ \mathrm{kg} \cdot 10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \boldsymbol{N = 5\sqrt{3}\ \mathrm{N}\ (1)}$$

(Μονάδες 2)

$$T_{o\lambda} = \mu \cdot N \overset{(1)}{\Rightarrow} \mu = \frac{T}{N} \Rightarrow \boldsymbol{\mu = \frac{\sqrt{3}}{5}}$$ ***(Μονάδες 2)***

4.3

Για το έργο του Βάρους: $W_B = W_{Bx} = m \cdot g \cdot \eta\mu 30^0 \cdot x \Rightarrow W_B = 1\ \mathrm{kg} \cdot 10 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4\ \mathrm{m} \Rightarrow \boldsymbol{W_B = 20\ \mathrm{J}}$

(Μονάδες 2)

Για τη μεταβολή της Δυναμικής Ενέργειας:

$\Delta U = U_{\tau\varepsilon\lambda} - U_{\alpha\rho\chi} = 0 - m \cdot g \cdot h = -m \cdot g \cdot x \cdot \ \eta\mu 30^0 \Rightarrow \boldsymbol{\Delta U} = \mathbf{-20\ J}$ ***(Μονάδες 2)***

Από τα παραπάνω αποτελέσματα προκύπτει : $\boldsymbol{W_B} = -\ \boldsymbol{\Delta U}$ αναμενόμενο, καθώς για το έργο κάθε **συντηρητικής δύναμης**, όπως το βάρος ισχύει: $\boldsymbol{W_{\sigma\upsilon\nu\tau}} = U_{\alpha\rho\chi} - U_{\tau\varepsilon\lambda} = -\ \boldsymbol{\Delta U}$ ***(Μονάδα 1)***

4.4

Από την εφαρμογή του Θ.Μ.Κ.Ε. για την μετατόπιση των $4m$ κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου προκύπτει:

$$K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = W_B + W_{T o\lambda} \Rightarrow \frac{1}{2} m \cdot \upsilon^2 - 0 = W_B - T_{o\lambda} \cdot x \Rightarrow \frac{1}{2} 1\ \mathrm{Kg} \cdot \upsilon^2 = 20\ \mathrm{J} - 3\ \mathrm{N} \cdot 4\ \mathrm{m} \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon} = \mathbf{4}\ \frac{\mathbf{m}}{\mathbf{s}}$$

(Μονάδες 4)

2.1

2.1.Α Σωστή η απάντηση (γ).

Ενδεικτική αιτιολόγηση

2.1.Β Για σώμα που εκτελεί ελεύθερη πτώση από ύψος *h*, ο χρόνος πτώσης υπολογίζεται από την εξίσωση κίνησης:

$$h = \frac{1}{2} g \cdot t^2 \quad \text{ή} \quad t = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}} \; (1)$$

(Μονάδες 2)

και η ταχύτητα που θα έχει το σώμα αφού διανύσει ύψος *h*, από το σημείο που αφέθηκε ελεύθερο, υπολογίζεται από την εξίσωση ταχύτητας:

$$\upsilon = g \cdot t = g \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}} = \sqrt{2 \cdot g \cdot h} \, (2)$$

(Μονάδες 2)

Εφαρμόζοντας κατάλληλα την εξίσωση (2) για το σφυρί, υπολογίζουμε τη σχέση των μέτρων των ταχυτήτων του σφυριού ακριβώς πριν ακουμπήσει στην επιφάνεια της Γης, υ_{Γ} και της Σελήνης, υ_{Σ}:

$$\upsilon_{\Gamma} = \sqrt{2 \cdot g_{\Gamma} \cdot h} = \sqrt{2 \cdot 6 \cdot g_{\Sigma} \cdot h} = \sqrt{6} \cdot \sqrt{2 \cdot g_{\Sigma} \cdot h} = \sqrt{6} \cdot \upsilon_{\Sigma} \; (3)$$

(Μονάδες 2)

Άρα αξιοποιώντας την σχέση (3) των ταχυτήτων, υπολογίζεται και η σχέση μεταξύ των κινητικών ενεργειών στη Γη, K_{Γ} και στη Σελήνη, K_{Σ} αντίστοιχα:

$$K_{\Gamma} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \upsilon_{\Gamma}^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot 6 \cdot \upsilon_{\Sigma}^2 = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot m \cdot \upsilon_{\Sigma}^2 = 6 \cdot K_{\Sigma}$$

(Μονάδες 2)

2.2

2.2.Α Σωστή η απάντηση (β).

Ενδεικτική αιτιολόγηση

2.2.Β Έστω ότι η βαλίτσα διανύει το διάστημα *(ΑΓ)* σε χρονικό διάστημα Δt_1 και το διάστημα *(ΓΒ)* σε χρονικό διάστημα Δt_2. Για τη σχέση των διαστημάτων σύμφωνα με την εκφώνηση ισχύει:

$$(A\Gamma) = (\Gamma B) = \frac{d}{2}$$

Η βαλίτσα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση με ταχύτητα σταθερού μέτρου υ_1 στο *(ΑΓ)* και ταχύτητα επίσης σταθερού μέτρου, $\upsilon_2 = 2 \cdot \upsilon_1$ στο *(ΓΒ)*. Άρα από την εξίσωση κίνησης υπολογίζουμε τα χρονικά διαστήματα κίνησης ως εξής:

$$(A\Gamma) = \frac{d}{2} = \upsilon_1 \cdot \Delta t_1 \text{ ή } \Delta t_1 = \frac{d}{2 \cdot \upsilon_1} (1) \text{ και } (\Gamma B) = \frac{d}{2} = \upsilon_2 \cdot \Delta t_2 \text{ ή } \Delta t_2 = \frac{d}{2 \cdot \upsilon_2} \text{ ή } \Delta t_2 = \frac{d}{4 \cdot \upsilon_1} (2)$$

(Μονάδες 5)

Τέλος από τον ορισμό της μέσης ταχύτητας υπολογίζουμε:

$$\upsilon_\mu = \frac{S_{o\lambda}}{\Delta t_{o\lambda}} = \frac{(A\Gamma) + (\Gamma B)}{\Delta t_1 + \Delta t_2} = \frac{d}{\frac{d}{2 \cdot \upsilon_1} + \frac{d}{4 \cdot \upsilon_1}} = \frac{d}{\frac{2 \cdot d}{4 \cdot \upsilon_1} + \frac{d}{4 \cdot \upsilon_1}} = \frac{d}{\frac{3 \cdot d}{4 \cdot \upsilon_1}} = \frac{4 \cdot \upsilon_1}{3}$$

(Μονάδες 4)

2.1

2.1.Α Σωστή η απάντηση (β).

<u>Ενδεικτική αιτιολόγηση</u>

2.1.Β Για σώμα που εκτελεί ελεύθερη πτώση από ύψος h, ο χρόνος πτώσης υπολογίζεται από την εξίσωση κίνησης:

$$h = \frac{1}{2} g \cdot t^2 \quad ή \quad t = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}} \ (1)$$

Μονάδες 2

Εφαρμόζοντας κατάλληλα την εξίσωση (1) για το σφυρί, για την περίπτωση που αυτό πέφτει ελεύθερα στη Γη από ύψος h_1 από την επιφάνεια του εδάφους και για την περίπτωση του αστροναύτη που άφησε το σφυρί από ύψος h_2 από την επιφάνεια της Σελήνης, απαιτώντας οι χρόνοι πτώσης να είναι ίδιοι υπολογίζουμε:

$$t_1 = t_2 \text{ ή } \sqrt{\frac{2 \cdot h_1}{g_Γ}} = \sqrt{\frac{2 \cdot h_2}{g_Σ}} \text{ ή } \sqrt{\frac{2 \cdot h_1}{6 \cdot g_Σ}} = \sqrt{\frac{2 \cdot h_2}{g_Σ}} \text{ ή } \frac{h_1}{6 \cdot g_Σ} = \frac{h_2}{g_Σ} \text{ ή } h_1 = 6 \cdot h_2,$$

όπου t_1 και t_2 οι χρόνοι πτώσης στη Γη και στη Σελήνη αντίστοιχα.

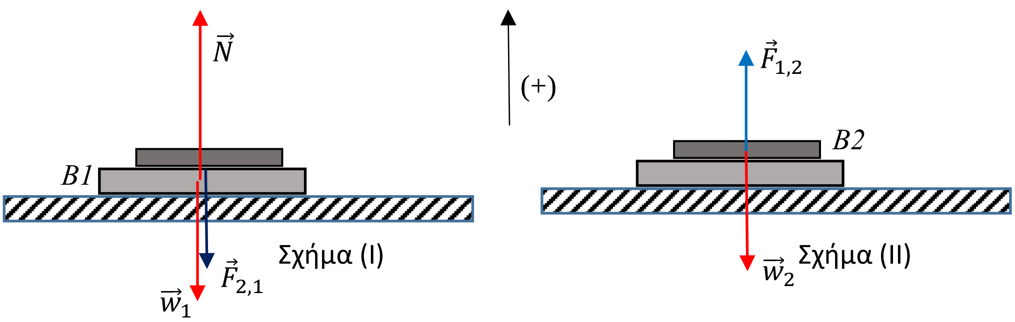
Μονάδες 6

2.2

2.2.Α Σωστή η απάντηση (γ).

<u>Ενδεικτική αιτιολόγηση</u>

2.2.Β



Στο 1ο βιβλίο (Β1) ασκούνται το βάρος από τη Γη $\vec{w}_1$, η κάθετη δύναμη επαφής $\vec{N}$ από το θρανίο και η κάθετη δύναμη επαφής $\vec{F}_{2,1}$ από το 2ο βιβλίο (Β2).

Μονάδα 1

Στο 2ο βιβλίο (Β2) ασκούνται το βάρος από τη Γη $\vec{w}_2$ και η κάθετη δύναμη επαφής $\vec{F}_{1,2}$ από το 1ο βιβλίο (Β1).

Μονάδα 1

Οι δυνάμεις $\vec{F}_{2,1}$ και $\vec{F}_{1,2}$ ασκούνται σε διαφορετικά σώματα και ικανοποιούν τον 3ο νόμο του Newton, καθώς:

$\vec{F}_{1,2} = -\vec{F}_{2,1}$ και για τα μέτρα τους ισχύει:

$$F_{1,2} = F_{2,1} = F \ (1)$$

Μονάδες 2

Εφαρμόζουμε τον 1ο νόμο του Newton για κάθε βιβλίο:

1ο Βιβλίο (Β1): $\sum \vec{F} = 0$ ή $\vec{w}_1 + \vec{N} + \vec{F}_{2,1} = 0$ ή $N = w_1 + F \ (2)$

Μονάδες 2

2ο Βιβλίο (Β2): $\sum \vec{F} = 0$ ή $\vec{w}_2 + \vec{F}_{1,2} = 0$ ή $F - w_2 = 0$ ή $F = w_2 (3)$

Μονάδες 2

Όμως $m_1 = 2 \cdot m_2$ ή $m_1 \cdot g = 2 \cdot m_2 \cdot g$ ή $w_1 = 2 \cdot w_2 \ (4)$

Άρα η εξίσωση (2) τροποποιείται με κατάλληλη χρήση των εξισώσεων (3) και (4) σε:

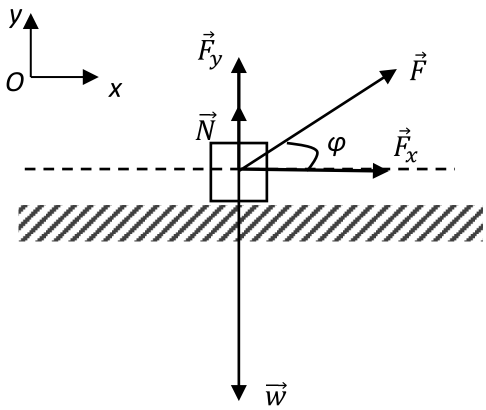
$N = w_1 + F$ ή $N = 2 \cdot w_2 + F$ ή $N = 2 \cdot F + F$ ή $N = 3 \cdot F$

Μονάδα 1

ΘΕΜΑ 2

2.1.Α Σωστή η απάντηση β)

2.1.Β



Ενδεικτική Αιτιολόγηση

Στο σώμα ασκούνται η δύναμη του βάρους $\vec{w}$, η κάθετη δύναμης επαφής $\vec{N}$ και η δύναμη $\vec{F}$. Το μέτρο της $\vec{F}$ αυξάνεται γραμμικά με το χρόνο, άρα αρχικά (*t=0*) είναι μηδέν και κάποια μεταγενέστερη χρονική στιγμή (πριν την απώλεια επαφής) οι δυνάμεις απεικονίζονται στο διπλανό σχήμα. Η δύναμη $\vec{F}$ αναλύεται σε συνιστώσες στον άξονα της κίνησης του σώματος και σε κατακόρυφο άξονα. Για τα μέτρα των συνιστωσών ισχύει:

$$F_x = F \cdot \sigma\upsilon\nu\theta = 0{,}8 \cdot F (1)$$
$$F_y = F \cdot \eta\mu\theta = 0{,}6 \cdot F (2)$$

Μονάδες 3

Στον κατακόρυφο άξονα από τη στιγμή της εκκίνησης ως τη στιγμή που χάνεται η επαφή το σώμα ισορροπεί, άρα ισχύει ο 1ος νόμος του Newton:

$$\sum \vec{F}_y = 0 \text{ ή } \vec{F}_y + \vec{N} + \vec{w} = 0 \text{ ή } F_y + N - w = 0 \text{ ή } 0{,}6 \cdot F + N = w \ (3)$$

Μονάδες 2

Για να υπάρχει επαφή μεταξύ σώματος και δαπέδου πρέπει να ικανοποιείται η συνθήκη:

$$N \geq 0, (4)$$

Μονάδες 2

Τη στιγμή που χάνεται η επαφή ισχύει $N = 0$, οπότε η (3) γίνεται:

$$0{,}6 \cdot F = w$$

Μονάδα 1

2.2

2.2.Α Σωστή απάντηση είναι η (α).

2.2.Β

Ενδεικτική Αιτιολόγηση

Εφόσον δεν υπάρχουν πληροφορίες για τη συνάρτηση της δύναμης αντίστασης από τον αέρα, ο μόνος τρόπος να εκτιμήσουμε το ύψος είναι να υπολογίσουμε το εμβαδό που περικλείεται από τη γραφική παράσταση και τον άξονα των χρόνων. Σύμφωνα με την κλίμακα το κάθε «κουτάκι» έχει εμβαδό που είναι αριθμητικά ίσο με:

$$(0{,}6 \cdot 0{,}2)\frac{m}{s} \cdot s = 0{,}12\ m$$

Και κάτω από τη γραφική παράσταση περικλείονται περίπου 498 «κουτάκια», οπότε:

$$(498 \cdot 0{,}12)m = 59{,}76\ m \cong 60m$$

Σημείωση: Στο ερώτημα δεν μας ενδιαφέρει η ακρίβεια με την οποία θα μετρηθούν τα κουτάκια αλλά η μέθοδος που θα ακολουθηθεί για να εκτιμηθεί το ύψος πτώσης. Όσοι μαθητές ακολουθήσουν τη σωστή μέθοδο και εκτιμήσουν το ύψος πτώσης μεταξύ 57 m και 63 m (475 έως 525 «κουτάκια), να βαθμολογηθούν με όλες τις μονάδες.

2.1

2.1.A Σωστή η απάντηση (γ).

Ενδεικτική αιτιολόγηση

2.1.B

Το εμβαδό που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης και του άξονα του χρόνου είναι αριθμητικά ίσο με τη μεταβολή της ταχύτητας του σώματος. Οπότε:

$$\Delta\upsilon = \left(\frac{0{,}06 \cdot 12}{2}\right) m/s = 0{,}36\ m/s$$

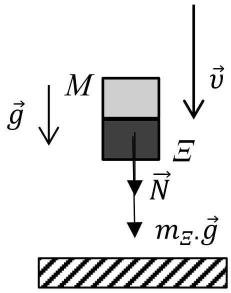
(Μονάδες 8)

2.2

2.2.A Σωστή η απάντηση (β).

Ενδεικτική αιτιολόγηση

2.2.B



Έστω $\vec{N}$ η δύναμη που ασκεί το (Μ) στο (Ξ) κατά την πτώση. Η αυθαίρετη φορά της φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Τα σώματα που εκτελούν ελεύθερη πτώση πέφτουν με την επιτάχυνση της βαρύτητας ($\vec{\alpha} = \vec{g}$) (Μονάδες 5). Εφαρμόζουμε τον 2° νόμο του Newton για το (Ξ), θεωρώντας ως θετική τη φορά της ταχύτητας:

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{\alpha} \text{ ή } N + m \cdot g = m \cdot g \text{ ή } N = 0$$

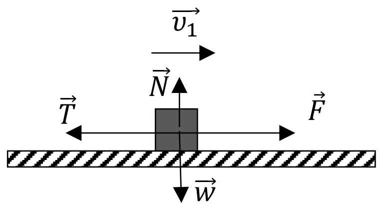
(Μονάδες 8)

Παρατήρηση : Στο ίδιο συμπέρασμα θα οδηγηθεί ένας μαθητής που ενδέχεται αρχικά να θεωρήσει ότι η $\vec{N}$ έχει φορά προς τα επάνω.

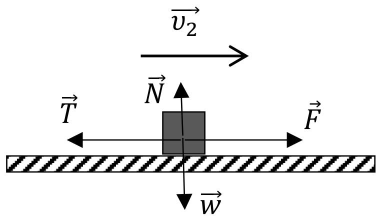
2.1

2.1.Α Σωστή η απάντηση (α).

<u>Ενδεικτική αιτιολόγηση</u>



1η Δοκιμή



2η Δοκιμή

Εφόσον για τις ανάγκες της άσκησης χρησιμοποιείται ο ίδιος ομογενής κύβος και η κίνηση του γίνεται πάντα στον ίδιο οριζόντιο πάγκο εργασίας, ο συντελεστής τριβής ολίσθησης δεν αλλάζει καθώς εξαρτάται από τη φύση των επιφανειών που τρίβονται και όχι από την ταχύτητα κίνησης της μίας πάνω στην άλλη.

Μονάδες 2

Στον κατακόρυφο άξονα, ισχύει ο 1ος νόμος του Newton, οπότε:

$$\sum \vec{F_y} = 0 \text{ ή } \vec{N} + \vec{w} = 0 \text{ ή } N = w$$

Και από το νόμο της τριβής,

$$T_1 = T_2 = \mu \cdot N \ (1)$$

Μονάδες 4

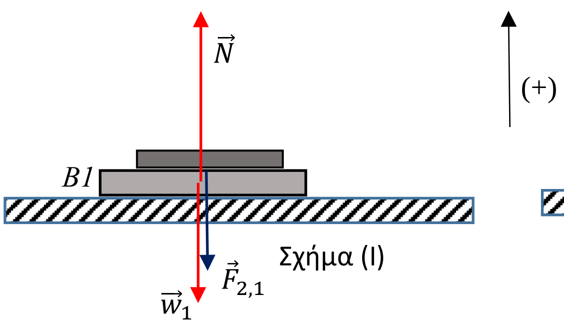
Παρατηρούμε ότι το μέτρο της τριβής ολίσθησης παραμένει σταθερό καθώς ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μ και η κάθετη δύναμη επαφής $\vec{N}$ δεν αλλάζουν.

Μονάδες 2

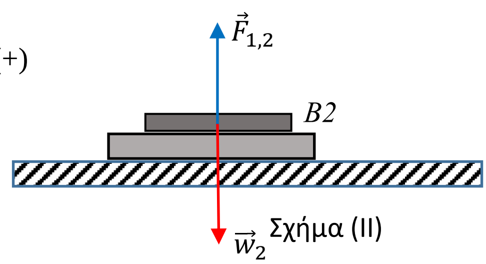
2.2

2.2.Α Σωστή η απάντηση (β).

2.2.Β <u>Ενδεικτική αιτιολόγηση</u>



Σχήμα (I)



Σχήμα (II)

Στο 1ο βιβλίο (Β1) ασκούνται το βάρος από τη Γη $\vec{w}_1$, η κάθετη δύναμη επαφής $\vec{N}$ από το θρανίο και η κάθετη δύναμη επαφής $\vec{F}_{2,1}$ από το 2ο βιβλίο (Β2).

Μονάδα 1

Στο 2ο βιβλίο (Β2) ασκούνται το βάρος από τη Γη $\vec{w}_2$ και η κάθετη δύναμη επαφής $\vec{F}_{1,2}$ από το 1ο βιβλίο (Β1).

Μονάδα 1

Οι δυνάμεις $\vec{F}_{2,1}$ και $\vec{F}_{1,2}$ ασκούνται σε διαφορετικά σώματα και ικανοποιούν τον 3ο νόμο του Newton, καθώς:

$\vec{F}_{1,2} = -\vec{F}_{2,1}$ και για τα μέτρα τους ισχύει:

$$F_{1,2} = F_{2,1} = F \ (1)$$

και $N = 3 \cdot F$ (2)

Μονάδες 2

Εφαρμόζουμε τον 1ο νόμο του Newton για κάθε βιβλίο:

1ο Βιβλίο (Β1): $\sum \vec{F} = 0$ ή $\vec{w}_1 + \vec{N} + \vec{F}_{2,1} = 0$ ή $N = w_1 + F$ ή $3 \cdot F = w_1 + F$

ή $w_1 = 2 \cdot F$ (3)

Μονάδες 2

2ο Βιβλίο (Β2): $\sum \vec{F} = 0$ ή $\vec{w}_2 + \vec{F}_{1,2} = 0$ ή $F - w_2 = 0$ ή $F = w_2 (4)$

Από (3) και (4) $w_1 = 2 \cdot w_2 \ (5)$

Μονάδες 2

Οπότε,

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{m_1 \cdot g}{m_2 \cdot g} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{2}{1}$$

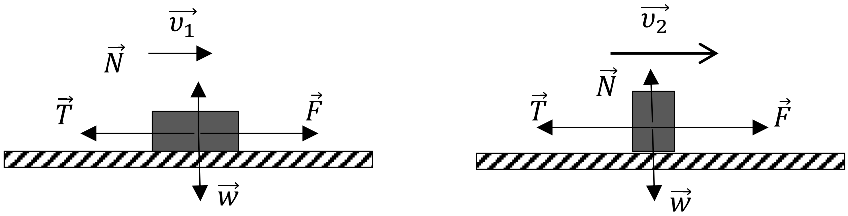
Μονάδα 1

2.1

2.1.A Σωστή η απάντηση (β).

<u>Ενδεικτική αιτιολόγηση</u>

2.1.B



1η Δοκιμή *2η Δοκιμή*

Εφόσον σε όλες τις δοκιμές της άσκησης χρησιμοποιείται ο ίδιος κύβος, που είναι ομογενής, δηλ. όλες οι επιφάνειές του είναι κατασκευασμένες από το ίδιο υλικό και η κίνηση του γίνεται πάντα στον ίδιο οριζόντιο πάγκο εργασίας, ο συντελεστής τριβής ολίσθησης δεν αλλάζει καθώς εξαρτάται από τη φύση των επιφανειών που τρίβονται και όχι από τα εμβαδά των επιφανειών που έρχονται σε μακροσκοπική επαφή.

Μονάδες 2

Στον κατακόρυφο άξονα, ισχύει ο 1ος νόμος του Newton, οπότε:

$$\sum \vec{F}_y = 0 \text{ ή } \vec{N} + \vec{w} = 0 \text{ ή } N = w$$

ανεξάρτητα από τον προσανατολισμό του σώματος.

Και από το νόμο της τριβής,

$$T_1 = T_2 = \mu \cdot N \;(1)$$

Μονάδες 4

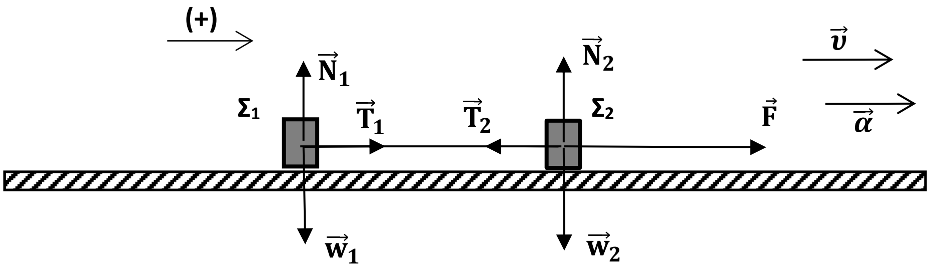
Παρατηρούμε ότι το μέτρο της τριβής ολίσθησης δεν αλλάζει καθώς ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μ και η κάθετη δύναμη επαφής $\vec{N}$ δεν αλλάζουν.

Μονάδες 2

2.2

2.2.A Σωστή η απάντηση (α).

<u>Ενδεικτική αιτιολόγηση</u>



Στο παραπάνω σχήμα φαίνονται οι δυνάμεις που ασκούνται στο κάθε σώμα. Αφού τα σώματα έχουν ίσες μάζες θέτουμε:

$$m_1 = m_2 = m$$

Επίσης λόγω αβαρούς και μη εκτατού νήματος ισχύει:

$$T_1 = T_2 = T$$

Μονάδα 1

Εφαρμόζουμε τον 2ο νόμο του Newton στον άξονα της κίνησης για το σύστημα:

$\sum \vec{F} = m_{ολ} \cdot \vec{α}$, ή λαμβάνοντας ως θετική τη φορά του σχήματος,

$F + T_1 - T_2 = (m_1 + m_2) \cdot α$, ή $F = 2 \cdot m \cdot α$ ή $α = \frac{F}{2 \cdot m}$

Μονάδες 4

Εφαρμόζουμε τον 2ο νόμο του Newton στον άξονα της κίνησης για το $Σ_1$,

$\sum \vec{F} = m_{ολ} \cdot \vec{α}$, ή λαμβάνοντας ως θετική τη φορά του σχήματος,

$T_1 = m_1 \cdot α$ ή $T_1 = m \cdot \frac{F}{2 \cdot m}$ ή $F = 2 \cdot T_1$

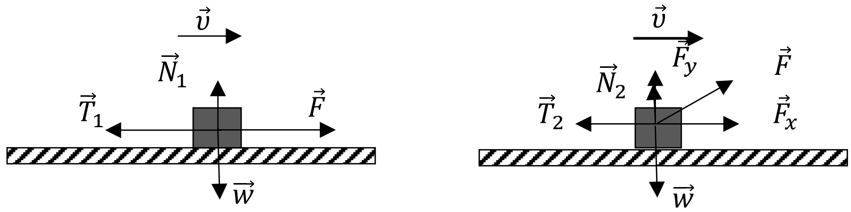
Μονάδες 4

13776

2.1

2.1.Α Σωστή η απάντηση (γ).

2.1.Β <u>Ενδεικτική αιτιολόγηση</u>



1η Δοκιμή *2η Δοκιμή*

Στο παραπάνω σχήμα, έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στον κύβο στις δύο πειραματικές δοκιμές των μαθητών. Στην 2η δοκιμή η δύναμη $\vec{F}$ έχει αναλυθεί σε συνιστώσες σε οριζόντιο και κατακόρυφο άξονα αντίστοιχα, οι οποίες έχουν μέτρα:

$$F_x = F \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi = 0{,}6 \cdot F, \text{ και}$$
$$F_y = F \cdot \eta\mu\varphi = 0{,}8 \cdot F,$$

Μονάδες 2

Στον οριζόντιο άξονα, ισχύει ο 1ος νόμος του Newton, οπότε:

<u>1η Δοκιμή</u>

$$\sum \vec{F}_x = 0 \text{ ή } \vec{F} + \vec{T}_1 = 0 \text{ ή } F = T_1 \ (1)$$

Μονάδες 2

<u>2η Δοκιμή</u>

$$\sum \vec{F}_x = 0 \text{ ή } \vec{F}_x + \vec{T}_2 = 0 \text{ ή } F_x = T_2 = 0{,}6 \cdot F \ (2)$$

Μονάδες 2

Από τις (1) και (2) προκύπτει:

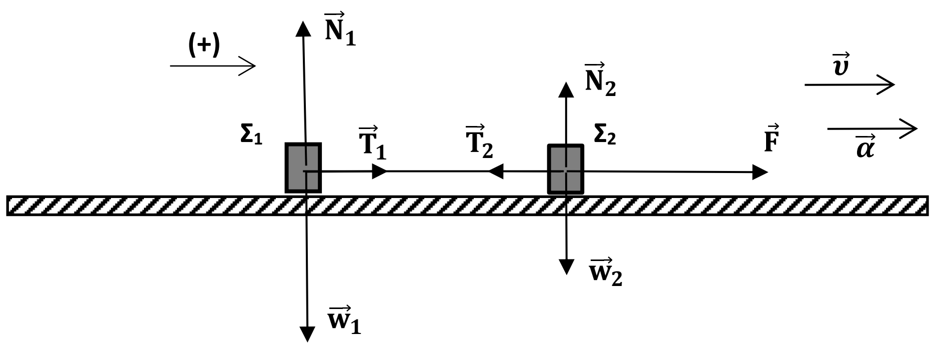
$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{F}{0{,}6 \cdot F} = \frac{5}{3}$$

Μονάδες 2

2.2

2.2.Α Σωστή η απάντηση (γ).

2.2.Β <u>Ενδεικτική αιτιολόγηση</u>



Στο παραπάνω σχήμα φαίνονται οι δυνάμεις που ασκούνται στο κάθε σώμα.

Επίσης λόγω αβαρούς και μη εκτατού νήματος ισχύει:

$$T_1 = T_2 = T$$

Μονάδα 1

Εφαρμόζουμε τον 2ο νόμο του Newton στον άξονα της κίνησης για το σύστημα:

$\sum \vec{F} = m_{ολ} \cdot \vec{a}$, ή λαμβάνοντας ως θετική τη φορά του σχήματος,

$F + T_1 - T_2 = (m_1 + m_2) \cdot a$, ή $F = 4 \cdot m_2 \cdot a$ ή $\alpha = \frac{F}{4 \cdot m_2}$

Μονάδες 4

Εφαρμόζουμε τον 2ο νόμο του Newton στον άξονα της κίνησης για το $Σ_1$,

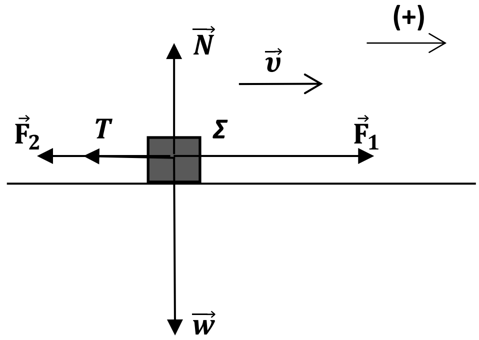
$\sum \vec{F} = m_{ολ} \cdot \vec{a}$, ή λαμβάνοντας ως θετική τη φορά του σχήματος,

$T_1 = m_1 \cdot a$ ή $T_1 = 3 \cdot m_2 \cdot \frac{F}{4 \cdot m_2}$ ή $F = \frac{4}{3} \cdot T_1$

Μονάδες 4

2.1

2.1.Α Σωστή η απάντηση (γ).



2.1.Β <u>Ενδεικτική αιτιολόγηση</u>

Το Σ εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση. Εφαρμόζουμε τον 1ο νόμο του Newton στον άξονα της κίνησης για να υπολογίσουμε το μέτρο της τριβής ολίσθησης, της οποίας η κατεύθυνση έχει σχεδιαστεί στο σχήμα:

$$\sum \vec{F} = 0 \text{ ή } F_1 - F_2 - T = 0 \text{ ή } -F_2 + 3 \cdot F_2 - T = 0 \text{ ή } T = 2 \cdot F_2 \text{ (1)}$$

Στον κατακόρυφο άξονα ισχύει επίσης ο 1ος νόμος του Newton, οπότε:

$$\sum \vec{F}_y = 0 \text{ ή } \vec{N} + \vec{w} = 0 \text{ ή } N = w = m \cdot g \text{ (2)}$$

Μονάδες 4

Από το νόμο της τριβής, υπολογίζουμε το συντελεστή τριβής ολίσθησης μεταξύ σώματος και οριζοντίου επιπέδου:

$$T = \mu \cdot N \text{ ή } \mu = \frac{T}{N} = \frac{2 \cdot F_2}{w} \text{ (3),}$$

Όμως, $F_1 = w$ και $F_1 = 3 \cdot F_2$ οπότε, $w = 3 \cdot F_2$ ή $F_2 = \frac{w}{3}$ (4)

Τέλος, η (3), λόγω της (4), γίνεται:

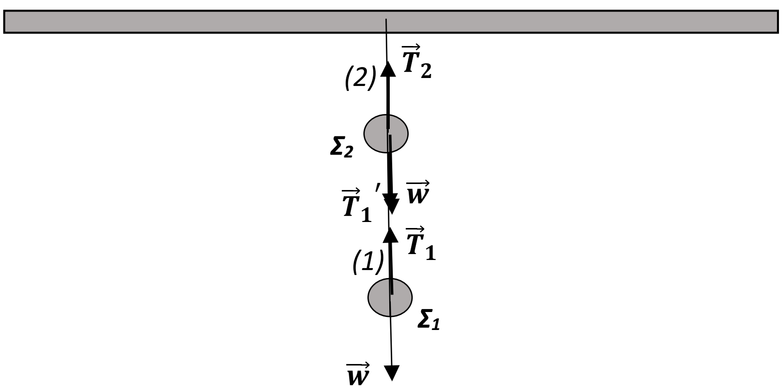
$$\mu = \frac{2 \cdot \frac{w}{3}}{w} = \frac{2}{3}$$

Μονάδες 4

2.2

2.2.Α Σωστή η απάντηση (α).

2.2.Β <u>Ενδεικτική αιτιολόγηση</u>



Στο παραπάνω σχήμα φαίνονται οι δυνάμεις που ασκούνται στο κάθε σώμα.

Μονάδες 3

Επειδή τα σώματα έχουν ίσες μάζες, ισχύει:

$$w_1 = w_2 = w \ (1)$$

Επίσης λόγω αβαρούς και μη εκτατού νήματος για το νήμα (1) ισχύει:

$$T_1 = T_1{'} (2)$$

Εφαρμόζουμε τον 1ο νόμο του Newton στον κατακόρυφο άξονα για το $Σ_1$:

$$\sum \vec{F} = 0$$

ή, λαμβάνοντας ως θετική τη φορά του βάρους,

$$w - T_1 = 0 \ \text{ή} \ T_1 = w \ (3)$$

Μονάδες 3

Εφαρμόζουμε τον 1ο νόμο του Newton στον κατακόρυφο άξονα για το $Σ_2$:

$$\sum \vec{F} = 0$$

ή, λαμβάνοντας ως θετική τη φορά του βάρους,

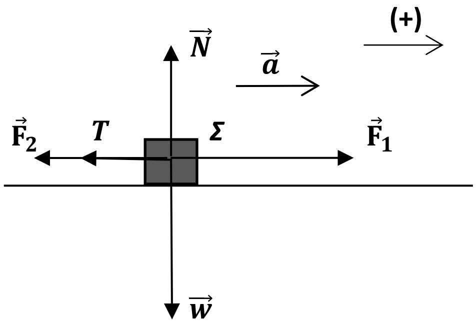
$$w + T_1{'} - T_2 = 0 \text{, ή } w + T_1 = T_2 \text{ ή } T_2 = 2 \cdot w \ (4)$$

Άρα από τις (3) και (4) προκύπτει: $T_2 = 2 \cdot T_1$

Μονάδες 3

2.1

2.1.Α Σωστή η απάντηση (γ).



2.1.Β Ενδεικτική αιτιολόγηση

Το Σ εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση. Εφαρμόζουμε τον 2ο νόμο του Newton στον άξονα της κίνησης για να υπολογίσουμε το μέτρο της τριβής ολίσθησης, της οποίας η κατεύθυνση έχει σχεδιαστεί στο σχήμα:

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a} \text{ ή } F_1 - F_2 - T = m \cdot a \text{ ή } -F_2 + 2 \cdot F_2 - T = m \cdot \frac{g}{5}$$

$$\text{ή } T = F_2 - \frac{w}{5} \ (1)$$

Στον κατακόρυφο άξονα ισχύει επίσης ο 1ος νόμος του Newton, οπότε:

$$\sum \vec{F_y} = 0 \text{ ή } \vec{N} + \vec{w} = 0 \text{ ή } N = w = m \cdot g \ (2)$$

Μονάδες 4

Όμως, $F_1 = w$ και $F_1 = 2 \cdot F_2$ οπότε, $w = 2 \cdot F_2$ ή $F_2 = \frac{w}{2}$ (3)

Οπότε, η (1), λόγω των (2) και (3), γίνεται:

$$T = \frac{w}{2} - \frac{w}{5} \text{ ή } T = \frac{3 \cdot w}{10} \ (4)$$

Από το νόμο της τριβής, υπολογίζουμε το συντελεστή τριβής ολίσθησης μεταξύ σώματος και οριζοντίου επιπέδου:

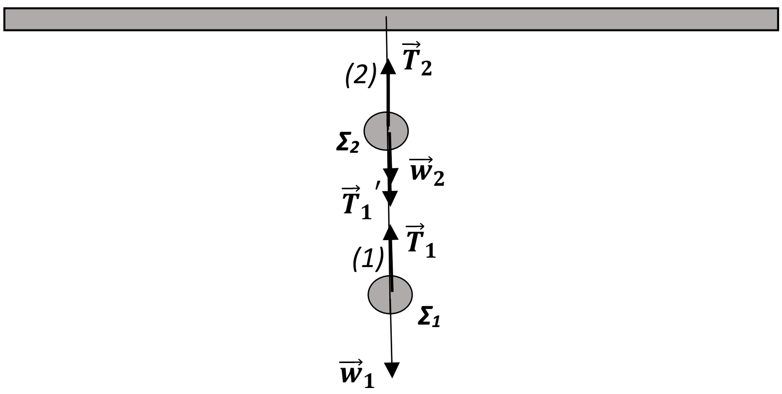
$$T = \mu \cdot N \text{ ή } \mu = \frac{T}{N} = \frac{\frac{3 \cdot w}{10}}{w} = 0{,}3$$

Μονάδες 4

2.2

2.2.Α Σωστή η απάντηση (γ).

2.2.Β Ενδεικτική αιτιολόγηση



Στο παραπάνω σχήμα φαίνονται οι δυνάμεις που ασκούνται στο κάθε σώμα.

Μονάδες 3

Επειδή τα σώματα έχουν μάζες με $m_1 = 2 \cdot m_2$, ισχύει:

$$w_1 = 2 \cdot w_2 \text{ (1)}$$

Επίσης λόγω αβαρούς και μη εκτατού νήματος για το νήμα (1) ισχύει:

$$T_1 = T_1{}' \text{(2)}$$

Εφαρμόζουμε τον 1^{ο} νόμο του Newton στον κατακόρυφο άξονα για το $Σ_1$:

$$\sum \vec{F} = 0$$

ή, λαμβάνοντας ως θετική τη φορά του βάρους,

$$w_1 - T_1 = 0 \text{ ή } T_1 = w_1 \text{ (3)}$$

Μονάδες 3

Εφαρμόζουμε τον 1^{ο} νόμο του Newton στον κατακόρυφο άξονα για το $Σ_2$,

$$\sum \vec{F} = 0$$

ή, λαμβάνοντας ως θετική τη φορά του βάρους,

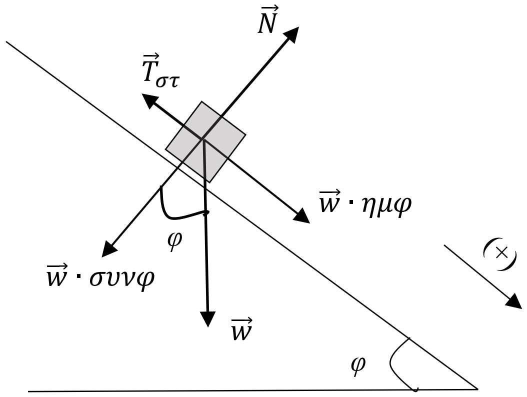
$$w_2 + T_1{}' - T_2 = 0 \text{ , ή } w_2 + T_1 = T_2 \text{ ή } T_2 = w_1 + w_2 \text{ ή } T_2 = 3 \cdot \frac{w_1}{2} \text{ (4)}$$

Άρα από τις (1), (3) και (4) προκύπτει: $\frac{T_1}{T_2} = \frac{2}{3}$

Μονάδες 3

2.1

2.1.Α Σωστή η απάντηση (γ).



2.1.Β Ενδεικτική Αιτιολόγηση

Στο σχήμα φαίνονται όλες οι δυνάμεις που ασκούνται στο κιβώτιο που ισορροπεί στο κεκλιμένο επίπεδο. Η δύναμη του βάρους $\vec{w}$ έχει αναλυθεί σε συνιστώσες σε άξονα παράλληλο και κάθετο στο κεκλιμένο επίπεδο.

Μονάδες 3

Η συνιστώσα του βάρους στον άξονα που έχει την ίδια διεύθυνση με το κεκλιμένο επίπεδο έχει μέτρο:

$$w_x = m \cdot g \cdot ημφ$$

Μονάδες 2

Αφού το σώμα ισορροπεί, στον άξονα που έχει την ίδια διεύθυνση με το κεκλιμένο επίπεδο ισχύει ο $1^{ος}$ νόμος του Newton, οπότε:

$$\sum \vec{F}_x = 0 \text{ ή } \vec{T}_{στ} + \vec{w}_x = 0 \text{ ή } \vec{T}_{στ} = -\vec{w}_x$$

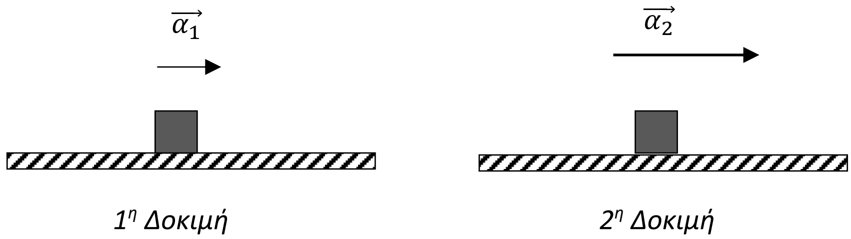
ή, λαμβάνοντας ως θετική τη φορά του σχήματος:

$$T_{στ} = -(+w_x) = -m \cdot g \cdot ημφ$$

Μονάδες 3

2.2

2.2.Α Σωστή η απάντηση (β).



2.2.Β Ενδεικτική Αιτιολόγηση

Ο κύβος και στις δύο δοκιμές εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, χωρίς αρχική ταχύτητα. Από την εξίσωση της ταχύτητας έχουμε:

$$\upsilon = \alpha \cdot \Delta t \ (1)$$

Μονάδες 3

Η χρονική διάρκεια κίνησης μέχρι το σημείο που απαιτείται να υπολογιστεί η κινητική ενέργεια είναι ίδια και στις δύο δοκιμές, οπότε:

$$\Delta t_1 = \Delta t_2 = \Delta t$$

Με τη βοήθεια της (1) το μέτρο της ταχύτητας του κύβου υ_1 μετά από χρόνο Δt στην 1η δοκιμή και το μέτρο της ταχύτητας του κύβου υ_2 μετά από χρόνο επίσης Δt στην 2η δοκιμή, θα συνδέονται με τη σχέση:

$$\upsilon_2 = \alpha_2 \cdot \Delta t = 2 \cdot \alpha_1 \cdot \Delta t = 2 \cdot \upsilon_1$$

Μονάδες 4

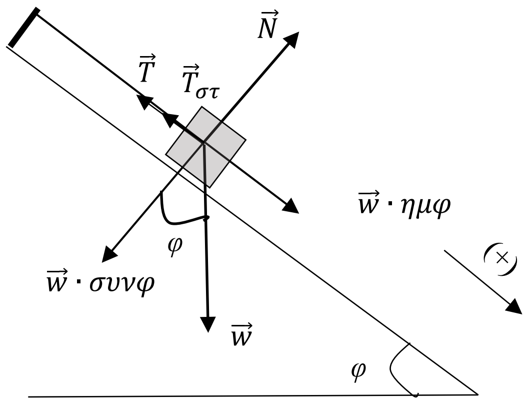
Άρα για τη σχέση των κινητικών ενεργειών θα ισχύει:

$$K_2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \upsilon_2^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (2 \cdot \upsilon_1)^2 = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot m \cdot \upsilon_1^2 = 4 \cdot K_1$$

Μονάδες 2

2.1

2.1.Α Σωστή η απάντηση (γ).



2.1.Β Ενδεικτική Αιτιολόγηση

Στο σχήμα φαίνονται όλες οι δυνάμεις που ασκούνται στο κιβώτιο που ισορροπεί στο κεκλιμένο επίπεδο. Η δύναμη του βάρους $\vec{w}$ έχει αναλυθεί σε συνιστώσες σε άξονα παράλληλο και κάθετο στο κεκλιμένο επίπεδο.

Μονάδες 3

Η συνιστώσα του βάρους στον άξονα που έχει την ίδια διεύθυνση με το κεκλιμένο επίπεδο έχει μέτρο:

$$w_x = m \cdot g \cdot \eta\mu\varphi = 0{,}6 \cdot m \cdot g$$

Μονάδες 2

Στον άξονα που έχει την ίδια διεύθυνση με το κεκλιμένο επίπεδο ισχύει ο 1^{ος} νόμος του Newton, οπότε:

$$\sum \vec{F}_x = 0 \text{ ή } \vec{T}_{\sigma\tau} + \vec{w}_x + \vec{T} = 0 \text{ ή } \vec{T}_{\sigma\tau} = -\vec{T} - \vec{w}_x$$

Λαμβάνοντας ως θετική τη φορά του σχήματος και ότι $T = \frac{w}{2}$ προκύπτει:

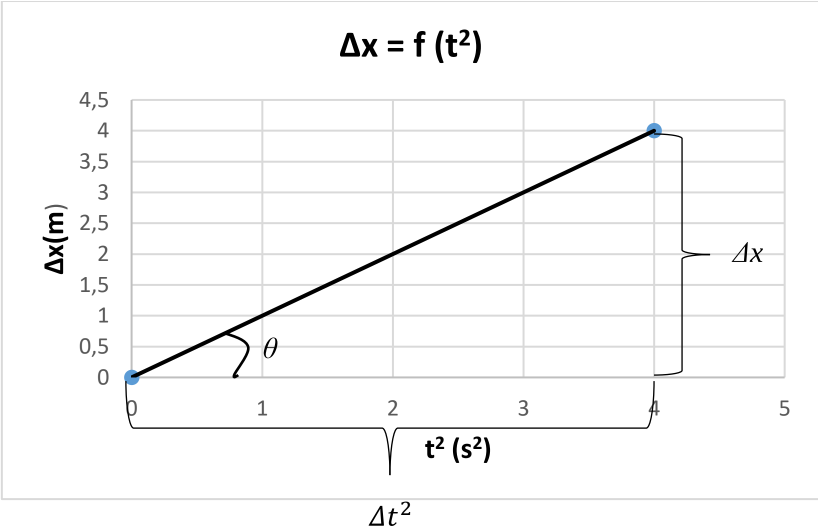
$$T_{\sigma\tau} = -(\frac{-w}{2}) - (+w_x) = -(-0{,}5 \cdot m \cdot g) - (+0{,}6 \ \cdot m \cdot g) = -0{,}1 \cdot m \cdot g$$

Άρα, η στατική τριβή $\vec{T}_{\sigma\tau}$ που ασκείται από το κεκλιμένο επίπεδο στο κιβώτιο έχει μέτρο $T_{\sigma\tau} = \ 0{,}1 \cdot m \cdot g$ και είναι ομόρροπη της $\vec{T}$.

Μονάδες 3

2.2

2.2.Α Σωστή η απάντηση (α).



2.2.Β <u>Ενδεικτική Αιτιολόγηση</u>

Στην ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση χωρίς αρχική ταχύτητα η εξίσωση της μετατόπισης είναι:

$$\Delta x = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2 \text{ (1)}$$

Μονάδες 2

Η κλίση ***Κ*** της καμπύλης στη γραφική παράσταση $\Delta x = f(t^2)$:

$$K = \varepsilon\varphi\theta = \frac{\Delta x}{\Delta t^2} = \frac{4}{4} m/s^2 = 1\ m/s^2 \text{ (2)}$$

Μονάδες 4

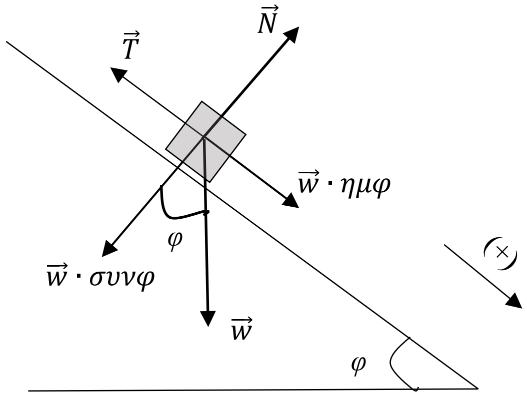
Από τις (1) και (2) προκύπτει:

$$K = \frac{1}{2} \cdot \alpha \text{ ή } \alpha = 2 \cdot K \text{ ή } \alpha = 2\ m/s^2$$

Μονάδες 3

2.1

2.1.Α Σωστή η απάντηση (α).



2.1.Β Ενδεικτική Αιτιολόγηση

Στο σχήμα φαίνονται όλες οι δυνάμεις που ασκούνται στο κιβώτιο που εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση στο κεκλιμένο επίπεδο. Η δύναμη του βάρους $\vec{w}$ έχει αναλυθεί σε συνιστώσες σε άξονα παράλληλο και κάθετο στο κεκλιμένο επίπεδο με μέτρα:

$$w = m \cdot g,$$

$$w_x = m \cdot g \cdot ημφ,$$

$$w_y = m \cdot g \cdot συνφ$$

Μονάδες 2

Στον άξονα που έχει την ίδια διεύθυνση με το κεκλιμένο επίπεδο ισχύει ο 1ος νόμος του Newton, οπότε:

$$\sum \vec{F}_x = 0 \text{ ή } \vec{w}_x + \vec{T} = 0$$

Λαμβάνοντας ως θετική τη φορά του σχήματος προκύπτει:

$$w_x - T = 0 \text{ ή } w_x = T \text{ ή } T = m \cdot g \cdot ημφ \text{ (1)}$$

Μονάδες 2

Στον άξονα που έχει διεύθυνση κάθετη στο κεκλιμένο επίπεδο ισχύει επίσης ο 1ος νόμος του Newton, οπότε:

$$\sum \vec{F}_y = 0 \text{ ή } \vec{w}_y + \vec{N} = 0$$

Λαμβάνοντας ως θετική τη φορά της $\vec{w}_y$:

$$w_y - N = 0 \text{ ή } w_y = N \text{ ή } N = m \cdot g \cdot συνφ \text{ (2)}$$

Μονάδες 2

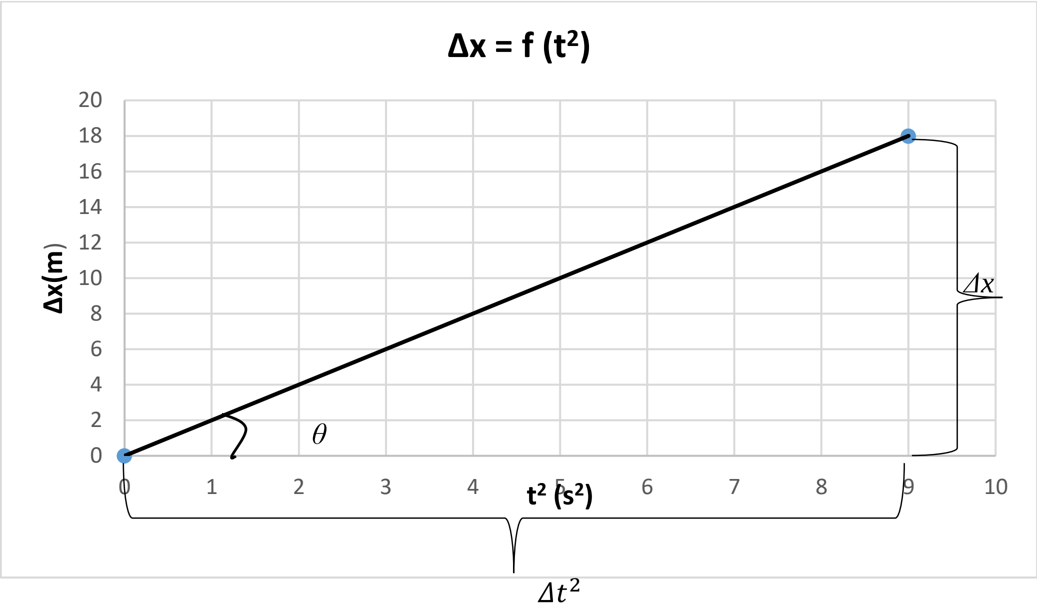
Από το νόμο της τριβής, αξιοποιώντας τις (1) και (2), υπολογίζουμε τον συντελεστή τριβής ολίσθησης μεταξύ κιβωτίου και κεκλιμένου επιπέδου $μ$:

$$T = μ \cdot N \text{ ή } μ = \frac{T}{N} \text{ ή } μ = \frac{m \cdot g \cdot ημφ}{m \cdot g \cdot συνφ} \text{ ή } μ = εφφ$$

Μονάδες 2

2.2

2.2.Α Σωστή η απάντηση (γ).



2.2.Β Ενδεικτική Αιτιολόγηση

Στην ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση χωρίς αρχική ταχύτητα η εξίσωση της μετατόπισης είναι:

$$\Delta x = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \ (1)$$

Μονάδες 2

Η κλίση ***Κ*** της καμπύλης στη γραφική παράσταση $\Delta x = f(t^2)$:

$$K = \varepsilon\varphi\theta = \frac{\Delta x}{\Delta t^2} = \frac{18}{9} m/s^2 = 2\ m/s^2 \ (2)$$

Μονάδες 4

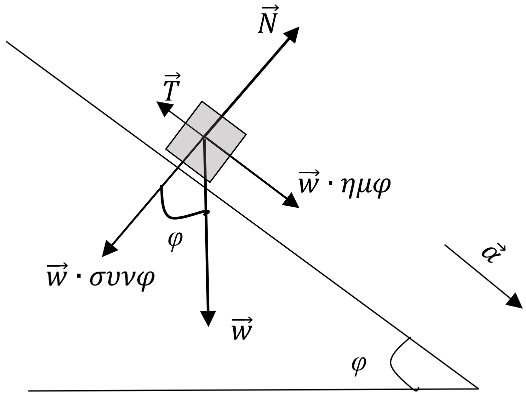
Από τις (1) και (2) προκύπτει:

$$K = \frac{1}{2} \cdot \alpha \text{ ή } \alpha = 2 \cdot K \text{ ή } \alpha = 4\ m/s^2$$

Μονάδες 3

2.1

2.1.Α Σωστή η απάντηση (β).



2.1.Β <u>Ενδεικτική Αιτιολόγηση</u>

Στο σχήμα φαίνονται όλες οι δυνάμεις που ασκούνται στο κιβώτιο που εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση στο κεκλιμένο επίπεδο. Η δύναμη του βάρους $\vec{w}$ έχει αναλυθεί σε συνιστώσες σε άξονα παράλληλο και κάθετο στο κεκλιμένο επίπεδο με μέτρα:

$$w = m \cdot g,$$
$$w_x = m \cdot g \cdot \eta\mu\varphi = 0{,}6 \cdot m \cdot g,$$
$$w_y = m \cdot g \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi = 0{,}8 \cdot m \cdot g$$

Μονάδες 2

Στον άξονα που έχει την ίδια διεύθυνση με το κεκλιμένο επίπεδο ισχύει ο $2^{ος}$ νόμος του Newton, οπότε:

$$\sum \vec{F}_x = m \cdot \vec{a} \text{ ή } \vec{w}_x + \vec{T} = m \cdot \vec{a}$$

Λαμβάνοντας ως θετική τη φορά της επιτάχυνσης προκύπτει:

$$w_x - T = m \cdot a \text{ ή } T = 0{,}6 \cdot m \cdot g - \frac{m \cdot g}{5} \text{ ή } T = 0{,}4 \cdot m \cdot g \text{ (1)}$$

Μονάδες 2

Στον άξονα που έχει διεύθυνση κάθετη στο κεκλιμένο επίπεδο ισχύει ο $1^{ος}$ νόμος του Newton, οπότε:

$$\sum \vec{F}_y = 0 \text{ ή } \vec{w}_y + \vec{N} = 0$$

Λαμβάνοντας ως θετική τη φορά της $\vec{w}_y$:

$$w_y - N = 0 \text{ ή } w_y = N \text{ ή } N = 0{,}8 \cdot m \cdot g \text{ (2)}$$

Μονάδες 2

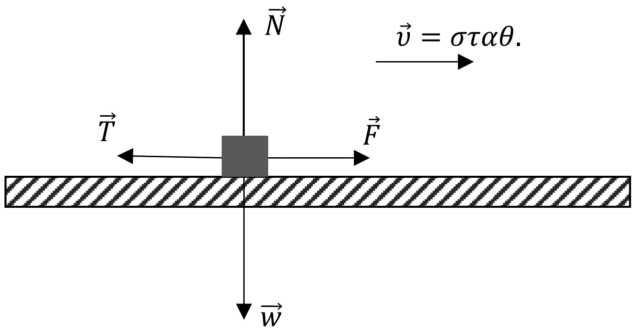
Από το νόμο της τριβής, αξιοποιώντας τις (1) και (2), υπολογίζουμε τον συντελεστή τριβής ολίσθησης μεταξύ κιβωτίου και κεκλιμένου επιπέδου μ:

$$T = \mu \cdot N \text{ ή } \mu = \frac{T}{N} \text{ ή } \mu = \frac{0{,}4 \cdot m \cdot g}{0{,}8 \cdot m \cdot g} \text{ ή } \mu = \frac{1}{2}$$

Μονάδες 2

2.2

2.2.Α Σωστή η απάντηση (α).



2.2.Β Ενδεικτική Αιτιολόγηση

Λόγω της ευθύγραμμης ομαλής κίνησης στον οριζόντιο άξονα ισχύει ο 1ος νόμος του Newton, οπότε:

$$\sum \vec{F}_x = 0 \text{ ή } \vec{F} + \vec{T} = 0$$

Λαμβάνοντας ως θετική τη φορά της ταχύτητας:

$$F - T = 0 \text{ ή } F = T \text{ ή } \quad (1)$$

Μονάδες 2

Στον κατακόρυφο άξονα ισχύει επίσης ο 1ος νόμος του Newton, οπότε:

$$\sum \vec{F}_y = 0 \text{ ή } \vec{N} + \vec{w} = 0$$

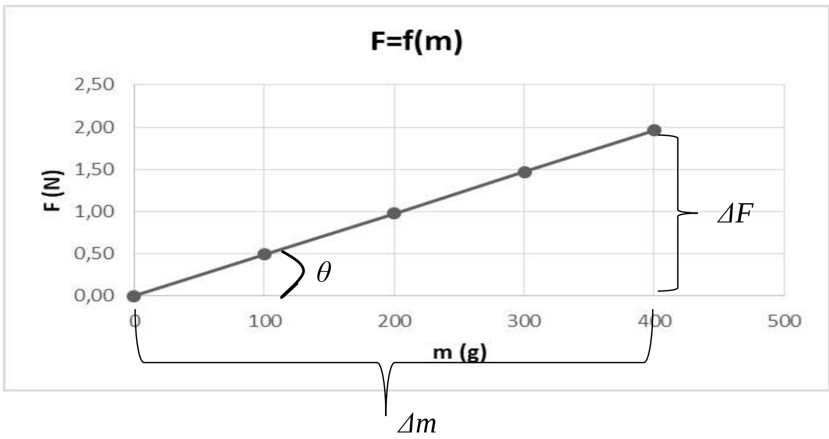
Λαμβάνοντας ως θετική τη φορά του βάρους:

$$w - N = 0 \text{ ή } w = N = m \cdot g \quad (2)$$

Από το νόμο της τριβής, αξιοποιώντας τις (1) και (2) έχουμε:

$$T = \mu \cdot N \text{ ή } F = \mu \cdot m \cdot g \ (3)$$

Μονάδες 3



Η κλίση ***Κ*** της καμπύλης στη γραφική παράσταση $F = f(m)$:

$$K = εφθ = \frac{ΔF}{Δm} = \frac{1{,}96}{400} N/g = \frac{1{,}96}{0{,}4} N/kg = 4{,}9\ m/s^2 \ (4)$$

Μονάδες 2

Από τις (3) και (4) προκύπτει:

$$K = \mu \cdot g \text{ ή } g = \frac{K}{\mu} \text{ ή } g = \frac{4{,}9}{0{,}5}\ m/s^2 = 9{,}8 m/s^2$$

Μονάδες 2

2.1

2.1.Α Σωστή η απάντηση (γ).

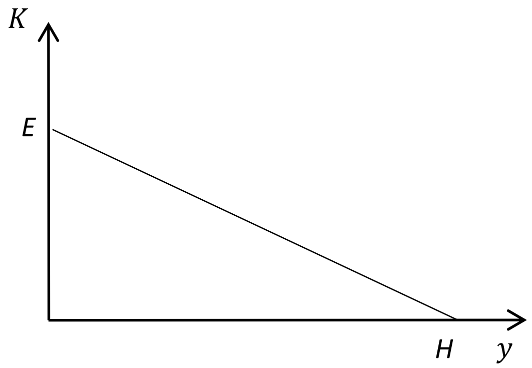
2.1.Β Ενδεικτική Αιτιολόγηση

Κατά την κίνηση της πέτρας ισχύει η αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας:

$$E = K + U \text{ ή } K = E - U \text{ ή } K = m \cdot g \cdot H - m \cdot g \cdot y, για\ 0 \leq y \leq H$$

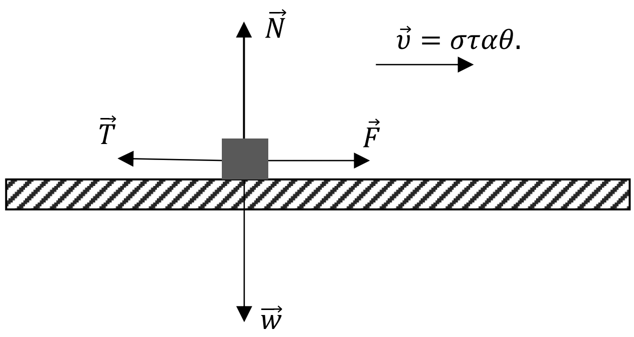
όπου *H* το μέγιστο ύψος που φτάνει ή πέτρα.

Με βάση την παραπάνω συνάρτηση κατασκευάζουμε τη γραφική παράσταση *K* = *f* (*y*):



2.2

2.2.Α Σωστή η απάντηση (α).



2.2.Β Ενδεικτική Αιτιολόγηση

Λόγω της ευθύγραμμης ομαλής κίνησης στον οριζόντιο άξονα ισχύει ο 1ος νόμος του Newton, οπότε:

$$\sum \vec{F}_x = 0 \text{ ή } \vec{F} + \vec{T} = 0$$

Λαμβάνοντας ως θετική τη φορά της ταχύτητας:

$$F - T = 0 \text{ ή } F = T \text{ ή } \quad (1)$$

Μονάδες 2

Στον κατακόρυφο άξονα ισχύει επίσης ο 1ος νόμος του Newton, οπότε:

$$\sum \vec{F}_y = 0 \text{ ή } \vec{N} + \vec{w} = 0$$

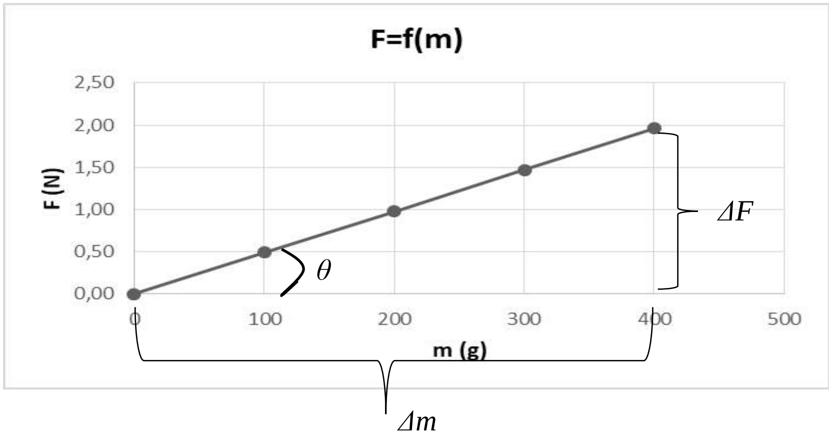
Λαμβάνοντας ως θετική τη φορά του βάρους:

$$w - N = 0 \text{ ή } w = N = m \cdot g \quad (2)$$

Από το νόμο της τριβής, αξιοποιώντας τις (1) και (2) έχουμε:

$$T = \mu \cdot N \text{ ή } F = \mu \cdot m \cdot g \; (3)$$

Μονάδες 3



Η κλίση ***Κ*** της καμπύλης στη γραφική παράσταση $F = f(m)$:

$$K = \varepsilon\varphi\theta = \frac{\Delta F}{\Delta m} = \frac{1{,}96}{400} N/g = \frac{1{,}96}{0{,}4} N/kg = 4{,}9 \; m/s^2 \; (4)$$

Μονάδες 2

Από τις (3) και (4) προκύπτει:

$$K = \mu \cdot g \text{ ή } \mu = \frac{K}{g} \text{ ή } \mu = \frac{4{,}9}{9{,}8} = 0{,}5$$

Μονάδες 2