ΘΕΜΑ 2 / 22638.pdf

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(x+1)$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τα σημεία τομής (αν υπάρχουν) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες xx' και yy'. (Μονάδες 10)

γ) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f μετατοπίζοντας κατάλληλα τη γραφική παράσταση της $y = lnx$. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 2/22638

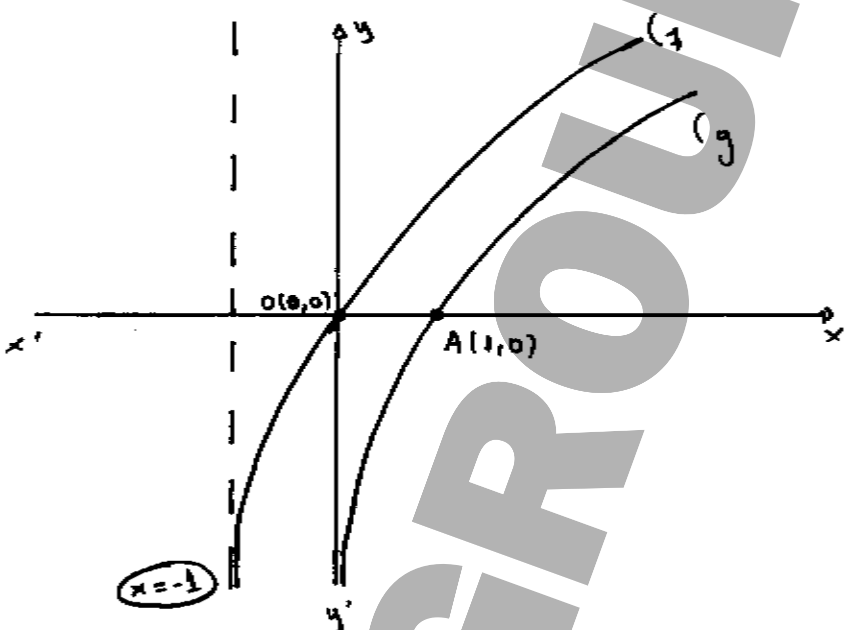
(α) Πρέπει και αρκεί: $x+1>0 \Leftrightarrow x>-1$. Άρα, $A_f = (-1,+\infty)$

(β) Έστω $y = \ln(x+1)$ η εξίσωση της C_f

Για $x=0$, έχουμε: $y = \ln 1 \Leftrightarrow y=0$, άρα η C_f τέμνει τον $y'y$ στο $O(0,0)$.

Για $y=0$, έχουμε: $\ln(x+1)=0 \Leftrightarrow x+1=e^0 \Leftrightarrow x=0$, άρα η C_f τέμνει τον $x'x$ στο $O(0,0)$.

(γ) Έστω $g(x)=\ln x$, τότε η C_f προκύπτει από τη C_g με οριζόντια μετατόπιση κατά 1 μονάδα προς τα αριστερά, δηλαδή



ΘΕΜΑ 2 / 22637.pdf

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(3-\sqrt{x+1})$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f . (Μονάδες 13)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2/22637

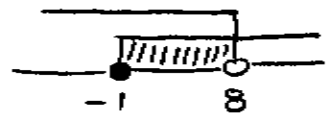
(α) Πρέπει και αρκεί: $\begin{cases} x+1 \geq 0 & (1) \\ \text{και} \\ 3-\sqrt{x+1} > 0 & (2) \end{cases}$

• Η (1) γίνεται: $x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$.

• Η (2) γίνεται: $3-\sqrt{x+1} > 0 \Leftrightarrow 3 > \sqrt{x+1} \overset{\mu\alpha\mu}{\Longleftrightarrow}$

$3^2 > (\sqrt{x+1})^2 \Leftrightarrow 9 > x+1 \Leftrightarrow x < 8$

Συναλήθευση των (1) και (2):



Άρα, $A_f = [-1, 8)$

(β) Με $x \in [-1, 8)$, έχουμε: $f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(3-\sqrt{x+1}) = 0$

$\Leftrightarrow 3-\sqrt{x+1} = e^0 \Leftrightarrow 3-\sqrt{x+1} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = 2 \overset{\mu\alpha\mu}{\Longleftrightarrow}$

$(\sqrt{x+1})^2 = 2^2 \Leftrightarrow x+1 = 4 \Leftrightarrow x = 3$ <u>ΔΕΚΤΟ</u>

ΘΕΜΑ 2 / 22636.pdf

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\ln(x^2+4)$ και $g(x)=\ln x+\ln 4$.

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g . (Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=g(x)$. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2/22636

(α) Έχουμε, $f(x) = \ln(x^2+4)$

Πρέπει και αρκεί: $x^2+4>0$ που ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Άρα, $A_f = \mathbb{R}$

Έχουμε, $g(x) = \ln x + \ln 4$

Πρέπει και αρκεί: $x>0$. Άρα, $A_g = (0,+\infty)$

(β) Με $x \in A_f \cap A_g$, δηλαδή με $x \in (0,+\infty)$ έχουμε:

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \ln(x^2+4) = \ln x + \ln 4 \Leftrightarrow \ln(x^2+4) = \ln 4x$

$\Rightarrow e^{\ln(x^2+4)} = e^{\ln 4x} \Leftrightarrow x^2+4 = 4x \Leftrightarrow x^2-4x+4=0$

$\Leftrightarrow (x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x-2=0 \Leftrightarrow x=2$ (διπλή ρίζα)

<u>ΔΕΚΤΟ</u>.

ΘΕΜΑ 2 / 22635.pdf

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(e^{2x}-e)-1$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f . (Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2/22635

(α) Πρέπει και αρκεί: $e^{2x} - e > 0 \Leftrightarrow e^{2x} > e^1 \xrightarrow{(e^x)\nearrow}$

$2x > 1 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$. Άρα, $A_f = \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$

(β) Με $x \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$, έχουμε:

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(e^{2x} - e) - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln(e^{2x} - e) = 1 \Leftrightarrow$

$\ln(e^{2x} - e) = \ln e \xleftrightarrow{1-1} e^{2x} - e = e \Leftrightarrow e^{2x} - 2e = 0$

$\Leftrightarrow (e^x)^2 + 0 \cdot e^x - 2e = 0$ (1)

Θέτω: $e^x = \omega > 0$, άρα η (1) γίνεται: $\omega^2 + 0 \cdot \omega - 2e = 0$

$\Delta = 0^2 - 4 \cdot 1(-2e) = 8e > 0$, επομένως

$\omega_{1,2} = \frac{-0 \pm \sqrt{8e}}{2 \cdot 1} = \frac{\pm 2\sqrt{2}e}{2} = \pm\sqrt{2}e$ ⟶ $\omega_1 = \sqrt{2}e$ ΔΕΚΤΟ, $\omega_2 = -\sqrt{2}e$ ΑΠΟΡ

· Για $\omega_1 = \sqrt{2}e$, έχουμε: $e^x = \sqrt{2}e \Rightarrow \ln e^x = \ln\sqrt{2}e$

$\Rightarrow x = \ln\sqrt{2} + \ln e \Rightarrow x = 1 + \ln\sqrt{2}$

Έστω $x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 + \ln\sqrt{2} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \ln\sqrt{2} > -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\ln\sqrt{2} > \ln e^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \ln\sqrt{2} > \ln\frac{1}{e^{\frac{1}{2}}} \Leftrightarrow$

$\ln\sqrt{2} > \ln\frac{1}{\sqrt{e}} \xrightarrow{(\ln x)\nearrow} \sqrt{2} > \frac{1}{\sqrt{e}} \Leftrightarrow \sqrt{e}\cdot\sqrt{2} > \sqrt{e}\,\frac{1}{\sqrt{e}} \Leftrightarrow$

$\sqrt{e}\cdot\sqrt{2} > 1 \Leftrightarrow \sqrt{2e} > 1 \xleftrightarrow{\mu\alpha\mu} (\sqrt{2e})^2 > 1^2 \Leftrightarrow 2e > 1$ ΑΤΟΠΟ

Άρα, ο αριθμός $1 + \ln\sqrt{2}$ δεν ανήκει στο A_f δηλαδή στο $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$, άρα απορρίπτεται. Επομένως, η εξίσωση $f(x) = 0$ είναι ΑΔΥΝΑΤΗ.

ΘΕΜΑ 2 / 22634.pdf

α) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ορίζεται η παράσταση

$$A = \ln x + \ln(x+6)$$

(Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την εξίσωση

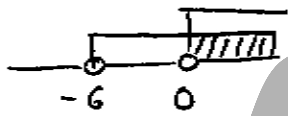
$$\ln x + \ln(x+6) = \frac{1}{2}\ln(49)$$

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2/22634

(α) Για να ορίζεται η παράσταση Α πρέπει και αρκεί: $\begin{cases} x>0 \\ \text{και} \\ x+6>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ \text{και} \\ x>-6 \end{cases}$

Συναλήθευση:



Άρα, η παράσταση Α ορίζεται για κάθε $x>0$

(β) Με $x>0$ έχουμε:

$\ln x + \ln(x+6) = \frac{1}{2}\ln 49 \Leftrightarrow \ln[x(x+6)] = \ln 49^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow$

$\ln[x(x+6)] = \ln\sqrt{49} \overset{1-1}{\Longleftrightarrow} x(x+6) = \sqrt{49} \Leftrightarrow$

$x^2+6x=7 \Leftrightarrow x^2+6x-7=0$ $\qquad \Delta = 6^2-4\cdot1(-7)=36+28=64$

Οπότε, $x_{1,2} = \frac{-6\pm\sqrt{64}}{2\cdot1} = \frac{-6\pm8}{2}$ $\begin{cases} x_1 = \frac{-6+8}{2} = 1 & \underline{\text{ΔΕΚΤΟ}} \\ x_2 = \frac{-6-8}{2} = -7 & \underline{\text{ΑΠΟΡ}} \end{cases}$

ΘΕΜΑ 2 / 22633.pdf

Δίνεται συνάρτηση α^x: $\mathbb{R} \to (0, +\infty)$ με $\alpha^{38} < \alpha^{24}$, $\alpha \in (0,1) \cup (1, +\infty)$

α) Να προσδιορίσετε το είδος της μονοτονίας της συνάρτησης $f(x) = \alpha^x$ αιτιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 13)

β) Να λύσετε την ανίσωση $2^{x-1} < (\frac{1}{2})^{3x+5}$. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2/22633

(α) Έχουμε, $38 > 24$

• Αν $f(x) = a^x$, με $a > 1$, δηλαδή $f \uparrow$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε $38 > 24 \xrightarrow{f \uparrow} a^{38} > a^{24}$.

• Αν $f(x) = a^x$, με $0 < a < 1$, δηλαδή $f \downarrow$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε $38 > 24 \xrightarrow{f \downarrow} a^{38} < a^{24}$

Άρα, η f είναι γνησίως φθίνουσα, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(β) Έχουμε, $2^{x-1} < \left(\frac{1}{2}\right)^{3x+5} \Leftrightarrow 2^{x-1} < 2^{-(3x+5)} \xrightarrow{(2^x)\uparrow}$

$x-1 < -(3x+5) \Leftrightarrow x-1 < -3x-5 \Leftrightarrow 3x+x < -5+1$

$\Leftrightarrow 4x < -4 \Leftrightarrow x < \frac{-4}{4} \Leftrightarrow x < -1.$

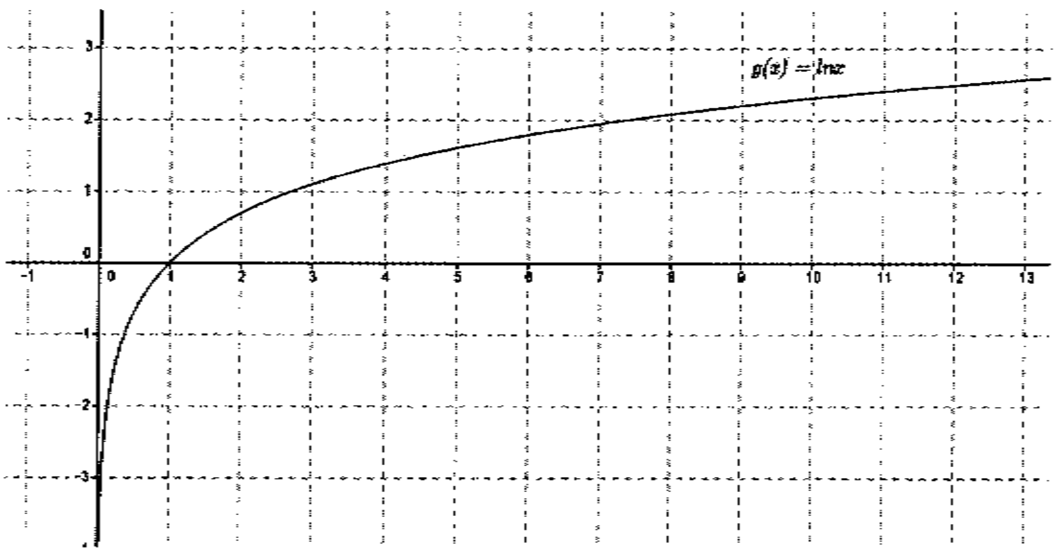
ΘΕΜΑ 2 / 22632.pdf

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ln(x-3)$, $x > 3$

α) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της f μετατοπίζοντας κατάλληλα τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = lnx$. (Μονάδες 8)

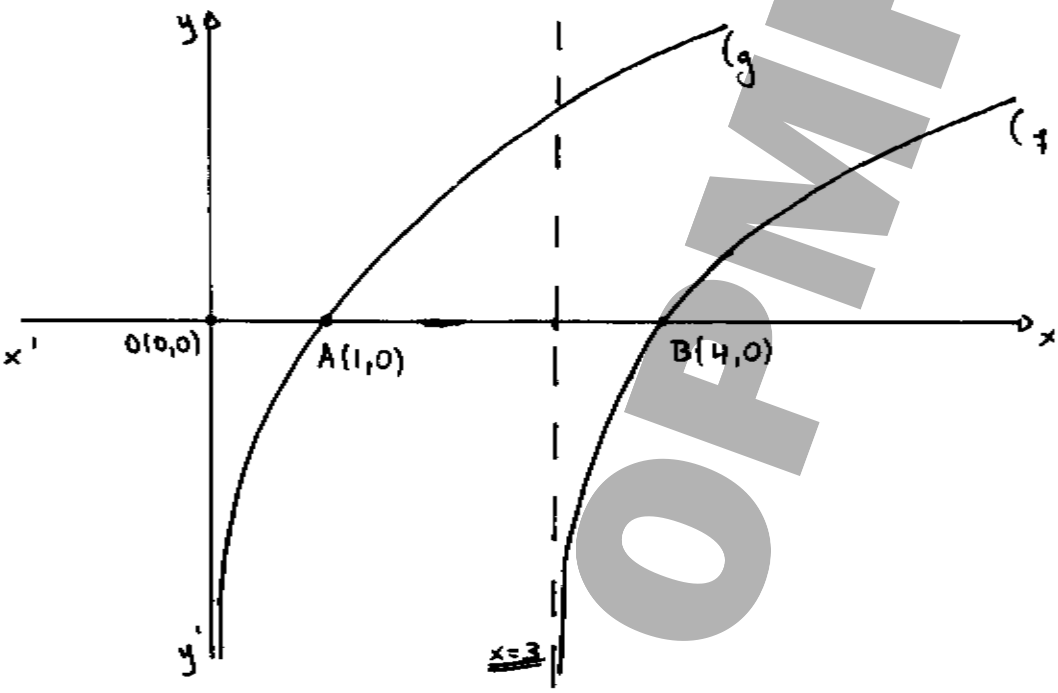
β) Σε ποιο σημείο τέμνει η γραφική παράσταση της f τον άξονα $x'x$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

γ) Ποια είναι η ασύμπτωτη της C_f; (Μονάδες 9)



ΘΕΜΑ 2/22632

(α) Η C_f προκύπτει από τη C_g με οριζόντια μετατόπιση κατά 3 μονάδες προς τα δεξιά.



<u>1ος τρόπος</u>

(β) Η C_f τέμνει τον $x'x$ στο $B(4,0)$ αφού η C_f, όπως γνωρίζουμε από το (α), προκύπτει από τη C_g με οριζόντια μετατόπιση κατά 3 μονάδες προς τα δεξιά και γνωρίζοντας ότι η C_g τέμνει τον $x'x$ στο $A(1,0)$.

<u>2ος τρόπος</u>

Έστω $y=\ln(x-3)$, με $x>3$ η εξίσωση της C_f.

Για $y=0$, έχουμε:

$\ln(x-3)=0 \Leftrightarrow \ln(x-3)=\ln 1 \overset{1-1}{\Longleftrightarrow} x-3=1 \Leftrightarrow x=4$ ΔΕΚΤΟ

Άρα, η C_f τέμνει τον $x'x$ στο $B(4,0)$

(γ) Η ασύμπτωτη της C_f, όπως φαίνεται στο (α), είναι η ευθεία $x=3$, λόγω της οριζόντιας μετατόπισης σε σχέση με τη C_g.

ΘΕΜΑ 2 / 22631.pdf

α) Να λύσετε την εξίσωση: $ln(x^2 - 8) = ln\,7x$. (Μονάδες 13)

β) Να λύσετε την ανίσωση: $ln(x^2 - 8) \geq ln\,7x$. (Μονάδες 12)

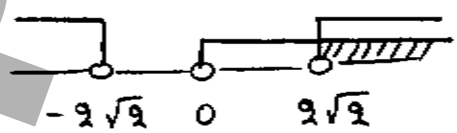
ΘΕΜΑ 2/22631

(α) Πρέπει: $\begin{cases} x^2-8>0 & (1) \\ \text{και} \\ 7x>0 & (2) \end{cases}$

• Η (1) γίνεται: $x^2-8>0 \Leftrightarrow x^2>8 \overset{\text{μαμ}}{\Longleftrightarrow} \sqrt{x^2}>\sqrt{8} \Leftrightarrow$

$|x|>2\sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x>2\sqrt{2} \\ \text{ή} \\ x<-2\sqrt{2} \end{cases}$

• Η (2) γίνεται: $7x>0 \Leftrightarrow x>0$

Συναλήθευση των (1), (2): 

Άρα, με $x>2\sqrt{2}$ έχουμε:

$\ln(x^2-8)=\ln 7x \overset{1-1}{\Longleftrightarrow} x^2-8=7x \Leftrightarrow x^2-7x-8=0$

$\Delta=(-7)^2-4\cdot1(-8)=49+32=81>0$,

άρα $x_{1,2}=\dfrac{-(-7)\pm\sqrt{81}}{2\cdot1}=\dfrac{7\pm9}{2}$ $\begin{cases} x_1=\dfrac{7+9}{2}=8 & \underline{\text{ΔΕΚΤΟ}} \\ x_2=\dfrac{7-9}{2}=-1 & \underline{\text{ΑΠΟΡ}} \end{cases}$

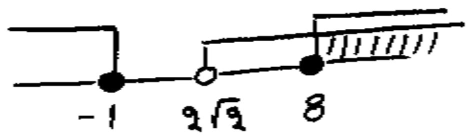
(β) Με $x>2\sqrt{2}$ (3), έχουμε:

$\ln(x^2-8)\geqslant\ln 7x \overset{(\ln x)\uparrow}{\Longleftrightarrow} x^2-8\geqslant7x \Leftrightarrow x^2-7x-8\geqslant0$

Έχουμε,

x	$-\infty$		-1		8		$+\infty$
x^2-7x-8		+	0	−	0	+	

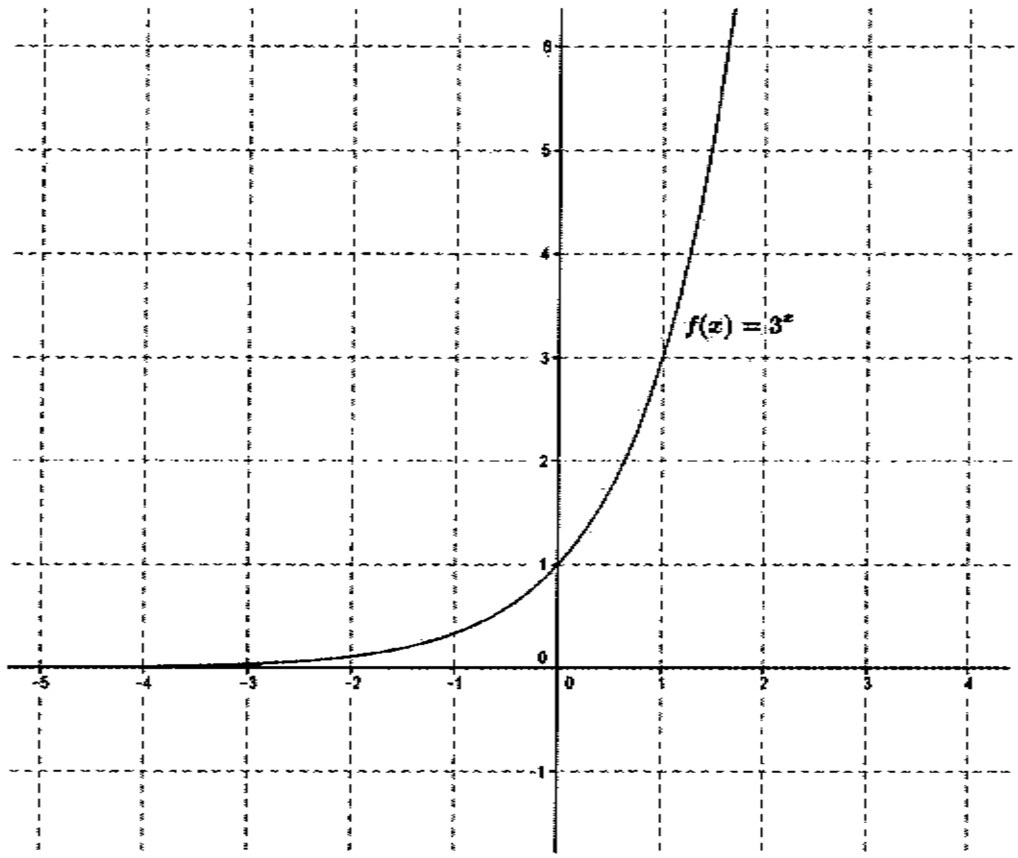
Δηλαδή, $x\in(-\infty,-1]\cup[8,+\infty)$ (4)

Συναλήθευση των (3), (4): 

Άρα, η ανίσωση γίνεται αληθής για κάθε $x\in[8,+\infty)$

ΘΕΜΑ 2 / 22630.pdf

Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 3^x$ με $x \in \mathbb{R}$.



α) Στο ίδιο σύστημα αξόνων να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $g(x) = 3^x + 1$ και $h(x) = 3^x - 1$, μετατοπίζοντας κατάλληλα τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f. (Μονάδες 12)

β) Ποια είναι η ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της g και ποια της γραφικής παράστασης της h; (Μονάδες 13)

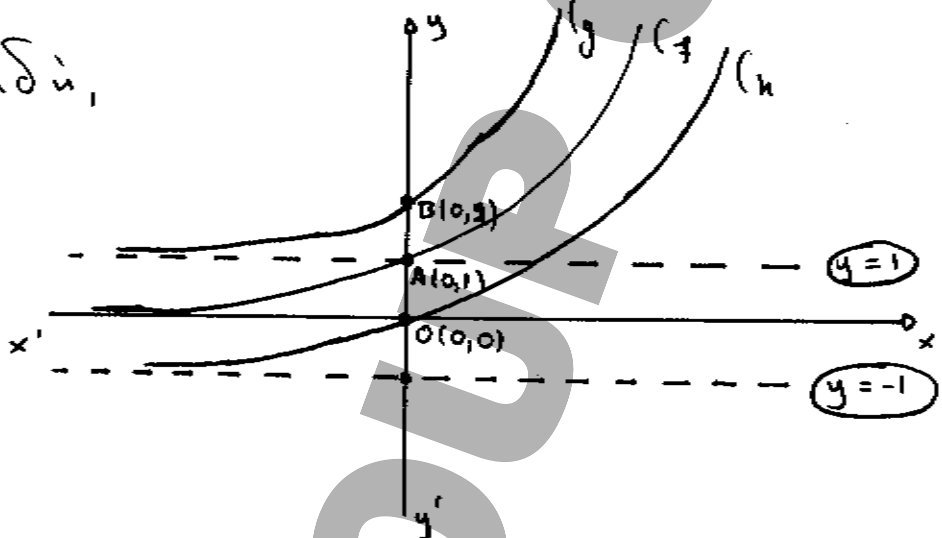
ΘΕΜΑ 2/22630

(α) Έχουμε, $f(x) = 3^x$, $g(x) = 3^x + 1$ και $h(x) = 3^x - 1$

Παρατηρούμε ότι η C_g προκύπτει από την C_f με κατακόρυφη μετατόπιση κατά 1 μονάδα προς τα πάνω, αφού $g(x) = f(x) + 1$.

Επίσης, η C_h προκύπτει από την C_f με κατακόρυφη μετατόπιση κατά 1 μονάδα προς τα κάτω, αφού $h(x) = f(x) - 1$.

Δηλαδή,



(β) Από το παραπάνω σχήμα παρατηρούμε ότι η C_g έχει ασύμπτωτη την ευθεία $y = 1$, ενώ η C_h έχει ασύμπτωτη την ευθεία $y = -1$.

ΘΕΜΑ 4 / 22787.pdf

Όταν ένας ασθενής παίρνει μια δόση ενός φαρμάκου, τότε ο οργανισμός του το μεταβολίζει έτσι ώστε η ποσότητά του να μειώνεται σύμφωνα με τη συνάρτηση

$$f(t) = q_0 a^t, \qquad t \geq 0,$$

όπου t ο χρόνος (σε ημέρες), $f(t)$ η ποσότητα του φαρμάκου(σε mg) και οι αριθμοί a, q_0 είναι κατάλληλες θετικές σταθερές.

α) Να εξηγήσετε τι παριστάνει η σταθερά q_0 στο πλαίσιο του προβλήματος και να αιτιολογήσετε γιατί ισχύει $0 < a < 1$. (Μονάδες 6)

β) Υποθέτουμε τώρα ότι μία ημέρα μετά τη λήψη του φαρμάκου, η ποσότητά του στον οργανισμό του ασθενούς έχει υποδιπλασιαστεί.

i. Να αποδείξετε ότι $a = \frac{1}{2}$. (Μονάδες 5)

ii. Να μεταφέρετε στην κόλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών της συνάρτησης f, εκφράζοντας τις τιμές $f(t)$ συναρτήσει της αρχικής τιμής q_0.

(Μονάδες 4)

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(t)$	q_0	$\frac{q_0}{2}$							

γ) Υποθέτουμε τώρα ότι $a = \frac{1}{2}$ και ότι η ποσότητα του φαρμάκου που παραμένει στον οργανισμό στο τέλος της 4ης ημέρας είναι 25 mg.

i. Να υπολογίσετε την ποσότητα της δόσης που πήρε ο ασθενής. (Μονάδες 5)

ii. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο διάστημα $[0,6]$.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4/22787

(α) Η ποσότητα του φαρμάκου στον οργανισμό του ασθενούς μειώνεται με την πάροδο του χρόνου άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα για κάθε $t \in [0,+\infty)$, άρα $0<\alpha<1$. Επίσης, $f(0)=q_0\alpha^0 \Leftrightarrow f(0)=q_0$. Άρα, ο αριθμός q_0 παριστάνει την ποσότητα της δόσης πριν προλάβει να τη μεταβολίσει ο οργανισμός.

(β) (i) Είναι, $f(1)=\frac{q_0}{2} \Leftrightarrow q_0\alpha=\frac{q_0}{2} \Longleftrightarrow \alpha=\frac{1}{2}$

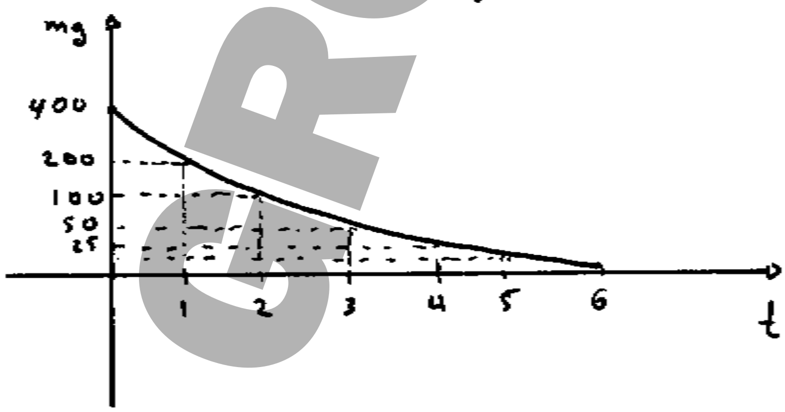
(ii) Για $\alpha=\frac{1}{2}$ έχουμε $f(t)=q_0\left(\frac{1}{2}\right)^t$, άρα

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(t)$	$\frac{q_0}{2}$	$\frac{q_0}{2}$	$\frac{q_0}{4}$	$\frac{q_0}{8}$	$\frac{q_0}{16}$	$\frac{q_0}{32}$	$\frac{q_0}{64}$	$\frac{q_0}{128}$	$\frac{q_0}{256}$

(γ) Για $\alpha=\frac{1}{2}$, έχουμε: $f(t)=q_0\left(\frac{1}{2}\right)^t$

(i) Είναι, $f(4)=25 \overset{(\beta ii)}{\Leftrightarrow} \frac{q_0}{16}=25 \Leftrightarrow q_0=400$ mg

(ii)



ΘΕΜΑ 4 / 22790.pdf

Σε μια περιοχή της ευρωπαϊκής ένωσης λόγω των μέτρων που πάρθηκαν ο πληθυσμός των αγροτών (σε χιλιάδες) μειώνεται σύμφωνα με τον νόμο της εκθετικής μεταβολής ($Q(t) = Q_o \cdot e^{ct}$).
Ο αρχικός πληθυσμός ήταν 8 χιλιάδες αγρότες και μετά από δύο χρόνια έμεινε ο μισός.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση που δίνει τον πληθυσμό των αγροτών μετά από t χρόνια είναι: $$Q(t) = 8 \cdot e^{-\frac{t}{2} ln2}$$

(Μονάδες 10)

β) Ποιος θα είναι ο πληθυσμός των αγροτών ύστερα από τέσσερα χρόνια; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 6)

γ) Πόσος χρόνος θα έχει περάσει όταν ο αγροτικός πληθυσμός της περιοχής θα έχει μειωθεί στους χίλιους αγρότες; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4|22790

(α) Είναι $t \geq 0$, επίσης $Q(2) = \frac{Q(0)}{2} \Leftrightarrow$

$Q_0 \cdot e^{2c} = \frac{Q_0 \cdot e^0}{2} \Leftrightarrow Q_0 e^{2c} = \frac{Q_0}{2} \xLeftrightarrow{Q_0>0} e^{2c} = \frac{1}{2}$

$\Longrightarrow \ln e^{2c} = \ln \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2c = \ln 2^{-1} \Leftrightarrow 2c = -\ln 2 \Leftrightarrow$

$c = -\frac{\ln 2}{2}$. Επίσης, $Q(0) = Q_0 e^0 \Leftrightarrow Q(0) = Q_0$

και ο αρχικός πληθυσμός ήταν 8 χιλιάδες

αγρότες, οπότε $Q(0) = Q_0 = 8$

Επομένως, $Q(t) = 8e^{-\frac{t}{2}\ln 2}$

(β) Ο αρχικός πληθυσμός των αγροτών ήταν $Q(0) = 8$

άρα ο πληθυσμός ύστερα από τέσσερα χρόνια θα

είναι: $Q(4) = 8e^{-\frac{4}{2}\ln 2} = 8e^{-2\ln 2} = 8e^{\ln 2^{-2}} = 8 \cdot 2^{-2} =$

$= 8\,\frac{1}{2^2} = 2$ χιλιάδες.

(γ) Με $t \geq 0$, έχουμε: $Q(t) = 1 \Leftrightarrow 8e^{-\frac{t}{2}\ln 2} = 1 \Leftrightarrow$

$e^{-\frac{t}{2}\ln 2} = \frac{1}{8} \Longrightarrow \ln e^{-\frac{t}{2}\ln 2} = \ln \frac{1}{8} \Leftrightarrow -\frac{t}{2}\ln 2 = \ln 2^{-3}$

$\Leftrightarrow t = -2\,\frac{\ln 2^{-3}}{\ln 2} \Leftrightarrow t = -2\,(-3)\,\frac{\ln 2}{\ln 2} \Leftrightarrow t = 6$ ΔΕΚΤΟ

Επομένως, μετά από 6 χρόνια ο πληθυσμός των αγροτών θα έχει μειωθεί στους 1000.

ΘΕΜΑ 4 / 22791.pdf

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha \cdot 2^x + \beta$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία $A(1,3)$ και $B(2,13)$.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 5$ και $\beta = -7$.

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε το κοινό σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα y'y.

(Μονάδες 4)

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

(Μονάδες 7)

δ) Να λύσετε την ανίσωση $f(2^x - 31) < 3$.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4/22791

(α) • $A(1,3)\in C_f \Leftrightarrow f(1)=3 \Leftrightarrow \alpha\cdot 2^1+\beta=3 \Leftrightarrow 2\alpha+\beta=3 \Leftrightarrow$

$\beta=3-2\alpha \quad (1)$

• $B(2,13)\in C_f \Leftrightarrow f(2)=13 \Leftrightarrow \alpha\cdot 2^2+\beta=13 \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$

$4\alpha+3-2\alpha=13 \Leftrightarrow 2\alpha=10 \Leftrightarrow \alpha=5$

Για $\alpha=5$ η (1) γίνεται: $\beta=3-2\cdot 5 \Leftrightarrow \beta=-7$

(β) Για $\alpha=5$ και $\beta=-7$, έχουμε: $f(x)=-7+5\cdot 2^x,\ x\in\mathbb{R}$

Έστω $y=-7+5\cdot 2^x$ η εξίσωση της C_f. Για $x=0$ έχουμε: $y=-7+5\cdot 2^0=-7+5 \Leftrightarrow y=-2$. Άρα, η C_f τέμνει τον $y'y$ στο $\Gamma(0,-2)$

(γ) Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$, τότε $x_1<x_2 \xrightarrow{(2^x)\uparrow}$ $2^{x_1}<2^{x_2} \Leftrightarrow 5\cdot 2^{x_1}<5\cdot 2^{x_2} \Leftrightarrow -7+5\cdot 2^{x_1}<-7+5\cdot 2^{x_2} \Leftrightarrow$ $f(x_1)<f(x_2)$. Επομένως, η f είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

(δ) Με $x\in\mathbb{R}$, έχουμε: $f(2^x-31)<3 \overset{(\alpha)}{\Longleftrightarrow} f(2^x-31)<f(1)$ $\xrightarrow{f\uparrow} 2^x-31<1 \Leftrightarrow 2^x<32 \Leftrightarrow 2^x<2^5 \xrightarrow{(2^x)\uparrow} x<5$.

ΘΕΜΑ 4 / 22794.pdf

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+\alpha x^2+\beta x+6$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

α) Να υπολογίσετε τις τιμές των α και β ώστε το πολυώνυμο $P(x)$ να έχει παράγοντα το $x+1$ και η αριθμητική τιμή του για $x=2$ να είναι ίση με 12.

(Μονάδες 7)

β) Για α=-2 και β=3

i. Να γράψετε την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)$ με το $x-2$.

(Μονάδες 5)

ii. Να λύσετε την ανίσωση $P(x)\leq -x+14$.

(Μονάδες 7)

iii. Να λύσετε την ανίσωση $P(\ln x)\leq -\ln x+14$.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4/22794

Είναι, $P(x) = x^3 + ax^2 + \beta x + 6$, με $a, \beta \in \mathbb{R}$.

(α) · Το $P(x)$ έχει παράγοντα το $(x+1)$, αν και μόνο αν, $P(-1) = 0 \iff (-1)^3 + a(-1)^2 + \beta(-1) + 6 = 0 \iff$ $-1 + a - \beta + 6 = 0 \iff a = \beta - 5$ (1).

· Η αριθμητική τιμή του $P(x)$ για $x = 2$ είναι 12, άρα $P(2) = 12 \iff 2^3 + a\cdot 2^2 + \beta \cdot 2 + 6 = 12 \iff$ $8 + 4a + 2\beta = 6 \iff 4a + 2\beta = -2 \iff 2a + \beta = -1 \overset{(1)}{\iff}$ $2(\beta - 5) + \beta = -1 \iff 2\beta - 10 + \beta = -1 \iff 3\beta = 9 \iff \beta = 3$.

Για $\beta = 3$ η (1) γίνεται: $a = 3 - 5 \iff a = -2$.

(β) Για $a = -2$ και $\beta = 3$ έχουμε: $P(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 6$

(i) Εκτελώ σχήμα Horner στο $P(x)$ για $\rho = 2$, δηλαδή

1	-2	3	6	$\rho = 2$
#	2	0	6	
1	0	3	12	

Οπότε, $P(x) = (x-2)(x^2+3) + 12$

(ii) Έχουμε, $P(x) \le -x + 14 \iff x^3 - 2x^2 + 3x + 6 + x - 14 \le 0$ $\iff x^3 - 2x^2 + 4x - 8 \le 0 \iff x^2(x-2) + 4(x-2) \le 0 \iff$ $(x-2)(x^2+4) \le 0 \overset{x^2+4>0}{\iff} x - 2 \le 0 \iff x \le 2$

(iii) Με $x > 0$, θέτω $\ln x = \omega$, άρα η ανίσωση γίνεται: $P(\omega) \le -\omega + 14 \overset{(\beta ii)}{\iff} \omega \le 2$

Για $\omega \le 2$, έχουμε: $\ln x \le 2 \iff \ln x \le \ln e^2 \xrightarrow{(\ln x)\uparrow}$ $x \le e^2$. Όμως, $x > 0$, άρα $0 < x \le e^2$.

ΘΕΜΑ 4 / 22796.pdf

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\ln(e^x-1)$ και $g(x)=\ln x^2$.

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g.

(Μονάδες 4)

β) Να λύσετε τις ανισώσεις $f(x)>0$ και $g(x)<0$.

(Μονάδες 8)

γ) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f(\ln 3)$ και $g\left(\frac{2}{e}\right)$.

(Μονάδες 6)

δ) Να λύσετε την εξίσωση $f(2x)-f(x)=g\left(\sqrt{e-1}\right)$.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4/22796

(α) Έχουμε, $f(x)=\ln(e^x-1)$.

Πρέπει και αρκεί: $e^x-1>0 \Leftrightarrow e^x>1 \Leftrightarrow e^x>e^0 \xLeftrightarrow{(e^x)\uparrow} x>0$

Οπότε, $A_f=(0,+\infty)$

Έχουμε, $g(x)=\ln x^2$

Πρέπει και αρκεί: $x^2>0$. Όμως, $x^2\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα πρέπει $x\neq 0$.

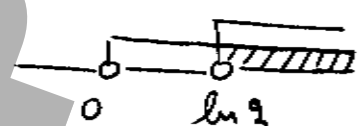
Οπότε, $A_g=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

(β) • Με $x>0$ (1) έχουμε: $f(x)>0 \Leftrightarrow \ln(e^x-1)>0 \Leftrightarrow$

$\ln(e^x-1)>\ln 1 \xLeftrightarrow{(\ln x)\uparrow} e^x-1>1 \Leftrightarrow e^x>2 \Longrightarrow$

$\ln e^x>\ln 2 \Leftrightarrow x>\ln 2$ (2)

Συναλήθευση (1), (2):



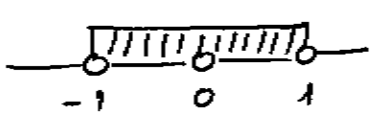
Άρα, η ανίσωση $f(x)>0$ γίνεται αληθής για κάθε $x\in(\ln 2,+\infty)$

• Με $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ (1) έχουμε: $g(x)<0 \Leftrightarrow$

$\ln x^2<0 \Leftrightarrow \ln x^2<\ln 1 \xLeftrightarrow{(\ln x)\uparrow} x^2<1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2}<\sqrt{1} \Leftrightarrow$

$|x|<1 \Leftrightarrow -1<x<1$ (2)

Συναλήθευση (1), (2):



Άρα, η ανίσωση $g(x)<0$ γίνεται αληθής για κάθε $x\in(-1,0)\cup(0,1)$.

(γ) • $\ln 3 \in A_f$, οπότε $f(\ln 3) = \ln(e^{\ln 3} - 1) = \ln(3-1) = \ln 2 > 0$

• $\frac{2}{e} \in A_g$, οπότε $g\left(\frac{2}{e}\right) = \ln\left(\frac{2}{e}\right)^2 = \ln\frac{4}{e^2} = \ln 4 - \ln e^2 =$

$= \ln 2^2 - 2 = 2\ln 2 - 2 = 2(\ln 2 - 1) < 0$

Οπότε, $f(\ln 3) > g\left(\frac{2}{e}\right)$.

(δ) Με $x > 0$, έχουμε:

$f(2x) - f(x) = g(\sqrt{e-1}) \Leftrightarrow \ln(e^{2x}-1) - \ln(e^x-1) = \ln(\sqrt{e-1})^2 \Leftrightarrow$

$\ln\frac{e^{2x}-1}{e^x-1} = \ln(e-1) \xRightarrow{1-1} \frac{(e^x)^2-1}{e^x-1} = e-1 \Leftrightarrow$

$\frac{(e^x-1)(e^x+1)}{e^x-1} = e-1 \Leftrightarrow e^x+1 = e-1 \Leftrightarrow e^x = e-2 \Rightarrow$

$\ln e^x = \ln(e-2) \Leftrightarrow x = \ln(e-2)$ ΑΠΟΡ, διότι

$0 < e-2 < 1 \xRightarrow{\ln \uparrow} \ln(e-2) < \ln 1 \Leftrightarrow \ln(e-2) < 0$

Άρα, η εξίσωση είναι ΑΔΥΝΑΤΗ.

ΘΕΜΑ 4 / 22799.pdf

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = log(x - 2)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

(Μονάδες 5)

β) Να υπολογίσετε τον αριθμό $100^{log\sqrt{6}}$

(Μονάδες 7)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $4.4^{f(x)} - 9 \cdot 2^{f(x)} + 100^{log\sqrt{6}} - 4 = 0$

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 4/22799

Έχουμε, $f(x) = \log(x-2)$

(α) Πρέπει και αρκεί: $x-2>0 \Leftrightarrow x>2$, άρα

$A_f = (2, +\infty)$

(β) Είναι, $100^{\log\sqrt{6}} = (10^2)^{\log\sqrt{6}} = 10^{2\log\sqrt{6}} = 10^{\log(\sqrt{6})^2}$

$= (\sqrt{6})^2 = 6$

(γ) Με $x>2$, έχουμε:

$4\cdot 4^{f(x)} - 9\cdot 2^{f(x)} + 100^{\log\sqrt{6}} - 4 = 0 \overset{(\beta)}{\Leftrightarrow} 4\cdot(2^2)^{f(x)} - 9\cdot 2^{f(x)} + 6 - 4 = 0$

$\Leftrightarrow 4\cdot\left[2^{f(x)}\right]^2 - 9\cdot 2^{f(x)} + 2 = 0$ (1) Θέτω: $2^{f(x)} = \omega > 0$

άρα η (1) γίνεται: $4\cdot\omega^2 - 9\omega + 2 = 0$.

$\Delta = (-9)^2 - 4\cdot4\cdot2 = 81 - 32 = 49 > 0$, οπότε

$\omega_{1,2} = \dfrac{-(-9)\pm\sqrt{49}}{2\cdot4} = \dfrac{9\pm7}{8}$
$\omega_1 = \dfrac{9+7}{8} = 2$ ΔΕΚΤΟ
$\omega_2 = \dfrac{9-7}{8} = \dfrac{1}{4}$ ΔΕΚΤΟ

• Για $\omega_1 = 2$, έχουμε: $2^{f(x)} = 2^1 \xrightarrow{1-1} f(x) = 1 \Leftrightarrow$

$\log(x-2) = 1 \Leftrightarrow x - 2 = 10^1 \Leftrightarrow x = 12$ ΔΕΚΤΟ

• Για $\omega_2 = \dfrac{1}{4}$, έχουμε: $2^{f(x)} = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow 2^{f(x)} = 2^{-2} \xrightarrow{1-1}$

$f(x) = -2 \Leftrightarrow \log(x-2) = -2 \Leftrightarrow x - 2 = 10^{-2} \Leftrightarrow$

$x = 2 + \dfrac{1}{100}$ ΔΕΚΤΟ

ΘΕΜΑ 4 / 22802.pdf

Σε ένα ανοιχτό δοχείο υπάρχουν 10 lt ενός υγρού. Το υγρό εξατμίζεται έτσι ώστε ο όγκος του να μειώνεται κατά 15% ανά εβδομάδα.

α) Να βρείτε την ποσότητα του υγρού που υπάρχει στο δοχείο στο τέλος της $1^{ης}$ και στο τέλος της $2^{ης}$ εβδομάδας.

(Μονάδες 8)

β) Ο όγκος του υγρού μετά από t εβδομάδες δίνεται από τη συνάρτηση $V(t) = V_0 \cdot \alpha^t$ όπου V_0 και α σταθεροί πραγματικοί αριθμοί. Να βρείτε τους αριθμούς V_0 και α.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε πότε ο όγκος του υγρού που υπάρχει στο δοχείο είναι μικρότερος από το μισό της αρχικής του τιμής. (Δίνεται ότι: $\log 5 \cong 0,7$ και $\log 85 \cong 1,93$)

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4/22802

(α) Είναι, $V(0)=10\ lt$, $V(1)=V(0)-\frac{15}{100}\cdot V(0)=10-\frac{15}{100}\cdot 10$

$=10\left(1-\frac{15}{100}\right)=10\cdot\frac{85}{100}=\frac{85}{10}\Rightarrow V(1)=8,5\ lt.$

$V(2)=V(1)-\frac{15}{100}V(1)=V(1)\left(1-\frac{15}{100}\right)=8,5\cdot\frac{85}{100}\Leftrightarrow$

$V(2)=7,225\ lt.$

Οπότε, στο τέλος της 1ης εβδομάδας ο όγκος του είναι 8,5 lt, ενώ στο τέλος της 2ης εβδομάδας ο όγκος του είναι 7,225 lt.

(β) Είναι, $V(t)=V_0\cdot a^t$, με $t\geq 0$, άρα

$\cdot V(0)=10\Leftrightarrow V_0\cdot a^0=10\Leftrightarrow V_0=10$, άρα $V(t)=10\cdot a^t$

$\cdot V(1)=8,5\Leftrightarrow 10\cdot a^1=8,5\Leftrightarrow a=0,85$, άρα $V(t)=10\cdot(0,85)^t$

(γ) Έχουμε, $V(t)<\frac{V_0}{2}\Leftrightarrow 10\cdot(0,85)^t<\frac{10}{2}\Leftrightarrow(0,85)^t<\frac{1}{2}$

$\overset{(\log x)\uparrow}{\Longleftrightarrow}\log(0,85)^t<\log\frac{1}{2}\Leftrightarrow t\log\frac{85}{100}<\log\frac{5}{10}\Leftrightarrow$

$t(\log 85-\log 100)<\log 5-\log 10\Leftrightarrow$

$t(1,93-2)<0,7-1\Leftrightarrow t(-0,07)<-0,3\Leftrightarrow t\cdot 0,07>0,3$

$\Leftrightarrow t>\frac{0,3}{0,07}\Leftrightarrow t>\frac{30}{7}$

Άρα, ο όγκος του υγρού που υπάρχει στο δοχείο είναι μικρότερος από το μισό της αρχικής του τιμής μετά από την 30η ημέρα.

ΘΕΜΑ 4 / 22805.pdf

Σε ένα πείραμα εργαστηρίου, ο αριθμός των βακτηρίων δίνεται από τον τύπο

$$P(t) = 200 \cdot e^{ct},$$

όπου t ο χρόνος σε ώρες από την αρχή του πειράματος. Σε μία ώρα ο αριθμός των βακτηρίων ήταν 328.

(Δίνεται ότι $\ln(1{,}64) \cong 0{,}5$ και $\ln 10 \cong 2{,}3$)

α) Να βρείτε τον αριθμό των βακτηρίων όταν ξεκίνησε το πείραμα.

(Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι $c = \frac{1}{2}$.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε το χρονικό διάστημα κατά το οποίο ο αριθμός των βακτηρίων είναι μεγαλύτερος από το δεκαπλάσιο και μικρότερος από το εκατονταπλάσιο της αρχικής του τιμής.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4/22805

(α) Ο αριθμός των βακτηρίων όταν ξεκίνησε το πείραμα είναι $P(0) = 200 \cdot e^0 = 200$ βακτήρια.

(β) Σε μία ώρα ο αριθμός των βακτηρίων είναι 328, δηλαδή $P(1) = 328 \Leftrightarrow 200 \cdot e^c = 328 \Leftrightarrow$

$$e^c = \frac{328}{200} \Leftrightarrow e^c = 1{,}64 \Longrightarrow \ln e^c = \ln 1{,}64 \Leftrightarrow c = 0{,}5 = \frac{1}{2}$$

(γ) Για $c = \frac{1}{2}$, έχουμε: $P(t) = 200 \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot t}$

Θέλουμε: $10P(0) < P(t) < 100P(0) \Leftrightarrow$

$$10 \cdot 200 < 200 e^{\frac{t}{2}} < 100 \cdot 200 \Leftrightarrow 10 < e^{\frac{t}{2}} < 100 \xRightarrow{\ln x \uparrow}$$

$$\ln 10 < \ln e^{\frac{t}{2}} < \ln 100 \Leftrightarrow \ln 10 < \frac{t}{2} < \ln 10^2 \Leftrightarrow$$

$$2\ln 10 < t < 2\ln 10^2 \Leftrightarrow 2 \cdot 2{,}3 < t < 4 \cdot 2{,}3 \Leftrightarrow$$

$4{,}6 < t < 9{,}2$ (ώρες)

ΘΕΜΑ 4 / 22808.pdf

Το φορτίο ενός πυκνωτή που εκφορτίζεται μειώνεται εκθετικά. Το φορτίο του πυκνωτή δίνεται ως συνάρτηση του χρόνου (σε ms) από τον τύπο $Q(t) = Q_0 \cdot e^{-\lambda t}$, όπου Q_0 το αρχικό φορτίο του πυκνωτή (σε μCb).

α) Αν τη χρονική στιγμή $t = 2$ms το φορτίο είναι ίσο με το $\frac{1}{4}$ της αρχικής του τιμής, να δείξετε ότι

$$\lambda = ln2.$$

(Μονάδες 8)

β) Αν τη χρονική στιγμή $t = 1$ms το φορτίο του είναι 60 μCb, να αποδείξετε ότι

$$Q_0 = 120\mu Cb.$$

(Μονάδες 8)

γ) Πότε το φορτίο του πυκνωτή γίνεται μικρότερο από 15 μCb; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4/22808

(α) Έχουμε, $Q(2) = \frac{1}{4} Q_0 \Leftrightarrow Q_0 e^{-2\lambda} = \frac{1}{4} Q_0 \xLeftrightarrow{Q_0 \neq 0}$

$e^{-2\lambda} = \frac{1}{4} \Rightarrow \ln e^{-2\lambda} = \ln \frac{1}{4} \Leftrightarrow -2\lambda = \ln\frac{1}{4} \Leftrightarrow$

$-2\lambda = \ln 1 - \ln 4 \Leftrightarrow -2\lambda = -\ln 4 \Leftrightarrow 2\lambda = \ln 4 \Leftrightarrow$

$\lambda = \frac{1}{2} \ln 4 \Leftrightarrow \lambda = \ln 4^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \lambda = \ln \sqrt{4} \Leftrightarrow \lambda = \ln 2$

(β) Για $\lambda = \ln 2$, έχουμε: $Q(t) = Q_0 e^{-t\ln 2} = Q_0 e^{\ln 2^{-t}} \Leftrightarrow$

$Q(t) = Q_0 2^{-t} \Leftrightarrow Q(t) = \frac{Q_0}{2^t}$

Είναι, $Q(1) = 60 \Leftrightarrow \frac{Q_0}{2^1} = 60 \Leftrightarrow Q_0 = 120\, \mu Cb.$

(γ) Για $Q_0 = 120\, \mu Cb$ έχουμε: $Q(t) = \frac{120}{2^t}$

Είναι, $Q(t) < 15 \Leftrightarrow \frac{120}{2^t} < 15 \Leftrightarrow 120 < 15 \cdot 2^t \Leftrightarrow$

$2^t > 8 \Leftrightarrow 2^t > 2^3 \xLeftrightarrow{(2^t)\uparrow} t > 3$

Άρα, μετά από 3ms το φορτίο του πυκνωτή γίνεται μικρότερο από $15\mu Cb$.

ΘΕΜΑ 4 / 22810.pdf

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ln(e^x - 2)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f. (Μονάδες 7)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + x = 3\ln 2$. (Μονάδες 9)

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) + x \geq 3\ln 2$. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4|22810

(α) Πρέπει και αρκεί: $e^x - 2 > 0 \Leftrightarrow e^x > 2 \xrightarrow{(\ln x)\uparrow}$

$\ln e^x > \ln 2 \Leftrightarrow x > \ln 2$. Άρα, $A_f = (\ln 2, +\infty)$

(β) Με $x > \ln 2$, έχουμε:

$f(x) + x = 3\ln 2 \Leftrightarrow \ln(e^x - 2) + x = 3\ln 2 \Leftrightarrow$

$\ln(e^x - 2) + \ln e^x = \ln 2^3 \Leftrightarrow \ln\left[e^x(e^x - 2)\right] = \ln 2^3 \xrightarrow{1-1}$

$e^x(e^x - 2) = 2^3 \Leftrightarrow (e^x)^2 - 2e^x - 8 = 0 \quad (1)$

Θέτω: $e^x = \omega > 0$, άρα η (1) γίνεται: $\omega^2 - 2\omega - 8 = 0$

$\Delta = (-2)^2 - 4\cdot 1(-8) = 4 + 32 = 36 > 0$, άρα

$\omega_{1,2} = \dfrac{-(-2) \pm \sqrt{36}}{2\cdot 1} = \dfrac{2 \pm 6}{2}$

$\omega_1 = \dfrac{2+6}{2} = 4$ ΔΕΚΤΟ

$\omega_2 = \dfrac{2-6}{2} = -2$ ΑΠΟΡ

Για $\omega_1 = 4$, έχουμε: $e^x = 4 \Rightarrow \ln e^x = \ln 4 \Leftrightarrow$

$x = \ln 4$ ΔΕΚΤΟ, διότι $2 < 4 \xrightarrow{(\ln x)\uparrow} \ln 2 < \ln 4$

(γ) Με $x > \ln 2 \; (3)$ έχουμε:

$f(x) + x \geq 3\ln 2 \Leftrightarrow \ln(e^x - 2) + x \geq 3\ln 2$

$\ln(e^x - 2) + \ln e^x \geq \ln 2^3 \Leftrightarrow \ln\left[e^x(e^x - 2)\right] \geq \ln 2^3 \xrightarrow{(\ln x)\uparrow}$

$e^x(e^x - 2) \geq 2^3 \Leftrightarrow (e^x)^2 - 2e^x - 8 \geq 0 \quad (2)$

Θέτω: $e^x = \omega > 0$, άρα η (2) γίνεται: $\omega^2 - 2\omega - 8 \geq 0$

Από (β) έχουμε: $\omega_1 = 4$ ΔΕΚΤΟ

$\omega_2 = -2$ ΑΠΟΡ.

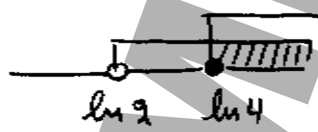
Δηλαδή,

ω	$-\infty$	-2		0		4	$+\infty$
$\omega^2 - 2\omega - 8$	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$

Οπότε, $\omega \geq 4$ δηλαδή $e^x \geq 4 \xrightarrow{(\ln x)\nearrow} \ln e^x \geq \ln 4$

$\Leftrightarrow x \geq \ln 4$ (4)

Συναλήθευση (3), (4) :



Άρα, η ανίσωση ικανοποιείται για κάθε $x \in [\ln 4, +\infty)$.

ΘΕΜΑ 4 / 22812.pdf

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\log\dfrac{4^x-1}{2^x+5}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f . (Μονάδες 7)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=\log 3-\log 7$. (Μονάδες 9)

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > \log 3-\log 7$. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4/22812

Είναι, $f(x) = \log \dfrac{4^x - 1}{2^x + 5}$

(α) Πρέπει και αρκεί: $\dfrac{4^x-1}{2^x+5} > 0 \Leftrightarrow (4^x-1)(2^x+5) > 0$

$\overset{2^x+5>0}{\Longleftrightarrow} 4^x - 1 > 0 \Leftrightarrow 4^x > 1 \Leftrightarrow 4^x > 4^0 \xrightarrow{(4^x)\uparrow} x > 0$

Οπότε, $A_f = (0, +\infty)$.

(β) Με $x > 0$ έχουμε:

$f(x) = \log 3 - \log 7 \Leftrightarrow \log \dfrac{4^x-1}{2^x+5} = \log \dfrac{3}{7} \xrightarrow{1-1}$

$\dfrac{4^x-1}{2^x+5} = \dfrac{3}{7} \Leftrightarrow 7(4^x-1) = 3(2^x+5) \Leftrightarrow$

$7\left[(2^x)^2 - 1\right] = 3\cdot 2^x + 15 \Leftrightarrow 7\cdot(2^x)^2 - 3\cdot 2^x - 22 = 0 \quad (1)$

Θέτω: $2^x = \omega > 0$, άρα η (1) γίνεται: $7\omega^2 - 3\omega - 22 = 0$

$\Delta = (-3)^2 - 4\cdot 7(-22) = 9 + 616 = 625 > 0$, οπότε

$\omega_{1,2} = \dfrac{-(-3) \pm \sqrt{625}}{2\cdot 7} = \dfrac{3 \pm 25}{14}$

$\omega_1 = \dfrac{3+25}{14} = 2$ ΔΕΚΤΟ

$\omega_2 = \dfrac{3-25}{14} = -\dfrac{11}{7}$ ΑΠΟΡ

Για $\omega_1 = 2$, έχουμε: $2^x = 2^1 \xrightarrow{1-1} x = 1$ ΔΕΚΤΟ

(γ) Με $x > 0$ (3) έχουμε:

$f(x) > \log 3 - \log 7 \Leftrightarrow \log \dfrac{4^x-1}{2^x+5} > \log \dfrac{3}{7} \xrightarrow{(\log x)\uparrow}$

$\dfrac{4^x-1}{2^x+5} > \dfrac{3}{7} \xrightarrow{\text{Ε.Κ.Π} = 7(2^x+5) > 0} 7(2^x+5)\dfrac{4^x-1}{2^x+5} > 7\cdot(2^x+5)\dfrac{3}{7}$

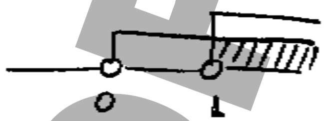
$\Leftrightarrow 7(4^x-1) > 3(2^x+5) \Leftrightarrow 7\cdot 4^x - 7 - 3\cdot 2^x - 15 > 0 \Leftrightarrow$

$7\cdot(2^x)^2 - 3\cdot 2^x - 22 > 0$ (2) Θέτω, $2^x = \omega > 0$, άρα η (2) γίνεται: $7\omega^2 - 3\omega - 22 > 0$. Από (3) έχουμε: $\omega_1 = 2$, $\omega_2 = -\frac{11}{7}$

Δηλαδή,

ω	$-\infty$	$-\frac{11}{7}$	0	2	$+\infty$
$7\omega^2-3\omega-22$	$+$	$+$	$-$	$+$	

Είναι, $\omega > 2$ δηλαδή $2^x > 2^1 \xRightarrow{(2^x)\uparrow} x > 1$ (4)

Συναλήθευση (3),(4): 

Άρα, η ανίσωση ικανοποιείται για κάθε $x \in (1,+\infty)$

ΘΕΜΑ 4 / 22814.pdf

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=5x^3-8x^2+\alpha$ με $\alpha\in\Re$.

α) Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-2$ να βρείτε το $\alpha\in\Re$.

(Μονάδες 8)

β) Για $\alpha=-8$ να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$.

(Μονάδες 9)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $\dfrac{(\ln^2 x+1)^3}{(\ln^2 x+1)^2+1}=\dfrac{8}{5}$.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4/22814

(α) Το $P(x)$ έχει παράγοντα το $(x-2)$, αν και μόνο αν,

$P(2)=0 \Leftrightarrow 5\cdot 2^3-8\cdot 2^2+a=0 \Leftrightarrow 40-32+a=0 \Leftrightarrow a=-8$

(β) Για $a=-8$ έχουμε: $P(x)=5x^3-8x^2-8$

Οι πιθανές ακέραιες ρίζες είναι οι διαιρέτες του σταθερού όρου, δηλαδή $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$

$P(1)=5\cdot 1^3-8\cdot 1^2-8=5-16=-9\neq 0$

$P(-1)=5(-1)^3-8(-1)^2-8=-5-8-8=-21\neq 0$

$P(2)=5\cdot 2^3-8\cdot 2^2-8=40-32-8=0$

Εκτελώ σχήμα Horner στο $P(x)$ για $\rho=2$, δηλαδή

5	-8	0	-8	$\rho=2$
#	10	4	8	
5	2	4	0	

Οπότε, $P(x)=(x-2)(5x^2+2x+4)$

Άρα, $P(x)=0 \Leftrightarrow (x-2)(5x^2+2x+4)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ \text{ή} \\ 5x^2+2x+4=0 \text{ ΑΔΥΝ.} \end{cases}$

(γ) Με $x>0$ έχουμε: $\dfrac{(\ln^2 x+1)^3}{(\ln^2 x+1)^2+1}=\dfrac{8}{5} \Leftrightarrow$

$5(\ln^2 x+1)^3=8(\ln^2 x+1)^2+8 \Leftrightarrow 5(\ln^2 x+1)^3-8(\ln^2 x+1)^2-8=0 \quad (1)$

Θέτω: $\ln^2 x+1=\omega$, άρα η (1) γίνεται: $5\omega^3-8\omega^2-8=0 \overset{(\beta)}{\Longleftrightarrow}$

$(\omega-2)(5\omega^2+2\omega+4)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \omega=2 \\ \text{ή} \\ 5\omega^2+2\omega+4=0 \quad \text{ΑΔΥΝΑΤΗ} \end{cases}$

• Για $\omega=2$, έχουμε: $\ln^2 x+1=2 \Leftrightarrow \ln^2 x=1 \Leftrightarrow \ln x=\pm\sqrt{1} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \ln x = 1 \\ \quad ή \\ \ln x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = e^{1} \\ \quad ή \\ \ln x = \ln e^{-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = e & \text{ΔΕΚΤΟ} \\ \quad ή \\ x = e^{-1} = \dfrac{1}{e} & \text{ΔΕΚΤΟ} \end{cases}$$

ΘΕΜΑ 4 / 22816.pdf

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(e \cdot x+1)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

(Μονάδες 5)

β) Να λύσετε την ανίσωση $f(2x)<f(x)$.

(Μονάδες 7)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f\left(\sqrt{3} \cdot \eta\mu x\right)=f(\sigma\upsilon\nu x)$ στο διάστημα $[0,\frac{\pi}{2})$.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 4|22816

Έχουμε, $f(x) = \ln(ex+1)$.

(α) Πρέπει και αρκεί: $ex+1>0 \Leftrightarrow ex>-1 \Leftrightarrow x>-\frac{1}{e}$

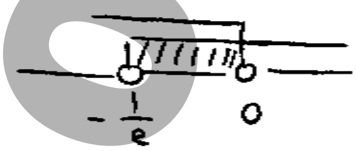
Άρα, $A_f = \left(-\frac{1}{e}, +\infty\right)$

(β) Με $x>-\frac{1}{e}$ (1) έχουμε: $f(2x)<f(x) \Leftrightarrow$

$\ln(e2x+1) < \ln(ex+1) \xRightarrow{(\ln x)\uparrow} 2ex+1 < ex+1 \Leftrightarrow$

$ex<0 \Leftrightarrow x<\frac{0}{e} \Leftrightarrow x<0$ (2)

Συναληθευση (1), (2):



Άρα, η ανίσωση ικανοποιείται για κάθε $x \in \left(-\frac{1}{e}, 0\right)$.

(γ) Έχουμε, $f(\sqrt{3}\cdot ημx) = f(συνx) \Leftrightarrow \ln(e\sqrt{3}\,ημx+1) = \ln(eσυνx+1)$

$\xRightarrow{1-1} \sqrt{3}\,e\,ημx+1 = e\,συνx+1 \Leftrightarrow \sqrt{3}\,e\,ημx = e\,συνx \Leftrightarrow$

$\sqrt{3}\,ημx = συνx$ (3)

Έστω $συνx=0$, τότε η (3) γίνεται: $\sqrt{3}\,ημx=0 \Leftrightarrow$

$ημx=0$. Όμως, $ημ^2x+συν^2x=1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$,

δηλαδή $0^2+0^2=1$ ΑΤΟΠΟ

Οπότε, με $συνx \neq 0$ η (3) γίνεται:

$\sqrt{3}\,ημx = συνx \Leftrightarrow \frac{ημx}{συνx} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow εφx = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow$

$εφx = εφ\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = κ\pi + \frac{\pi}{6}$, $κ\in\mathbb{Z}$

Όμως, $x\in\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, δηλαδή $0 \le x < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$

$0 \le \kappa\pi + \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2} \iff 0 \le \kappa + \frac{1}{6} < \frac{1}{2} \iff$

$-\frac{1}{6} \le \kappa < \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \iff -\frac{1}{6} \le \kappa < \frac{1}{3}$. Όμως, $\kappa \in \mathbb{Z}$ άρα

$\kappa = 0$. Επομένως, $x_1 = 0 \cdot \pi + \frac{\pi}{6} \iff x_1 = \frac{\pi}{6}$

Επαλήθευση: Για $x = \frac{\pi}{6}$ έχουμε:

$f\left(\sqrt{3}\,\eta\mu\frac{\pi}{6}\right) = f\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6}\right) \iff f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ που ισχύει

Άρα, $x = \frac{\pi}{6}$ ΔΕΚΤΗ

ΘΕΜΑ 4 / 22819.pdf

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\ln(3x-11)}{\ln(x-5)}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

(Μονάδες 9)

β)Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=2$.

(Μονάδες 8)

γ) Αν $x>6$ να λύσετε την ανίσωση $f(x)>1$.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4/22819

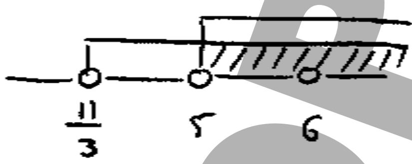
(α) Πρέπει και αρκεί: $\begin{cases} 3x-11>0 & (1) \\ x-5>0 & (2) \\ \ln(x-5)\neq 0 & (3) \end{cases}$

• Η (1) γίνεται: $3x-11>0 \Leftrightarrow 3x>11 \Leftrightarrow x>\frac{11}{3}$

• Η (2) γίνεται: $x-5>0 \Leftrightarrow x>5$

• Η (3) γίνεται: $\ln(x-5)\neq 0 \Leftrightarrow x-5\neq e^0 \Leftrightarrow x\neq 6$

Συναλήθευση:



Άρα, $A_f=(5,6)\cup(6,+\infty)$

(β) Με $x\in(5,6)\cup(6,+\infty)$, έχουμε:

$f(x)=2 \Leftrightarrow \frac{\ln(3x-11)}{\ln(x-5)}=2 \Leftrightarrow \ln(3x-11)=2\ln(x-5) \Leftrightarrow$

$\ln(3x-11)=\ln(x-5)^2 \xrightarrow{1-1} 3x-11=(x-5)^2 \Leftrightarrow$

$3x-11=x^2-10x+25 \Leftrightarrow x^2-13x+36=0$

$\Delta=(-13)^2-4\cdot 1\cdot 36=169-144=25>0$

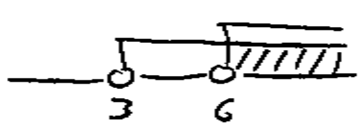
$x_{1,2}=\frac{-(-13)\pm\sqrt{25}}{2\cdot 1}=\frac{13\pm 5}{2}$ ↗ $x_1=\frac{13+5}{2}=9$ ΔΕΚΤΟ
↘ $x_2=\frac{13-5}{2}=4$ ΑΠΟΡ.

(γ) Με $x>6$ (4) έχουμε: $f(x)>1 \Leftrightarrow \frac{\ln(3x-11)}{\ln(x-5)}>1$

$\xLeftrightarrow[\ln(x-5)>0]{x>6} \ln(3x-11)>\ln(x-5) \xrightarrow{(\ln x)\uparrow} 3x-11>x-5 \Leftrightarrow$

$2x>6 \Leftrightarrow x>3$ (5)

Συναλήθευση (4), (5):



Η ανίσωση $f(x)>1$ με $x>6$ ικανοποιείται για κάθε $x\in(6,+\infty)$.

ΘΕΜΑ 4 / 22820.pdf

Μια ποσότητα ραδιενεργού υλικού (σε κιλά) θάβεται και με την πάροδο του χρόνου t (σε έτη), μειώνεται ακολουθώντας το νόμο της εκθετικής μεταβολής ($Q(t) = Q_0 \cdot e^{ct}$).

α) Αν γνωρίζουμε ότι μετά από δύο χρόνια έχει απομείνει το $\frac{1}{3}$ της αρχικής ποσότητας, να δείξετε ότι $Q(t) = Q_0 \cdot (\frac{1}{\sqrt{3}})^t$

(Μονάδες 10)

β) Αν μετά από τέσσερα χρόνια η ποσότητα που έχει απομείνει είναι 1 κιλό, να βρείτε την αρχική ποσότητα που θάφτηκε.

(Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε μετά από πόσα χρόνια, η ποσότητα που θα έχει απομείνει θα είναι $\frac{1}{81}$ κιλά.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4/22820

(α) Η αρχική ποσότητα ραδιενεργού υλικού είναι

$Q(0) = Q_0 e^{c \cdot 0} \Leftrightarrow Q(0) = Q_0$ kg.

Είναι, $Q(2) = \frac{1}{3} Q_0 \Leftrightarrow Q_0 e^{2c} = \frac{1}{3} Q_0 \xLeftrightarrow{Q_0 \neq 0} e^{2c} = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow (e^c)^2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} e^c = \sqrt{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow e^c = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \text{ή} \\ e^c = -\sqrt{\frac{1}{3}} \quad \text{ΑΠΟΡ} \end{cases}$

Οπότε, $Q(t) = Q_0 \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^t$

(β) Είναι, $Q(4) = 1 \overset{(\beta)}{\Leftrightarrow} Q_0 \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^4 = 1 \Leftrightarrow Q_0 \frac{1}{9} = 1 \Leftrightarrow$

$Q_0 = 9$ kg

(γ) Για $Q_0 = 9$, έχουμε: $Q(t) = 9 \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^t$

Είναι, $Q(t) = \frac{9}{81} \Leftrightarrow 9\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^t = \frac{1}{81} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^t = \frac{1}{9 \cdot 81} \Leftrightarrow$

$\left(\frac{1}{3^{\frac{1}{2}}}\right)^t = \frac{1}{3^2 \cdot 3^4} \Leftrightarrow \left[\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^t = \frac{1}{3^6} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{t}{2}} = \left(\frac{1}{3}\right)^6 \xLeftrightarrow{1-1}$

$\frac{t}{2} = 6 \Leftrightarrow t = 12$

Άρα, μετά από δώδεκα χρόνια θα έχουν απομείνει $\frac{1}{81}$ kg.

ΘΕΜΑ 4 / 22822.pdf

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(x-1)$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f. (Μονάδες 5)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(e^x)+f(e^x-2)=3ln2$ (Μονάδες 10)

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(e^x)+f(e^x-2)\leq 3\ln 2$. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4/ 22822

Έχουμε, $f(x) = \ln(x-1)$

(α) Πρέπει και αρκεί: $x-1>0 \Leftrightarrow x>1$. Άρα, $A_f=(1,+\infty)$

(β) Έχουμε, $f(e^x)+f(e^x-2)=3\ln 2 \Leftrightarrow$

$\ln(e^x-1)+\ln(e^x-2-1)=\ln 2^3 \Leftrightarrow \ln[(e^x-1)(e^x-3)]=\ln 2^3 \xRightarrow{1-1}$

$(e^x-1)(e^x-3)=8 \Leftrightarrow (e^x)^2-3e^x-e^x+3-8=0 \Leftrightarrow$

$(e^x)^2-4e^x-5=0 \quad (1)$

Θέτω: $e^x=\omega>0$, άρα η (1) γίνεται: $\omega^2-4\omega-5=0$

$\Delta=(-4)^2-4\cdot 1\cdot(-5)=16+20=36>0$

$\omega_{1,2}=\dfrac{-(-4)\pm\sqrt{36}}{2\cdot 1}=\dfrac{4\pm 6}{2}$

$\omega_1=\dfrac{4+6}{2}=5$ ΔΕΚΤΟ

$\omega_2=\dfrac{4-6}{2}=-1$ ΑΠΟΡ

Για $\omega_1=5$, έχουμε: $e^x=5 \Rightarrow \ln e^x=\ln 5 \Leftrightarrow x=\ln 5$

Επαλήθευση: Για $x=\ln 5$, έχουμε:

$f(e^{\ln 5})+f(e^{\ln 5}-2)=3\ln 2 \Leftrightarrow f(5)+f(5-2)=\ln 2^3$

$\Leftrightarrow f(5)+f(3)=\ln 8 \Leftrightarrow \ln(5-1)+\ln(3-1)=\ln 8 \Leftrightarrow$

$\ln 4+\ln 2=\ln 8 \Leftrightarrow \ln(4\cdot 2)=\ln 8$ που ισχύει

Άρα, η εξίσωση έχει λύση $x=\ln 5$.

(γ) Πρέπει: $\begin{cases} e^x>1 \\ e^x-2>1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^x>1 \\ e^x>3 \end{cases} \xRightarrow{(\ln x)\uparrow} \begin{cases} \ln e^x>\ln 1 \\ \ln e^x>\ln 3 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x>0 \\ x>\ln 3 \end{cases} \Leftrightarrow x>\ln 3.$

Με $x > \ln 3$ (3) έχουμε: $f(e^x) + f(e^x - 2) \le 3\ln 2 \Leftrightarrow$

$\ln(e^x - 1) + \ln(e^x - 2 - 1) \le 3\ln 2 \Leftrightarrow \ln(e^x - 1) + \ln(e^x - 3) \le \ln 2^3$

$\Leftrightarrow \ln(e^x - 1)(e^x - 3) \le \ln 8 \xRightarrow{(\ln x)\uparrow} (e^x - 1)(e^x - 3) \le 8 \Leftrightarrow$

$(e^x)^2 - 3e^x - e^x + 3 - 8 \le 0 \Leftrightarrow (e^x)^2 - 4e^x - 5 \le 0$ (2)

Θέτω: $e^x = \omega > 0$ άρα η (2) γίνεται: $\omega^2 - 4\omega - 5 \le 0$

Δηλαδή,

ω	$-\infty$	-1	0	5	$+\infty$
$\omega^2 - 4\omega - 5$	$+$	$-$	$-$	$+$	

Έχουμε, $\omega \in (0, 5]$, δηλαδή $0 < e^x \le 5 \Leftrightarrow$

$\begin{cases} e^x > 0 \\ \text{και} \\ e^x \le 5 \end{cases} \xRightarrow{(\ln x)\uparrow} \begin{cases} e^x > 0 \\ \ln e^x \le \ln 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^x > 0 \text{ ισχύει} \\ x \le \ln 5 \text{ (4)} \end{cases}$

Συναλήθευση (3), (4):

Άρα, η ανίσωση ικανοποιείται για κάθε $x \in (\ln 3, \ln 5]$.