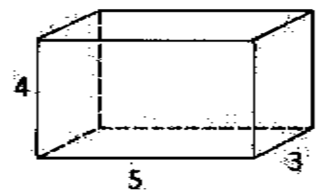
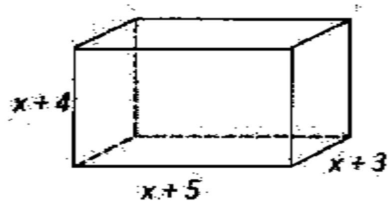
ΘΕΜΑ 2 / 22684.pdf



Μια εταιρεία κατασκευάζει κουτιά σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με διαστάσεις 3cm, 4cm και 5cm.
Ένας νέος πελάτης ζήτησε από την εταιρεία να κατασκευάσει κουτιά με όγκο 120 cm^3, δηλαδή διπλάσιο από εκείνον που κατασκευάζει.
Η εταιρεία αποφάσισε να κατασκευάσει τα κουτιά που ζήτησε ο πελάτης της, αυξάνοντας τις διαστάσεις του αρχικού κουτιού κατά σταθερό ακέραιο μήκος *x*.



α) Να αποδείξετε ότι το *x* θα είναι λύση της εξίσωσης $x^3 + 12x^2 + 47x - 60 = 0$.
(Ο όγκος V ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με διαστάσεις *α*, *β*, *γ* δίνεται απο τον τύπο: $V = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma$) (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τον θετικό ακέραιο *x* λύνοντας την εξίσωση που δίνεται στο ερώτημα α).

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2/22684

(α) Οι νέες διαστάσεις του κουτιού είναι: $x+3$, $x+4$ και $x+5$, άρα ο όγκος του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου είναι:

$$V(x) = (x+3)(x+4)(x+5) = (x+3)(x^2+5x+4x+20) =$$
$$= (x+3)(x^2+9x+20) = x^3+9x^2+20x+3x^2+27x+60 \Leftrightarrow$$
$$V(x) = x^3+12x^2+47x+60$$

Ο νέος πελάτης ζήτησε ο όγκος των κουτιών να είναι $120 cm^3$, δηλαδή

$$V(x) = 120 \Leftrightarrow x^3+12x^2+47x+60=120 \Leftrightarrow$$
$$x^3+12x^2+47x-60=0$$

(β) Έστω $P(x) = x^3+12x^2+47x-60$. Οι πιθανές ακέραιες ρίζες του $P(x)$ είναι: $\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm5, \pm6, \pm10, \pm15, \pm20, \pm30, \pm60$.

Είναι, $P(1) = 1^3+12\cdot1^2+47\cdot1-60 = 0$

Εκτελώ σχήμα Horner στο $P(x)$ για $\rho=1$, δηλαδή

1	12	47	-60	$\rho=1$
#	1	13	60	
1	13	60	0	

Έστω $\pi(x) = x^2+13x+60$ το πηλίκο της διαίρεσης του $\pi(x)$ με το $(x-1)$, άρα $P(x) = (x-1)(x^2+13x+60)$

Έχουμε, $P(x)=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+13x+60)=0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x-1=0 \\ \text{ή} \\ x^2+13x+60=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1>0 \quad \underline{\text{ΔΕΚΤΟ}} \\ \text{ή} \\ \text{ΑΔΥΝΑΤΗ} \end{cases}$$

ΘΕΜΑ 2 / 22685.pdf

Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x) = (\alpha^3 + 2)x^3 + x^2 + 1$ και $Q(x) = 3\alpha x^3 + x^2 + 1$, όπου α θετικός πραγματικός αριθμός.

α) Να βρείτε το α ώστε τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ να είναι ίσα. (Μονάδες 13)

β) Αν $\alpha = 1$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $P(x) = 0$ δεν έχει ακέραιες ρίζες. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2/22685

(α) Τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ είναι ίσα, αν και μόνο αν, $a^3+2=3a \Leftrightarrow a^3-3a+2=0 \Leftrightarrow$

$a^3-a-2a+2=0 \Leftrightarrow a(a^2-1)-2(a-1)=0 \Leftrightarrow$

$a(a-1)(a+1)-2(a-1)=0 \Leftrightarrow (a-1)\left[a(a+1)-2\right]=0 \Leftrightarrow$

$$(a-1)(a^2+a-2)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} a-1=0 \\ \text{ή} \\ a^2+a-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ \text{ή} \\ a=-2 \text{ ή } a=1 \end{cases}$$

Όμως, ο a είναι θετικός πραγματικός αριθμός, άρα $a=1$

(β) Για $a=1$, έχουμε: $P(x)=3x^3+x^2+1$. Οι πιθανές ακέραιες ρίζες του $P(x)$ είναι οι διαιρέτες του σταθερού όρου, δηλαδή ± 1.

Είναι, $P(1)=3\cdot 1^3+1^2+1=5\neq 0$

$P(-1)=3(-1)^3+(-1)^2+1=-3+2=-1\neq 0$

Άρα, η $P(x)=0$ δεν έχει ακέραιες ρίζες.

ΘΕΜΑ 2 / 22686.pdf

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + 2x^2 - 4x + \lambda$.

α) Αν $P(-1) = 6$, να δείξετε ότι $\lambda = 1$.

(Μονάδες 11)

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

(Μονάδες 14)

ΘΕΜΑ 2/22686

Έχουμε, $P(x) = x^3 + 2x^2 - 4x + \lambda$.

(α) Είναι, $P(-1) = 6 \Leftrightarrow (-1)^3 + 2(-1)^2 - 4(-1) + \lambda = 6 \Leftrightarrow$

$-1 + 2 + 4 + \lambda = 6 \Leftrightarrow \lambda = 1$.

(β) Για $\lambda = 1$, έχουμε: $P(x) = x^3 + 2x^2 - 4x + 1$. Οι πιθανές ακέραιες ρίζες είναι οι διαιρέτες του σταθερού όρου, δηλαδή ± 1.

Είναι, $P(1) = 1^3 + 2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 + 1 = 0$

Εκτελώ σχήμα Horner στο $P(x)$ για $\rho = 1$, δηλαδή

$$\begin{array}{cccc|l} 1 & 2 & -4 & 1 & \rho=1 \\ \downarrow & 1 & 3 & -1 & \\ 1 & 3 & -1 & 0 & \end{array}$$

Έστω $\pi(x) = x^2 + 3x - 1$ το πηλίκο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $(x-1)$, άρα

$P(x) = (x-1)(x^2 + 3x - 1)$.

Έχουμε, $P(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+3x-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 & (1) \\ \text{ή} & \\ x^2 + 3x - 1 = 0 & (2) \end{cases}$

· Η (1) γίνεται: $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

· Η (2) γίνεται: $\Delta = 3^2 - 4 \cdot 1 (-1) = 9 + 4 = 13 > 0$

Οπότε, $x_{1,2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{13}}{2 \cdot 1}$ $\quad x_1 = \dfrac{-3+\sqrt{13}}{2}$, $\quad x_2 = \dfrac{-3-\sqrt{13}}{2}$

ΘΕΜΑ 2 / 22687.pdf

Το πολυώνυμο $P(x) = (\lambda^2-1)x^4 - 2(\lambda-1)x^3 + 2\lambda x^2 + \lambda + 1$ είναι $3^{ου}$ βαθμού.

α) Να δείξετε ότι $\lambda = -1$. (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε το $P(x)$. (Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε τις ρίζες του $P(x)$. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 2/22687

Έχουμε, $P(x) = (\lambda^2-1)x^4 - 2(\lambda-1)x^3 + 2\lambda x^2 + \lambda + 1$

(α) Το $P(x)$ είναι $3^{ου}$ βαθμού, άρα

$$\begin{cases} \lambda^2 - 1 = 0 & (1) \\ \text{και} & \\ -2(\lambda-1) \neq 0 & (2) \end{cases}$$

• Η (1) γίνεται: $\lambda^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = 1 \Leftrightarrow \lambda = \pm\sqrt{1} \Leftrightarrow \lambda = \pm 1.$

• Η (2) γίνεται: $-2(\lambda-1) \neq 0 \Leftrightarrow \lambda - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 1$

Οπότε, οι (1) και (2) συναληθεύουν για $\lambda = -1$.

(β) Για $\lambda = -1$, έχουμε:

$P(x) = [(-1)^2 - 1]x^4 - 2(-1-1)x^3 + 2(-1)x^2 - 1 + 1 \Leftrightarrow P(x) = 4x^3 - 2x^2$

(γ) Έχουμε, $P(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow 2x^2(2x-1) = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 2x^2 = 0 \\ \text{ή} \\ 2x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \quad (\text{διπλή ρίζα}) \\ \text{ή} \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

ΘΕΜΑ 2 / 22688.pdf

Το πολυώνυμο $P(x)$ αν διαιρεθεί με το $(x-2)$ δίνει πηλίκο $(x^2 - 3x + 2)$ και υπόλοιπο τον πραγματικό αριθμό υ.

α) Να γράψετε την ταυτότητα της παραπάνω διαίρεσης. (Μονάδες 8)

β) Αν $P(1) = 10$, να βρείτε το υ. (Μονάδες 9)

γ) Αν $\upsilon = 10$, να βρείτε το $P(x)$. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 2/22688

(α) Το $P(x)$ διαιρούμενο με το $(x-2)$ δίνει πηλίκο (x^2-3x+2) και υπόλοιπο τον πραγματικό αριθμό $υ$, άρα από ταυτότητα Ευκλείδειος διαίρεσης έχουμε:

$$P(x) = (x-2)(x^2-3x+2)+υ \quad (1)$$

(β) Έχουμε, $P(1)=10 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} (1-2)(1^2-3\cdot 1+2)+υ=10 \Leftrightarrow υ=10$

(γ) Αν $υ=10$ η (1) γίνεται:

$$P(x) = (x-2)(x^2-3x+2)+10 = x^3-3x^2+2x-2x^2+6x-4+10$$

$$\Leftrightarrow P(x) = x^3-5x^2+8x+6$$

ΘΕΜΑ 2 / 22682.pdf

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + (\kappa - 6)x^2 - 7x + \kappa$.

α) Να βρείτε για ποιά τιμή του $\kappa \in \mathbb{R}$, το 2 είναι ρίζα του $P(x)$. (Μονάδες 12)

β) Αν $\kappa = 6$, να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2/22682

(α) Το 2 είναι ρίζα του $P(x)$, αν και μόνο αν,

$P(2)=0 \Leftrightarrow 2^3+(k-6)\cdot 2^2-7\cdot 2+k=0 \Leftrightarrow 8+4k-24-14+k=0 \Leftrightarrow$

$5k=30 \Leftrightarrow k=6$

(β) Αν $k=6$ τότε το πολυώνυμο γίνεται:

$P(x)=x^3+(6-6)x^2-7x+6 \Leftrightarrow P(x)=x^3-7x+6$

Οι πιθανές ακέραιες ρίζες του $P(x)$ είναι οι διαιρέτες του σταθερού όρου, δηλαδή $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$.

Είναι, $P(1)=1^3-7\cdot 1+6=0$

Οπότε, εκτελώ σχήμα Horner στο $P(x)$ για $\rho=1$, δηλαδή

$$\begin{array}{cccc|l} 1 & 0 & -7 & 6 & \rho=1 \\ \downarrow & 1 & 1 & -6 & \\ 1 & 1 & -6 & 0 & \end{array}$$

Έστω $\pi(x)=x^2+x-6$ το πηλίκο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $(x-1)$, άρα

$P(x)=(x-1)(x^2+x-6)$

Οπότε, $P(x)=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+x-6)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ \text{ή} \\ x^2+x-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x=1 \\ \text{ή} \\ x=2 \text{ ή } x=-3 \end{cases}$

ΘΕΜΑ 2 / 22683.pdf

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + αx^2 + βx + 6$.

α) Αν γνωρίζετε ότι η τιμή του πολυωνύμου για $x = 1$ είναι ίση με 10 και P(2) = 10, να βρείτε τα $α, β \in \mathbb{R}$ (Μονάδες 12)

β) Αν $α = -5$ και $β = 8$, να λύσετε την ανίσωση $P(x) > 10$. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2/22683

Έχουμε, $P(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 6$

(α) Είναι, $P(1)=10 \Leftrightarrow 1^3+\alpha\cdot 1^2+\beta\cdot 1+6=10 \Leftrightarrow \alpha+\beta=3 \Leftrightarrow$

$\alpha=3-\beta$ (1)

Επίσης, $P(2)=10 \Leftrightarrow 2^3+\alpha\cdot 2^2+\beta\cdot 2+6=10 \Leftrightarrow 8+4\alpha+2\beta=4$

$\Leftrightarrow 4\alpha+2\beta=-4 \overset{(1)}{\Longleftrightarrow} 4(3-\beta)+2\beta=-4 \Leftrightarrow 12-4\beta+2\beta=-4$

$\Leftrightarrow -2\beta=-16 \Leftrightarrow \beta=8$

Για $\beta=8$, η (1) γίνεται: $\alpha=3-8 \Leftrightarrow \alpha=-5$.

(β) Για $\alpha=-5$ και $\beta=8$ έχουμε: $P(x) = x^3-5x^2+8x+6$

Οπότε, $P(x)>10 \Leftrightarrow x^3-5x^2+8x+6>10 \Leftrightarrow x^3-5x^2+8x-4>0$

Έστω $Q(x)=x^3-5x^2+8x-4$, αρκεί να λύσω την ανίσωση: $Q(x)>0$.

Οι πιθανές ακέραιες ρίζες του $Q(x)$ είναι οι διαιρέτες του σταθερού όρου, δηλαδή $\pm 1, \pm 2, \pm 4$.

$Q(1)=1^3-5\cdot 1^2+8\cdot 1-4=0$

Εκτελώ σχήμα Horner στο $Q(x)$ για $\rho=1$, δηλαδή

1	−5	8	−4	ρ=1
	1	−4	4	
1	−4	4	0	

Έστω $\pi(x)=x^2-4x+4$ το πηλίκο της διαίρεσης του $Q(x)$ με το $(x-1)$, άρα

$Q(x)=(x-1)(x^2-4x+4)$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		2		$+\infty$
x^2-4x+4		$+$	0	$+$	

Άρα,

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2-4x+4		$+$		$+$	0	$+$	
$Q(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	

Επομένως, η ανίσωση $Q(x)>0$ γίνεται αληθής για κάθε $x \in (1,2) \cup (2,+\infty)$

ΘΕΜΑ 2 / 22681.pdf

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 2$. Αν το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x + 1$ και $P(2) = 18$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$ και $\beta = 2$ (Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την εξίσωση: $P(x) = 0$ (Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την ανίσωση: $P(x) \leq 0$ (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 2/22681

(α) • Το $(x+1)$ είναι παράγοντας του $P(x)$, αν και μόνο αν, $P(-1)=0 \Leftrightarrow (-1)^3+\alpha(-1)^2+\beta(-1)+2=0 \Leftrightarrow$

$-1+\alpha-\beta+2=0 \Leftrightarrow \alpha-\beta=-1 \Leftrightarrow \alpha=\beta-1 \quad (1)$

• $P(2)=18 \Leftrightarrow 2^3+\alpha\cdot 2^2+\beta\cdot 2+2=18 \Leftrightarrow 8+4\alpha+2\beta=16$

$\Leftrightarrow 4\alpha+2\beta=8 \Leftrightarrow 2\alpha+\beta=4 \overset{(1)}{\Longleftrightarrow} 2(\beta-1)+\beta=4 \Leftrightarrow$

$2\beta-2+\beta=4 \Leftrightarrow 3\beta=6 \Leftrightarrow \beta=2$

Για $\beta=2$ η (1) γίνεται: $\alpha=2-1 \Leftrightarrow \alpha=1$

(β) Για $\alpha=1$ και $\beta=2$, έχουμε: $P(x)=x^3+x^2+2x+2=$

$=x^2(x+1)+2(x+1)=(x+1)(x^2+2) \Leftrightarrow P(x)=(x+1)(x^2+2)$.

Έχουμε, $P(x)=0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2+2)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ \text{ή} \\ x^2+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ \text{ή} \\ \text{ΑΔΥΝΑΤΗ} \end{cases}$

(γ) Έχουμε, $P(x)=(x+1)(x^2+2)$.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$x+1$	$-$	0	$+$

x	$-\infty$	$+\infty$
x^2+2	$+$	

Οπότε,

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$x+1$	$-$	0	$+$
x^2+2	$+$		$+$
$P(x)$	$-$	0	$+$

Άρα, η ανίσωση γίνεται αληθής για κάθε $x\in[-\infty,-1]$

ΘΕΜΑ 2 / 22680.pdf

Δίνονται τα πολυώνυμα:

$P(x) = -2x^3 + \lambda^2(x^2 - 1) + \lambda(x^3 - 1) + \lambda + 9$ και

$Q(x) = (\lambda + 12)x^2 + (\lambda - 2)x^3 + (\lambda^2 - 9)x, \quad \lambda \in \mathbb{R}$.

α) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι και τα δύο πολυώνυμα είναι $3^{ου}$ βαθμού. Συμφωνείτε με την άποψη αυτή; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ είναι ίσα.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2/22680

(α) Έχουμε, • $P(x) = -2x^3 + \lambda^2(x^2-1) + \lambda(x^3-1) + \lambda + 9 \Leftrightarrow$

$P(x) = -2x^3 + \lambda^2 x^2 - \lambda^2 + \lambda x^3 - \lambda + \lambda + 9 \Leftrightarrow$

$P(x) = (\lambda - 2)x^3 + \lambda^2 x^2 - \lambda^2 + 9$

• $Q(x) = (\lambda + 12)x^2 + (\lambda - 2)x^3 + (\lambda^2 - 9)x \Leftrightarrow$

$Q(x) = (\lambda - 2)x^3 + (\lambda + 12)x^2 + (\lambda^2 - 9)x$

• Αν $\lambda - 2 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 2$, τότε τα $P(x)$ και $Q(x)$ είναι 3ου βαθμού.

• Αν $\lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2$, τότε $P(x) = 4x^2 + 5$ και $Q(x) = 14x^2 - 5x$, άρα τα $P(x)$ και $Q(x)$ είναι 2ου βαθμού.

(β) Από (α) έχουμε: $P(x) = (\lambda-2)x^3 + \lambda^2 x^2 - \lambda^2 + 9$ και $Q(x) = (\lambda - 2)x^3 + (\lambda + 12)x^2 + (\lambda^2 - 9)x$.

Τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ είναι ίσα, αν και μόνο αν,

$$\begin{cases} \lambda - 2 = \lambda - 2 & (1) \\ \lambda^2 = \lambda + 12 & (2) \\ \lambda^2 - 9 = 0 & (3) \\ -\lambda^2 + 9 = 0 & (4) \end{cases}$$

• Η (2) γίνεται: $\lambda^2 - \lambda - 12 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 4)(\lambda + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 4 \\ \text{ή} \\ \lambda = -3 \end{cases}$

• Η (3) γίνεται: $\lambda^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = 9 \Leftrightarrow \lambda = \pm\sqrt{9} \Leftrightarrow \lambda = \pm 3$

• Η (4) γίνεται: $-\lambda^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = 9 \Leftrightarrow \lambda = \pm\sqrt{9} \Leftrightarrow \lambda = \pm 3$

Άρα, για $\lambda = -3$ έχουμε $P(x) = Q(x)$.

ΘΕΜΑ 2 / 22649.pdf

α) Να βρείτε το υπόλοιπο και το πηλίκο της διαίρεσης $(x^3-6x^2+11x-2):(x-3)$.

(Μονάδες 10)

β) Αν $P(x)=x^3-6x^2+11x+\lambda$ να βρείτε το $\lambda\in\mathbb{R}$, ώστε η διαίρεση $P(x):(x-3)$ να έχει υπόλοιπο 0.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2/22649

(α) Έστω $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 2$ και ο διαιρέτης είναι της μορφής : $(x-\rho)$, άρα το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $(x-3)$ είναι ίσο με:

$$υ = P(3) = 3^3 - 6\cdot 3^2 + 11\cdot 3 - 2 = 27 - 54 + 33 - 2 = 4$$

(β) Η διαίρεση $P(x):(x-3)$ έχει υπόλοιπο 0, αν και μόνο αν, το $(x-3)$ είναι παράγοντας του $P(x)$, αν και μόνο αν, $P(3) = 0 \Leftrightarrow 3^3 - 6\cdot 3^2 + 11\cdot 3 + \lambda = 0 \Leftrightarrow$

$27 - 54 + 33 + \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = -6$

ΘΕΜΑ 2 / 22648.pdf

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+\alpha x^2-5x+\beta$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει ρίζα το 1 και το υπόλοιπο της διαίρεσής του με το $x-2$ είναι ίσο με - 4, να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 13)

β) Αν $\alpha = -2$ και $\beta = 6$, να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2/22648

(α) • Το 1 είναι ρίζα του $P(x)$, αν και μόνο αν,

$P(1) = 0 \Leftrightarrow 1^3 + \alpha \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 + \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 4 \Leftrightarrow \beta = 4 - \alpha \quad (1)$

• Το $P(x)$ διαιρούμενο με το $(x-2)$ δίνει υπόλοιπο -4, άρα $P(2) = -4 \Leftrightarrow 2^3 + \alpha \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 + \beta = -4 \Leftrightarrow$

$8 + 4\alpha - 10 + \beta = -4 \Leftrightarrow 4\alpha + \beta = -2 \overset{(1)}{\Longleftrightarrow} 4\alpha + 4 - \alpha = -2 \Leftrightarrow$

$3\alpha = -6 \Leftrightarrow \alpha = -2$

• Για $\alpha = -2$ η (1) γίνεται: $\beta = 4 - (-2) \Leftrightarrow \beta = 6$

(β) Για $\alpha = -2$ και $\beta = 6$, έχουμε: $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

Οι πιθανές ακέραιες ρίζες του $P(x)$ είναι οι διαιρέτες του σταθερού όρου, δηλαδή $\pm 1, \pm 2, \pm 3$ και ± 6.

Είναι, $P(1) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 + 6 = 0$, άρα εκτελώ σχήμα Horner στο $P(x)$ για $\rho = 1$, δηλαδή

1	−2	−5	6	$\rho = 1$
↓	1	−1	−6	
1	−1	−6	0	

Άρα, $f(x) = (x-1)(x^2 - x - 6) = (x-1)(x-3)(x+2)$

Επομένως, $f(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-3)(x+2) = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x - 1 = 0 \\ \text{ή} \\ x - 3 = 0 \\ \text{ή} \\ x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \text{ή} \\ x = 3 \\ \text{ή} \\ x = -2. \end{cases}$$

ΘΕΜΑ 2 / 22647.pdf

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x^3+x^2-5x+2$.

α) Να βρείτε τα σημεία τομής, της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 15)

β) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f, βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2/22647

(α) Είναι, $A_f = \mathbb{R}$. Έστω $y = 2x^3 + x^2 - 5x + 2$ η εξίσωση της C_f. Για $y = 0$, έχουμε $2x^3 + x^2 - 5x + 2 = 0$

Οι πιθανές ακέραιες ρίζες είναι οι διαιρέτες του σταθερού όρου, δηλαδή $\pm 1, \pm 2$.

Είναι, $f(1) = 2 \cdot 1^3 + 1^2 - 5 \cdot 1 + 2 = 0$, οπότε εκτελώ σχήμα Horner στο $f(x)$ για $\rho = 1$, δηλαδή

2	1	-5	2	$\rho = 1$
#	2	3	-2	
2	3	-2	0	

Άρα, $f(x) = (x-1)(2x^2 + 3x - 2)$

Είναι, $f(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(2x^2+3x-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 & (1) \\ \text{ή} \\ 2x^2 + 3x - 2 = 0 & (2) \end{cases}$

- Η (1) γίνεται: $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$
- Η (2) γίνεται: $\Delta = 3^2 - 4 \cdot 2(-2) = 9 + 16 = 25 > 0$

άρα $x_{1,2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 2} = \dfrac{-3 \pm 5}{4}$ $\begin{cases} x_1 = \dfrac{-3+5}{4} = \dfrac{1}{2} \\ x_2 = \dfrac{-3-5}{4} = -2 \end{cases}$

Επομένως, η C_f τέμνει τον $x'x$ στα σημεία $A(1,0)$, $B\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ και $\Gamma(-2, 0)$

(β) Η C_f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$, αν και μόνο αν, $f(x) < 0$

-

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	

-

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x^2+3x-2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Άρα,

x	$-\infty$	-2		$\frac{1}{2}$		1	$+\infty$
$x-1$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$2x^2+3x-2$	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Δηλαδή, η C_f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$ για κάθε $x \in (-\infty, -2) \cup (\frac{1}{2}, 1)$.

ΘΕΜΑ 2 / 22646.pdf

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 3x^3 - 10x^2 + 9x - 2$.

α) Να κάνετε τη διαίρεση του πολυωνύμου $P(x)$ με το πολυώνυμο $3x^2 - 4x + 1$ και να γράψετε την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης.

(Μονάδες 15)

β) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $P(x) = 0$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2/22646

(α) Εκτελώ την Ευκλείδεια διαίρεση του $P(x)$ με το $(3x^2-4x+1)$, δηλαδή

$$
\begin{array}{rrrr|l}
3x^3 & -10x^2 & +9x & -2 & 3x^2-4x+1 \\
\cline{5-5}
-3x^3 & +4x^2 & -x & (+) & x-2 \\
\hline
 & -6x^2 & +8x & -2 & \\
 & 6x^2 & -8x & +2 \ (+) & \\
\cline{2-4}
 & & & 0 &
\end{array}
$$

Άρα, $P(x) = (3x^2-4x+1)(x-2)$

(β) Από (α) έχουμε : $P(x) = (3x^2-4x+1)(x-2)$

άρα $P(x)=0 \Leftrightarrow (3x^2-4x+1)(x-2)=0 \Leftrightarrow$

$$
\begin{cases}
3x^2-4x+1=0 & (1) \\
\quad \text{ή} & \\
x-2=0 & (2)
\end{cases}
$$

• Η (1) γίνεται: $\Delta = (-4)^2 - 4\cdot 3\cdot 1 = 4 > 0$, άρα

$$x_{1,2} = \frac{-(-4)\pm\sqrt{4}}{2\cdot 3} = \frac{4\pm 2}{6} \begin{cases} x_1 = \frac{4+2}{6} = 1 \\ x_2 = \frac{4-2}{6} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

• Η (2) γίνεται: $x-2=0 \Leftrightarrow x=2$.

ΘΕΜΑ 2 / 22645.pdf

Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = 2x^4 - x^3 + \alpha x^2 - 5x + 6$$

διέρχεται από το σημείο Μ(-2,0),

α) να αποδείξετε ότι $\alpha = -14$ (Μονάδες 12)

β) να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2/22645

(α) $M(-2,0) \in C_f \Leftrightarrow f(-2)=0 \Leftrightarrow 2(-2)^4-(-2)^3+a(-2)^2-5(-2)+6=0$

$\Leftrightarrow 32+8+4a+10+6=0 \Leftrightarrow 4a+56=0 \Leftrightarrow 4a=-56 \Leftrightarrow$

$a=-14$

(β) Για $a=-14$, έχουμε: $f(x)=2x^4-x^3-14x^2-5x+6$,

άρα $A_f=\mathbb{R}$. Έστω $y=2x^4-x^3-14x^2-5x+6$ η

εξίσωση της C_f.

- Για $x=0$, έχουμε: $y=6$, άρα η C_f τέμνει τον $y'y$ στο σημείο $A(0,6)$
- Για $y=0$, έχουμε: $2x^4-x^3-14x^2-5x+6=0$.

Οι πιθανές ακέραιες ρίζες είναι οι διαιρέτες του σταθερού όρου, δηλαδή $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$.

Είναι, $f(-1)=2(-1)^4-(-1)^3-14(-1)^2-5(-1)+6=0$, οπότε εκτελώ σχήμα Horner στο $f(x)$ για $\rho=-1$, δηλ.

2	-1	-14	-5	6	$\rho=-1$
#	-2	3	11	-6	
2	-3	-11	6	0	

Είναι $\pi(x)=2x^3-3x^2-11x+6$, όπου $\pi(x)$ το πηλίκο της διαίρεσης $f(x):(x+1)$ και $U=0$

Άρα, $f(x)=(x+1)\pi(x) \Leftrightarrow f(x)=(x+1)(2x^3-3x^2-11x+6)$

Οι πιθανές ακέραιες ρίζες του $\pi(x)$ είναι οι διαιρέτες του σταθερού όρου, δηλαδή $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$.

Είναι, $\pi(-2) = 2(-2)^3 - 3(-2)^2 - 11(-2) + 6 = -16 - 12 + 22 + 6 = 0$

οπότε εκτελώ σχήμα Horner στο $\pi(x)$ για $\rho = -2$

Δηλαδή,

2	−3	−11	6	$\rho = -2$
↓	−4	14	−6	
2	−7	3	0	

Οπότε, $\pi(x) = (x+2)(2x^2 - 7x + 3)$

Επομένως, $f(x) = (x+1)(x+2)(2x^2 - 7x + 3)$ ή

$y = (x+1)(x+2)(2x^2 - 7x + 3)$

Για $y = 0$ έχουμε: $(x+1)(x+2)(2x^2 - 7x + 3) = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x+1 = 0 & (1) \\ \text{ή} & \\ x+2 = 0 & (2) \\ \text{ή} & \\ 2x^2 - 7x + 3 = 0 & (3) \end{cases}$$

• Η (1) γίνεται: $x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

• Η (2) γίνεται: $x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$

• Η (3) γίνεται: $\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 49 - 24 = 25 > 0$

άρα $x_{1,2} = \dfrac{-(-7) \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 2} = \dfrac{7 \pm 5}{4}$ $\begin{cases} x_1 = \dfrac{7+5}{4} = 3 \\ x_2 = \dfrac{7-5}{4} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

Άρα, η C_f τέμνει τον $x'x$ στα σημεία

$B(-1, 0)$, $\Gamma(-2, 0)$, $\Delta(3, 0)$ και $E\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

ΘΕΜΑ 2 / 22644.pdf

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = \lambda^2 x^3 - 4\lambda x + 3$, με $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές του λ, ώστε το $P(x)$ να έχει παράγοντα το $x - 1$.

(Μονάδες 10)

β) Αν $\lambda = 3$, να βρείτε όλες τις ρίζες του πολυωνύμου $P(x)$.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2/22644

(α) Το $(x-1)$ είναι παράγοντας του $P(x)$, αν και μόνο αν, $P(1)=0 \Leftrightarrow \lambda^2\cdot 1^3-4\lambda\cdot 1+3=0 \Leftrightarrow \lambda^2-4\lambda+3=0$

$\Leftrightarrow (\lambda-1)(\lambda-3)=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda-1=0 \\ \text{ή} \\ \lambda-3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda=1 \\ \text{ή} \\ \lambda=3\end{cases}$

(β) Αν $\lambda=3$, τότε $P(x)=9x^3-12x+3=3(3x^3-4x+1)$

$=3(3x^3-3x-x+1)=3\left[3x(x^2-1)-(x-1)\right]=$

$=3\left\{3x(x-1)(x+1)-(x-1)\right\}=3\left\{(x-1)\left[3x(x+1)-1\right]\right\}=$

$=3(x-1)(3x^2+3x-1)$

Έχουμε, $P(x)=0 \Leftrightarrow 3(x-1)(3x^2+3x-1)=0 \Leftrightarrow$

$\begin{cases}x-1=0 \quad (1) \\ \text{ή} \\ 3x^2+3x-1=0 \quad (2)\end{cases}$

• Η (1) γίνεται: $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$

• Η (2) γίνεται: $\Delta=3^2-4\cdot 3(-1)=9+12=21>0$

Οπότε, $x_{1,2}=\dfrac{-3\pm\sqrt{21}}{2\cdot 3}$ $\begin{cases} x_1=\dfrac{-3+\sqrt{21}}{6} \\ x_2=\dfrac{-3-\sqrt{21}}{6}\end{cases}$

ΘΕΜΑ 2 / 22643.pdf

Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta\,, \qquad \text{με } \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}\,,$$

το οποίο έχει ρίζες τους αριθμούς 0, 1 και 3.

α) Να δείξετε ότι $\beta = -4,\ \gamma = 3$ και $\delta = 0$. (Μονάδες 15)

β) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2/22643

(α) • Το 0 είναι ρίζα του $P(x)$, αν και μόνο αν,

$P(0)=0 \Leftrightarrow 0^3+\beta\cdot 0^2+\gamma\cdot 0+\delta=0 \Leftrightarrow \delta=0$

Οπότε, $P(x)=x^3+\beta x^2+\gamma x$

• Το 1 είναι ρίζα του $P(x)$, αν και μόνο αν,

$P(1)=0 \Leftrightarrow 1^3+\beta\cdot 1^2+\gamma\cdot 1=0 \Leftrightarrow 1+\beta+\gamma=0 \Leftrightarrow \gamma=-1-\beta$ (1)

• Το 3 είναι ρίζα του $P(x)$, αν και μόνο αν,

$P(3)=0 \Leftrightarrow 3^3+\beta\cdot 3^2+\gamma\cdot 3=0 \Leftrightarrow 27+9\beta+3\gamma=0 \Leftrightarrow$

$9+3\beta+\gamma=0 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} 9+3\beta-1-\beta=0 \Leftrightarrow 2\beta=-8 \Leftrightarrow \beta=-4$

• Για $\beta=-4$ η (1) γίνεται: $\gamma=-1-(-4) \Leftrightarrow \gamma=3$

(β) Για $\beta=-4$, $\gamma=3$ και $\delta=0$ έχουμε:

$P(x)=x^3-4x^2+3x=x(x^2-4x+3)$

•

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	

•

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
x^2-4x+3		$+$	0	$-$	0	$+$	

Άρα,

x	$-\infty$		0		1		3		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
x^2-4x+3		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Επομένως, $x\in(-\infty,0)\cup(1,3)$

ΘΕΜΑ 2 / 22642.pdf

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \alpha x^2 - 11x + 30$ με $\alpha \in \mathbb{R}$, για το οποίο γνωρίζουμε ότι η τιμή του για $x = 1$ είναι 16.

α) Να υπολογίσετε την τιμή του α. (Μονάδες 12)

β) Αν $\alpha = -4$ και το 2 είναι ρίζα της εξίσωσης $P(x) = 0$, να προσδιορίσετε τις άλλες ρίζες της εξίσωσης $P(x) = 0$. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2/22642

(α) Η τιμή του πολυωνύμου $P(x) = x^3 + ax^2 - 11x + 30$ για $x=1$ είναι 16, άρα

$P(1) = 16 \Leftrightarrow 1^3 + a\cdot 1^2 - 11\cdot 1 + 30 = 16 \Leftrightarrow a = 16 - 20 \Leftrightarrow a = -4$

(β) Αν $a = -4$, τότε $P(x) = x^3 - 4x^2 - 11x + 30$. Επίσης, γνωρίζουμε από την άσκηση ότι το 2 είναι ρίζα του $P(x)$, άρα εκτελώ σχήμα Horner στο $P(x)$ για $\rho = 2$, δηλαδή

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & -4 & -11 & 30 & \rho = 2 \\ \# & 2 & -4 & 30 & \\ 1 & -2 & -15 & 0 & \end{array}$$

Οπότε, $P(x) = (x-2)(x^2 - 2x - 15)$, όπου $\pi(x) = x^2 - 2x - 15$ το πηλίκο της διαίρεσης $P(x) : (x-2)$.

Άρα, $P(x) = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2-2x-15) = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x - 2 = 0 & (1) \\ \text{ή} & \\ x^2 - 2x - 15 = 0 & (2) \end{cases}$$

• Η (1) γίνεται: $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

• Η (2) γίνεται: $\Delta = (-2)^2 - 4\cdot 1(-15) = 64 > 0$

οπότε $x_{1,2} = \dfrac{-(-2) \pm \sqrt{64}}{2\cdot 1} = \dfrac{2 \pm 8}{2}$ → $x_1 = \dfrac{2+8}{2} = 5$, $x_2 = \dfrac{2-8}{2} = -3$

Άρα, οι ρίζες της $P(x) = 0$ είναι: $x = 2$, $x = 5$, $x = -3$.

ΘΕΜΑ 2 / 22641.pdf

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \alpha x^2 - 11x + 30$ με $\alpha \in \mathbb{R}$, για το οποίο γνωρίζουμε ότι έχει ρίζα το 5.

α) Να υπολογίσετε την τιμή του α. (Μονάδες 12)

β) Για $\alpha = -4$, να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2/22641

(α) Το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + ax^2 - 11x + 30$, $a \in \mathbb{R}$ έχει ρίζα το 5, αν και μόνο αν,

$P(5) = 0 \Leftrightarrow 5^3 + a \cdot 5^2 - 11 \cdot 5 + 30 = 0 \Leftrightarrow$

$125 + 25a - 55 + 30 = 0 \Leftrightarrow 25a = -100 \Leftrightarrow a = -4$

(β) Για $a = -4$ το πολυώνυμο $P(x)$ γίνεται:

$P(x) = x^3 - 4x^2 - 11x + 30$

Από (α) έχουμε ότι για $a = -4$ το 5 είναι ρίζα του $P(x)$, άρα εκτελώ σχήμα Horner στο $P(x)$ για $\rho = 5$,

δηλαδή

1	−4	−11	30	$\rho = 5$
#	5	5	−30	
1	1	−6	0	

Οπότε, $P(x) = (x-5)(x^2 + x - 6)$, όπου $\pi(x) = x^2 + x - 6$ το πηλίκο της διαίρεσης $P(x) : (x-5)$

Άρα, $P(x) = 0 \Leftrightarrow (x-5)(x^2+x-6) = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x - 5 = 0 \\ \text{ή} \\ x^2 + x - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ \text{ή} \\ x = -3 \text{ ή } x = 2 \end{cases}$$

ΘΕΜΑ 2 / 22640.pdf

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 2x^2 + x - 12$

α) Να αιτιολογήσετε γιατί το διώνυμο $x - 3$ είναι παράγοντας του $P(x)$.

(Μονάδες 13)

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2/22640

(α) Το $(x-3)$ είναι παράγοντας του $P(x)$, αν και μόνο αν, $P(3)=0 \Leftrightarrow 3^3-2\cdot 3^2+3-12=0 \Leftrightarrow 27-18-9=0 \Leftrightarrow 0=0$ που ισχύει. Άρα, το $(x-3)$ είναι παράγοντας του $P(x)$.

(β) Εκτελώ σχήμα Horner στο $P(x)$ για $\rho=3$, διότι γνωρίζουμε από (α) ότι $P(3)=0$

Δηλαδή,

$$\begin{array}{cccc|l} 1 & -2 & 1 & -12 & \rho=3 \\ \hline & 3 & 3 & 12 & \\ 1 & 1 & 4 & 0 & \end{array}$$

Άρα, $P(x)=(x-3)(x^2+x+4)$, όπου $\pi(x)=x^2+x+4$ το πηλίκο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $(x-3)$

Έχουμε, $P(x)=0 \Leftrightarrow (x-3)(x^2+x+4)=0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x-3=0 \\ \text{ή} \\ x^2+x+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ \text{ή} \\ \text{ΑΔΥΝΑΤΗ, αφού } \Delta=1^2-4\cdot 1\cdot 4=-15<0 \end{cases}$$

ΘΕΜΑ 4 / 22734.pdf

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο με εμβαδό $E = 30cm^2$ του οποίου η υποτείνουσα είναι κατά $1cm$ μεγαλύτερη από τη μία κάθετη πλευρά. Αν ονομάσουμε x το μήκος αυτής της κάθετης πλευράς και y το μήκος της άλλης κάθετης (σε cm), τότε:

α) Να δείξετε ότι οι αριθμοί x, y ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$y = \frac{60}{x} \quad \text{και} \quad (x+1)^2 = x^2 + y^2.$$

(Μονάδες 4)

β) Να δείξετε ότι ο αριθμός x ικανοποιεί την εξίσωση:

$$2x^3 + x^2 - 3600 = 0.$$

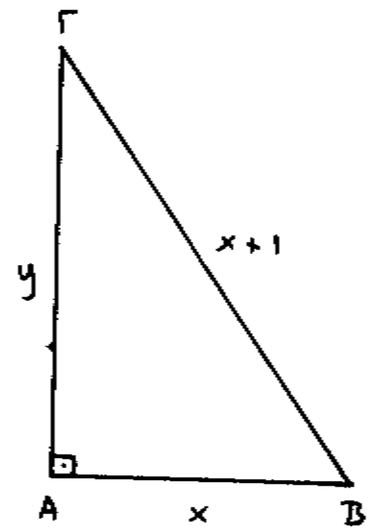
(Μονάδες 4)

γ) Αν γνωρίζετε ότι το μήκος της πλευράς x είναι αριθμός ακέραιος και μικρότερος του 15, να βρείτε την τιμή του x καθώς και τα μήκη των άλλων πλευρών του τριγώνου.

(Μονάδες 12)

δ) Να εξετάσετε αν υπάρχει άλλο ορθογώνιο τρίγωνο (με διαφορετικά μήκη πλευρών από αυτά που προσδιορίσατε στο ερώτημα γ)) το οποίο ικανοποιεί τα αρχικά δεδομένα του προβλήματος. (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4/22734



(α) Με $x>0$ και $y>0$ έχουμε ότι

$E = 30cm^2$, άρα $\frac{1}{2}x\cdot y = 30 \Leftrightarrow$

$xy = 60 \Leftrightarrow y = \frac{60}{x}$ (1)

Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε ότι: $x^2+y^2=(x+1)^2$

(β) Από το (α) έχουμε: $x^2+y^2=(x+1)^2 \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$

$x^2+\left(\frac{60}{x}\right)^2=(x+1)^2 \Leftrightarrow x^2+\frac{3600}{x^2}=x^2+2x+1 \Leftrightarrow$

$2x+1=\frac{3600}{x^2} \Leftrightarrow 2x^3+x^2-3600=0$

(γ) Είναι, $0<x<15$ και $x\in\mathbb{N}$. Από (β) έχουμε την εξίσωση: $2x^3+x^2-3600=0$.

Οι πιθανές ακέραιες ρίζες είναι οι διαιρέτες του σταθερού όρου, επίσης $0<x<15$ και $x\in\mathbb{N}$ δηλαδή $1,2,3,4,5,6,8,9,10,12$

Είναι, $P(12)=0$, άρα εκτελώ σχήμα Horner για $\rho=12$, δηλαδή

2	1	0	−3600	$\rho=12$
#	24	300	3600	
2	25	300	0	

Άρα, $2x^3+x^2-3600=(x-12)(2x^2+25x+300)$

Έχουμε, $2x^3+x^2-3600=0 \Leftrightarrow (x-12)(2x^2+25x+300)=0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-12=0 \\ \quad ή \\ 2x^2+25x+300=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=12 \quad \underline{ΔΕΚΤΟ} \\ \quad ή \\ \text{ΑΔΥΝΑΤΗ, αφού } Δ=-1775<0 \end{cases}$$

Οπότε, $(ΑΒ)=12\ cm$, $(ΒΓ)=12+1=13\ cm$,

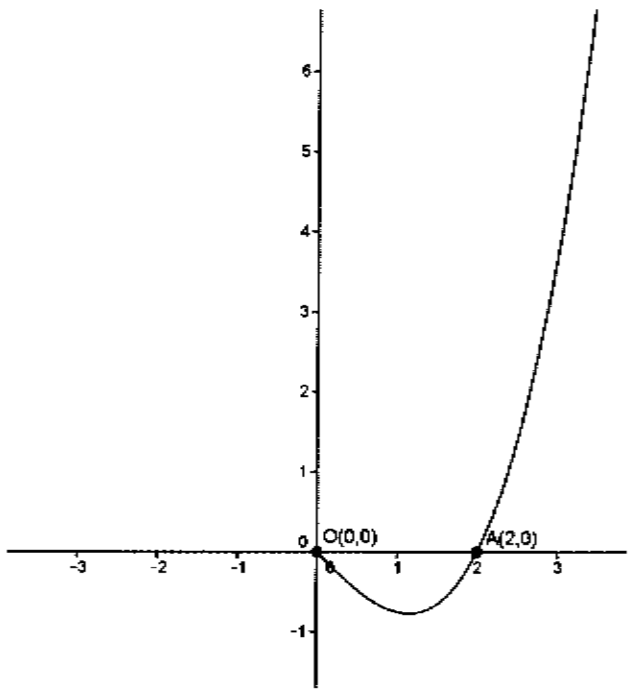
$$(ΑΓ) \overset{(1)}{=} \frac{60}{12}=5\ cm$$

(δ) Η εξίσωση: $2x^3+x^2-3600=0$ έχει μοναδική λύση τη $x=12$ όπως δείξαμε στο (γ) άρα δεν υπάρχει άλλο ορθογώνιο τρίγωνο το οποίο να ικανοποιεί τα αρχικά δεδομένα του προβλήματος.

ΘΕΜΑ 4 / 22759.pdf

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται τμήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$$f(x)=\frac{1}{4}x^3+\gamma x+\delta,\quad x\in\mathbb{R} \text{ και } \gamma,\ \delta \text{ πραγματικές σταθερές.}$$



α) Με βάση τη γραφική παράσταση, να αποδείξετε ότι $\gamma=-1$ και $\delta=0$.

(Μονάδες 5)

β) Θεωρώντας τώρα δεδομένο ότι $f(x)=\frac{1}{4}x^3-x$:

i. Να αποδείξετε ότι $f(-x)=-f(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. (Μονάδες 5)

ii. Να μεταφέρετε στην κόλα σας το σχήμα και να συμπληρώσετε τη γραφική παράσταση της f για $x<0$. (Μονάδες 5)

iii. Να επαληθεύσετε ότι $f(1)=-\frac{3}{4}$ και, στη συνέχεια, να λύσετε τις εξισώσεις

$$f(x)=-\frac{3}{4} \quad \text{και} \quad f(x)=\frac{3}{4}\ .$$

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4/22759

(α) • $O(0,0) \in C_f \Leftrightarrow f(0)=0 \Leftrightarrow \delta = 0$, άρα $f(x)=\frac{1}{4}x^3+\gamma x,\ x\in\mathbb{R}$

• $A(2,0) \in C_f \Leftrightarrow f(2)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}\cdot 2^3+\gamma\cdot 2=0 \Leftrightarrow 2+2\gamma=0 \Leftrightarrow$

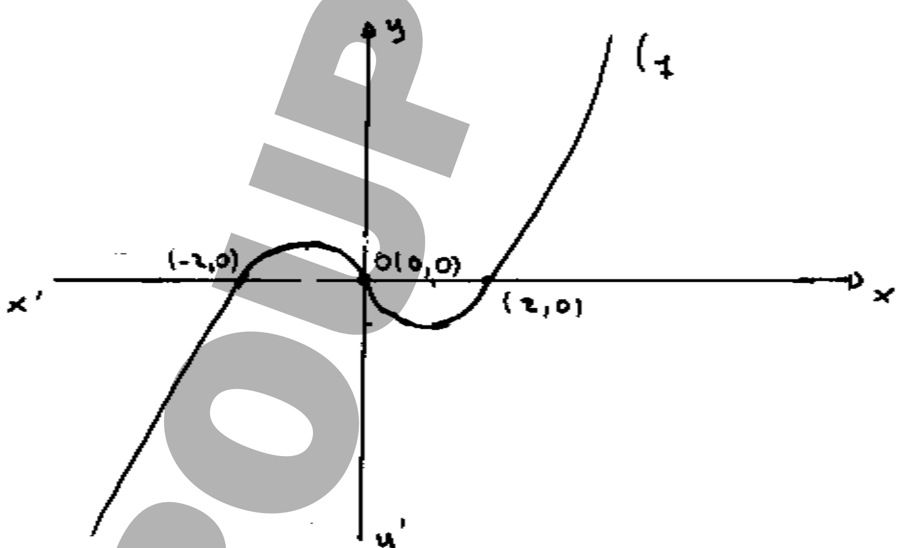
$2\gamma=-2 \Leftrightarrow \gamma=-1$. Άρα, $f(x)=\frac{1}{4}x^3-x,\ x\in\mathbb{R}$.

(β)(i) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$, έχουμε:

$$f(-x)=\frac{1}{4}(-x)^3-(-x)=-\frac{1}{4}x^3+x=-\left(\frac{1}{4}x^3-x\right)=-f(x)$$

(ii) Από (βi) έχουμε δείξει ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει: $f(-x)=-f(x)$. Επίσης, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι: $-x\in\mathbb{R}$, άρα η f είναι περιττή, επομένως η C_f είναι συμμετρική ως προς το $O(0,0)$.

Δηλαδή,



(γ)(iii) Είναι, $f(1)=\frac{1}{4}\cdot 1^3-1=\frac{1}{4}-1=\frac{1}{4}-\frac{4}{4}=-\frac{3}{4}$

• Με $x\in\mathbb{R}$ έχουμε: $f(x)=-\frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{4}x^3-x=-\frac{3}{4} \Leftrightarrow$

$\frac{1}{4}x^3-x+\frac{3}{4}=0 \Leftrightarrow x^3-4x+3=0 \Leftrightarrow x^3-x-3x+3=0$

$\Leftrightarrow x(x^2-1)-3(x-1)=0 \Leftrightarrow x(x-1)(x+1)-3(x-1)=0 \Leftrightarrow$

$(x-1)[x(x+1)-3]=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+x-3)=0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x-1=0 & (1) \\ \quad ή \\ x^2+x-3=0 & (2) \end{cases}$$

• Η (1) γίνεται: $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$

• Η (2) γίνεται: $\Delta = 1^2-4\cdot 1(-3)=13>0$

οπότε $x_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$ $\quad x_1=\dfrac{-1+\sqrt{13}}{2}$, $\quad x_2=\dfrac{-1-\sqrt{13}}{2}$

• Με $x\in\mathbb{R}$ έχουμε: $f(x)=\dfrac{3}{4} \Leftrightarrow \dfrac{1}{4}x^3-x=\dfrac{3}{4} \Leftrightarrow$

$\dfrac{1}{4}x^3-x-\dfrac{3}{4}=0 \Leftrightarrow x^3-4x-3=0 \Leftrightarrow x^3-x-3x-3=0 \Leftrightarrow$

$x(x^2-1)-3(x+1)=0 \Leftrightarrow x(x-1)(x+1)-3(x+1)=0 \Leftrightarrow$

$(x+1)[x(x-1)-3]=0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2-x-3)=0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x+1=0 & (3) \\ \quad ή \\ x^2-x-3=0 & (4) \end{cases}$$

• Η (3) γίνεται: $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$

• Η (4) γίνεται: $\Delta=(-1)^2-4\cdot 1(-3)=13>0$

οπότε $x_{1,2}=\dfrac{-(-1)\pm\sqrt{13}}{2\cdot 1}=\dfrac{1\pm\sqrt{13}}{2}$ $\quad x_1=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$, $\quad x_2=\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}$

ΘΕΜΑ 4 / 22762.pdf

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=3x^4-12x^3+8x^2+\alpha x+\beta$, όπου α, β σταθεροί πραγματικοί αριθμοί. Αν το πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο με $x+1$ αφήνει υπόλοιπο $16+P(1)$ και διαιρούμενο με $x-1$ αφήνει υπόλοιπο $16-P(-1)$, τότε:

α) να αποδείξετε ότι $P(1)=0$ και $P(-1)=16$

(Μονάδες 8)

β) να αποδείξετε ότι α = 4 και β = -3

(Μονάδες 9)

γ) να αποδείξετε ότι $P(4)\cdot P(5)\cdot P(6)\cdot P(7)\neq 0$

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4/22762

(α) • Το $P(x)$ διαιρούμενο με το $(x+1)$ δίνει υπόλοιπο $16+P(1)$, άρα $P(-1)=16+P(1)$. (1)

• Το $P(x)$ διαιρούμενο με το $(x-1)$ δίνει υπόλοιπο $16-P(-1)$, άρα $P(1)=16-P(-1) \overset{(1)}{\iff} P(1)=16-[16+P(1)]$

$\iff P(1)=16-16-P(1) \iff 2P(1)=0 \iff P(1)=0$

Για $P(1)=0$ η (1) γίνεται: $P(-1)=16$

(β) Από (α) γνωρίζουμε ότι:

$$\begin{cases} P(1)=0 \\ P(-1)=16 \end{cases} \iff \begin{cases} 3\cdot 1^4-12\cdot 1^3+8\cdot 1^2+\alpha\cdot 1+\beta=0 \\ 3(-1)^4-12(-1)^3+8(-1)^2+\alpha(-1)+\beta=16 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} -1+\alpha+\beta=0 \\ 23-\alpha+\beta=16 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha=1-\beta \\ 23-(1-\beta)+\beta=16 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha=1-\beta \\ 22+2\beta=16 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} \alpha=1-\beta \\ 11+\beta=8 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha=1-(-3) \\ \beta=-3 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha=4 \\ \beta=-3 \end{cases}$$

(γ) Για $\alpha=4$ και $\beta=-3$, έχουμε:

$P(x)=3x^4-12x^3+8x^2+4x-3$

Οι πιθανές ακέραιες ρίζες της $P(x)=0$ είναι οι διαιρέτες του σταθερού όρου, δηλαδή $\pm 1, \pm 3$.

Οπότε, $P(4)\neq 0$, $P(5)\neq 0$, $P(6)\neq 0$, $P(7)\neq 0$, άρα $P(4)P(5)P(6)P(7)\neq 0$.

ΘΕΜΑ 4 / 22764.pdf

Έστω $P(x)$ πολυώνυμο τρίτου βαθμού το οποίο διαιρείται με το πολυώνυμο x^2+2x και είναι τέτοιο, ώστε $P(1)=0$ και $P(2) = 8$.

α) Να αποδείξετε ότι $P(x)=x^3+x^2-2x$. (Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=8$. (Μονάδες 6)

γ) Να λύσετε την ανίσωση $P(x)>2$. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4/22764

(α) Το $P(x)$ είναι 3ου βαθμού πολυώνυμο.

Έστω $P(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$, το οποίο διαιρείται με το $x^2 + 2x = x(x+2)$, άρα το x είναι παράγοντας του $P(x)$ όπως και το $(x+2)$.

Επομένως, το $(x-0)$ είναι παράγοντας του $P(x)$, αν και μόνο αν, $P(0) = 0 \Leftrightarrow \delta = 0$

Άρα, το πολυώνυμο γίνεται: $P(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x$.

Επίσης, το $(x+2)$ είναι παράγοντας του $P(x)$, αν και μόνο αν, $P(-2) = 0 \Leftrightarrow \alpha(-2)^3 + \beta(-2)^2 + \gamma(-2) = 0$

$\Leftrightarrow -8\alpha + 4\beta - 2\gamma = 0 \Leftrightarrow -4\alpha + 2\beta - \gamma = 0 \Leftrightarrow \gamma = -4\alpha + 2\beta$ (1)

Είναι, $P(1) = 0 \Leftrightarrow \alpha \cdot 1^3 + \beta \cdot 1^2 + \gamma \cdot 1 = 0 \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$

$\alpha + \beta - 4\alpha + 2\beta = 0 \Leftrightarrow -3\alpha + 3\beta = 0 \Leftrightarrow -\alpha + \beta = 0 \Leftrightarrow$

$\alpha = \beta$ (2)

Είναι, $P(2) = 8 \Leftrightarrow \alpha \cdot 2^3 + \beta \cdot 2^2 + \gamma \cdot 2 = 8 \Leftrightarrow$

$8\alpha + 4\beta + 2\gamma = 8 \Leftrightarrow 4\alpha + 2\beta + \gamma = 4 \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$

$4\alpha + 2\beta - 4\alpha + 2\beta = 4 \Leftrightarrow 4\beta = 4 \Leftrightarrow \beta = 1$

Οπότε, η (2) γίνεται: $\alpha = 1$

Για $\alpha = 1$ και $\beta = 1$ η (1) γίνεται: $\gamma = -4 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \Leftrightarrow$

$\gamma = -2$.

Επομένως, $P(x) = 1 \cdot x^3 + 1 \cdot x^2 - 2x \Leftrightarrow P(x) = x^3 + x^2 - 2x$.

(β) Με $x \in \mathbb{R}$ έχουμε: $P(x) = 8 \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 2x = 8 \Leftrightarrow$

$x^3+x^2-2x-8=0$. Από την υπόθεση έχουμε ότι: $P(2)=8$, άρα η $x=2$ είναι ρίζα της $P(x)=8$, επομένως εκτελώ σχήμα Horner για $ρ=2$, δηλαδή

1	1	-2	-8	$ρ=2$
#	2	6	8	
1	3	4	0	

Οπότε,

$$x^3+x^2-2x-8=(x-2)(x^2+3x+4)$$

Άρα, $x^3+x^2-2x-8=0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2+3x+4)=0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x-2=0 \\ ή \\ x^2+3x+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ ή \\ \text{Αδύνατη, αφού } Δ=-7<0 \end{cases}$$

(γ) Έχουμε, $P(x)>2 \Leftrightarrow x^3+x^2-2x>2 \Leftrightarrow x^3+x^2-2x-2>0$

$\Leftrightarrow x^2(x+1)-2(x+1)>0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2-2)>0$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
x^2-2		$+$	0	$-$	0	$+$	

Οπότε,

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		-1		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2-2		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$(x+1)(x^2-2)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Επομένως, η $P(x)>2$ ικανοποιείται για κάθε

$x \in (-\sqrt{2},-1) \cup (\sqrt{2},+\infty)$

ΘΕΜΑ 4 / 22766.pdf

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=(\kappa^2-1)x^4+\frac{1}{2}(\kappa+1)x^3+(\kappa-1)x^2-3\kappa x+\lambda$, $\kappa,\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να υπολογίσετε τις τιμές των κ και λ αν το πολυώνυμο $P(x)$ είναι 3ου βαθμού και το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x-1$ είναι ίσο με -4. (Μονάδες 7)

β) Για κ = 1 και λ = -2

i. Να γράψετε την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)$ με το $x-1$.

(Μονάδες 5)

ii. Να λύσετε την εξίσωση $P(x)+4=x^2-1$. (Μονάδες 7)

iii. Να λύσετε την ανίσωση $\frac{P(x)}{(x-1)^2(x+2)}\geq 1$. (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4/22766

(α). Το $P(x)$ είναι 3ου βαθμού, αν και μόνο αν,

$$\begin{cases} \kappa^2-1=0 \\ \text{και} \\ \frac{1}{2}(\kappa+1)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa^2=1 \\ \text{και} \\ \kappa+1\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa=1 \text{ ή } \kappa=-1 \\ \text{και} \\ \kappa\neq -1 \end{cases}$$ Άρα, $\kappa=1$.

• Το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $(x-1)$ είναι ίσο με -4, δηλαδή

$$P(1)=-4 \Leftrightarrow (\kappa^2-1)\cdot 1^4+\frac{1}{2}(\kappa+1)\cdot 1^3+(\kappa-1)\cdot 1^2-3\kappa\cdot 1+\lambda=-4$$

$$\xLeftrightarrow{\kappa=1} \frac{1}{2}(1+1)-3\cdot 1+\lambda=-4 \Leftrightarrow -2+\lambda=-4 \Leftrightarrow \lambda=-2$$

(β) Για $\kappa=1$ και $\lambda=-2$ έχουμε: $P(x)=x^3-3x-2$.

(i) Εκτελώ σχήμα Horner στο $P(x)$ για $\rho=1$, δηλαδή

1	0	−3	−2	ρ=1
↓	1	1	−2	
1	1	−2	−4	

Οπότε, το πηλίκο της διαίρεσης: $P(x):(x-1)$ είναι $\pi(x)=x^2+x-2$ και το υπόλοιπο είναι $v=-4$

Άρα, από ταυτότητα Ευκλείδειας Διαίρεσης, έχουμε: $P(x)=(x-1)(x^2+x-2)-4$

(ii) Με $x\in\mathbb{R}$ έχουμε, $P(x)+4=x^2-1 \xLeftrightarrow{(i)}$

$$(x-1)(x^2+x-2)-4+4=x^2-1 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+x-2)=(x-1)(x+1)$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2+x-2)-(x-1)(x+1)=0 \Leftrightarrow (x-1)\left[(x^2+x-2)-(x+1)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2+x-2-x-1)=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2-3)=0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x-1=0 \\ \text{ή} \\ x^2-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ \text{ή} \\ x^2=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1. \\ \text{ή} \\ x=\pm\sqrt{3}. \end{cases}$$

(iii) (Με $(x-1)^2(x+2)\neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases}(x-1)^2\neq 0\\ \text{και}\\ x+2\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\neq 1\\ \text{και}\\ x\neq -2\end{cases}$, έχουμε:)

$$\frac{P(x)}{(x-1)^2(x+2)}\geq 1 \overset{(\beta)}{\Leftrightarrow} \frac{x^3-3x-2}{(x-1)^2(x+2)}\geq 1 \Leftrightarrow \frac{x^3-x-2x-2}{(x-1)^2(x+2)}\geq 1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x(x-1)(x+1)-2(x+1)}{(x-1)^2(x+2)}-1\geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x+1)[x(x-1)-2]}{(x-1)^2(x+2)}-1\geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{(x+1)(x^2-x-2)}{(x-1)^2(x+2)}-\frac{(x-1)^2(x+2)}{(x-1)^2(x+2)}\geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{(x+1)(x-2)(x+1)-(x-1)^2(x+2)}{(x-1)^2(x+2)}\geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{(x-2)(x^2+2x+1)-(x+2)(x^2-2x+1)}{(x-1)^2(x+2)}\geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x^3+2x^2+x-2x^2-4x-2-(x^3-2x^2+x+2x^2-4x+2)}{(x-1)^2(x+2)}\geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x^3-3x-2-(x^3-3x+2)}{(x-1)^2(x+2)}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{-4}{(x-1)^2(x+2)}\geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}-4(x-1)^2(x+2)\geq 0\\ \text{και}\\ (x-1)^2(x+2)\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-1)^2(x+2)\leq 0 & (1)\\ \text{και}\\ x\neq 1 \text{ και } x\neq -2 & (2)\end{cases}$$

• Η (1) γίνεται:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$(x-1)^2$		$+$	0	$+$	

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$	

Άρα,

x	$-\infty$	-2		1		$+\infty$
$(x-1)^2$	$+$	‖	$+$	‖	$+$	
$x+2$	$-$	‖	$+$	‖	$+$	
$(x-1)^2(x+2)$	$-$	‖	$+$	‖	$+$	

Δηλαδή, $x\in(-\infty,-2)$

ΘΕΜΑ 4 / 22769.pdf

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=2x^3+\alpha x^2+\beta x+2$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-2$ και το υπόλοιπο της διαίρεσής του με το $x+1$ είναι ίσο με -6, να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 7)

β) Αν $\alpha = -5$ και $\beta = 1$, να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$. (Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $2\sigma\upsilon\nu^3\omega + 5\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu\omega - 3 = 0$. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4/22769

Έχουμε $P(x) = 2x^3 + ax^2 + \beta x + 2$, με $a, \beta \in \mathbb{R}$.

(α) • Το $P(x)$ έχει παράγοντα το $(x-2)$, αν και μόνο αν, $P(2) = 0 \Leftrightarrow 2\cdot 2^3 + a\cdot 2^2 + \beta\cdot 2 + 2 = 0 \Leftrightarrow$

$16 + 4a + 2\beta + 2 = 0 \Leftrightarrow 4a + 2\beta + 18 = 0 \Leftrightarrow 2a + \beta + 9 = 0$

$\Leftrightarrow \beta = -2a - 9 \quad (1)$

• Το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $(x+1)$ είναι -6, άρα $P(-1) = -6 \Leftrightarrow$

$2(-1)^3 + a(-1)^2 + \beta(-1) + 2 = -6 \Leftrightarrow -2 + a - \beta + 2 = -6 \Leftrightarrow$

$a - \beta = -6 \overset{(1)}{\Longleftrightarrow} a - (-2a - 9) = -6 \Leftrightarrow a + 2a + 9 = -6$

$\Leftrightarrow 3a = -15 \Leftrightarrow a = -5$

• Για $a = -5$ η (1) γίνεται: $\beta = -2(-5) - 9 \Leftrightarrow \beta = 1$

(β) Για $a = -5$ και $\beta = 1$ έχουμε: $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + x + 2$.

Οι πιθανές ακέραιες ρίζες είναι οι διαιρέτες του σταθερού όρου, δηλαδή $\pm 1, \pm 2$.

$P(1) = 2\cdot 1^3 - 5\cdot 1^2 + 1 + 2 = 0$

Εκτελώ σχήμα Horner στο $P(x)$ για $\rho = 1$, δηλαδή

2	-5	1	2	$\rho = 1$
↓	2	-3	-2	
2	-3	-2	0	

Έστω $\pi(x)$ το πηλίκο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $(x-1)$, άρα $\pi(x) = 2x^2-3x-2$.

Άρα, $P(x) = (x-1)(2x^2-3x-2)$.

Έχουμε, $P(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(2x^2-3x-2) = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x-1=0 \\ \text{ή} \\ 2x^2-3x-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ \text{ή} \\ x=2 \text{ ή } x=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

(γ) Είναι, $2\sigma\upsilon\nu^3\omega + 5\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu\omega - 3 = 0 \Leftrightarrow$

$2\sigma\upsilon\nu^3\omega + 5(1-\sigma\upsilon\nu^2\omega) + \sigma\upsilon\nu\omega - 3 = 0 \Leftrightarrow$

$2\sigma\upsilon\nu^3\omega + 5 - 5\sigma\upsilon\nu^2\omega + \sigma\upsilon\nu\omega - 3 = 0 \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu^3\omega - 5\sigma\upsilon\nu^2\omega + \sigma\upsilon\nu\omega + 2 = 0$

Θέτω : $\sigma\upsilon\nu\omega = y$, με $-1 \le y \le 1$ άρα η παραπάνω εξίσωση γίνεται: $2y^3-5y^2+y+2=0 \overset{(\beta)}{\Leftrightarrow} P(y)=0$

$$\overset{(\beta)}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} y=1 & \text{ΔΕΚΤΟ} \\ \text{ή} \\ y=2 & \text{ΑΠΟΡ} \\ \text{ή} \\ y=-\frac{1}{2} & \text{ΔΕΚΤΟ} \end{cases}$$

- Για $y=1$, έχουμε: $\sigma\upsilon\nu\omega = 1 \Leftrightarrow \omega = 2\kappa\pi,\ \kappa\in\mathbb{Z}$
- Για $y=-\frac{1}{2}$, έχουμε: $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\omega = -\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow$

$\sigma\upsilon\nu\omega = \sigma\upsilon\nu\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\omega = \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \omega = 2\kappa\pi + \frac{2\pi}{3} \\ \text{ή} \\ \omega = 2\kappa\pi - \frac{2\pi}{3} \end{cases},\ \kappa\in\mathbb{Z}$$

ΘΕΜΑ 4 / 22772.pdf

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^4-x^3+\kappa x^2+x+\lambda$ με $\kappa,\lambda\in\Re$.

α) Να βρείτε τις τιμές των $\kappa,\lambda\in\Re$ όταν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει ρίζα το 1 και παράγοντα το $x+2$.

(Μονάδες 7)

β) Για $\kappa=-7$ και $\lambda=6$ να λυθεί η εξίσωση $P(x)=0$.

(Μονάδες 9)

γ) Για $\kappa=-7$ και $\lambda=6$ να λυθεί η ανίσωση $\frac{P(x)}{x-5}\geq 0$.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4/22772

Έχουμε, $P(x) = x^4 - x^3 + κx^2 + x + λ$, με $κ, λ \in \mathbb{R}$.

(α) • Το $P(x)$ έχει ρίζα το 1, αν και μόνο αν,

$P(1) = 0 \Leftrightarrow 1^4 - 1^3 + κ \cdot 1^2 + 1 + λ = 0 \Leftrightarrow κ + λ + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$κ = -λ - 1$ (1)

• Το $P(x)$ έχει παράγοντα το $(x+2)$, αν και μόνο αν, $P(-2) = 0 \Leftrightarrow (-2)^4 - (-2)^3 + κ(-2)^2 - 2 + λ = 0$

$\Leftrightarrow 16 + 8 + 4κ - 2 + λ = 0 \Leftrightarrow 4κ + λ + 22 = 0 \overset{(1)}{\Longleftrightarrow}$

$4(-λ-1) + λ + 22 = 0 \Leftrightarrow -4λ - 4 + λ + 22 = 0 \Leftrightarrow -3λ + 18 = 0$

$\Leftrightarrow 3λ = 18 \Leftrightarrow λ = 6$

Για $λ = 6$ η (1) γίνεται: $κ = -6 - 1 \Leftrightarrow κ = -7$.

(β) Για $κ = -7$ και $λ = 6$ έχουμε:

$P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$. Οι πιθανές ακέραιες ρίζες είναι οι διαιρέτες του σταθερού όρου, δηλαδή

$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$.

$P(1) = 1^4 - 1^3 - 7 \cdot 1 + 1 + 6 = 0$, οπότε εκτελώ σχήμα Horner στο $P(x)$ για $ρ = 1$, δηλαδή

1	-1	-7	1	6	$ρ = 1$
↓	1	0	-7	-6	
1	0	-7	-6	0	

Έστω $Q(x) = x^3 + 0x^2 - 7x - 6$ το πηλίκο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $(x-1)$, δηλαδή

$P(x) = (x-1)\cdot Q(x) \Leftrightarrow P(x) = (x-1)(x^3-7x-6)$.

Οι πιθανές ακέραιες ρίζες του $Q(x)$ είναι οι διαιρέτες του σταθερού όρου, δηλαδή $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$.

$Q(1) = 1^3 - 7\cdot 1 - 6 = -12 \neq 0$

$Q(-1) = (-1)^3 - 7(-1) - 6 = -1 + 7 - 6 = 0$

Εκτελώ σχήμα Horner στο $Q(x)$ για $\rho=-1$, δηλαδή

1	0	−7	−6	$\rho=-1$
#	−1	1	6	
1	−1	−6	0	

Οπότε, $Q(x) = (x+1)(x^2-x-6)$, άρα

$P(x) = (x-1)(x+1)(x^2-x-6)$.

Επομένως, $P(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1)(x^2-x-6) = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x-1=0 \\ \text{ή} \\ x+1=0 \\ \text{ή} \\ x^2-x-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ \text{ή} \\ x=-1 \\ \text{ή} \\ x=-2 \text{ ή } x=3 \end{cases}$$

(γ) Για $\kappa=-7$ και $\lambda=6$, έχουμε:

$$\frac{P(x)}{x-5} \geq 0 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \frac{(x-1)(x+1)(x^2-x-6)}{x-5} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x-5 \neq 0 & (2) \\ \text{και} \\ (x-1)(x+1)(x^2-x-6)(x-5) \geq 0 & (3) \end{cases}$$

• Η (2) γίνεται: $x-5 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 5$

• Η (3) γίνεται:

x	$-\infty$	-2		-1		1		3		5	$+\infty$
$x-1$	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	‖	$+$
$x+1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	‖	$+$
x^2-x-6	$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$	‖	$+$
$x-5$	$-$		$-$		$-$		$-$		$-$	‖	$+$
ΓΙΝΟΜΕΝΟ	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	‖	$+$

Επομένως, η ανίσωση γίνεται αληθής για κάθε $x \in [-2,-1] \cup [1,3] \cup (5,+\infty)$

ΘΕΜΑ 4 / 22773.pdf

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 - 7x + \alpha + 5$, για το οποίο γνωρίζουμε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσής του με το x είναι ίσο με 6 και ότι έχει ρίζα το 1.

α) Να βρείτε τις τιμές των α και β (Μονάδες 8)

β) Για $\alpha = 1$ και $\beta = 0$, να λύσετε

i. την ανίσωση $P(x) \geq 0$ (Μονάδες 8)

ii. την εξίσωση $\sqrt{P(x)} = x - 1$ (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4|22773

Έχουμε, $P(x) = ax^3 + \beta x^2 - 7x + a + 5$, με $a, \beta \in \mathbb{R}$.

(α) • Το $P(x)$ διαιρούμενο με το x δίνει υπόλοιπο ίσο με 6, άρα $P(0) = 6 \Leftrightarrow a \cdot 0^3 + \beta \cdot 0^2 - 7 \cdot 0 + a + 5 = 6$

$\Leftrightarrow a = 1$

Για $a = 1$, έχουμε: $P(x) = x^3 + \beta x^2 - 7x + 6$.

• Το 1 είναι ρίζα του $P(x)$, αν και μόνο αν,

$P(1) = 0 \Leftrightarrow 1^3 + \beta \cdot 1^2 - 7 \cdot 1 + 6 = 0 \Leftrightarrow 1 + \beta - 7 + 6 = 0 \Leftrightarrow \beta = 0$

(β) Για $a = 1$ και $\beta = 0$ έχουμε: $P(x) = x^3 - 7x + 6$

Οι πιθανές ακέραιες ρίζες είναι οι διαιρέτες του σταθερού όρου, δηλαδή $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$.

$P(1) = 1^3 - 7 \cdot 1 + 6 = 0$, οπότε εκτελώ σχήμα Horner στο $P(x)$ για $\rho = 1$, δηλαδή

1	0	-7	6	$\rho = 1$
↓	1	1	-6	
1	1	-6	0	

Έστω $\pi(x)$ το πηλίκο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $(x-1)$ τότε $P(x) = (x-1)(x^2 + x - 6)$

(i) Είναι,

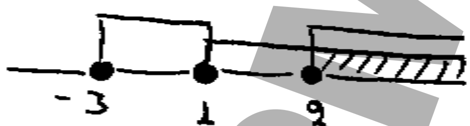
x	$-\infty$	-3		1		2	$+\infty$
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
x^2+x-6	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$P(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Άρα, $x \in [-3, 1] \cup [2, +\infty)$

(ii) Έχουμε, $\sqrt{P(x)} = x-1 \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)(x^2+x-6)} = x-1 \quad (1)$

Πρέπει: $\begin{cases} (x-1)(x^2+x-6) \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \end{cases} \overset{(i)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x \in [-3,1] \cup [2,+\infty) \\ x \geq 1 \end{cases}$

<u>Συναλήθευση:</u>



Με $x \geq 2$ η (1) γίνεται: $\sqrt{(x-1)(x^2+x-6)} = x-1 \overset{\mu o \mu}{\Longleftrightarrow}$

$\left(\sqrt{(x-1)(x^2+x-6)}\right)^2 = (x-1)^2 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+x-6) - (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow$

$(x-1)\left[(x^2+x-6) - (x-1)\right] = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+x-6-x+1) = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x^2-5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = 0 \\ \text{ή} \\ x^2-5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 & \underline{\text{ΑΠΟΡ}} \\ \text{ή} & \\ x = \sqrt{5} & \underline{\text{ΔΕΚΤΟ}} \\ \text{ή} & \\ x = -\sqrt{5} & \underline{\text{ΑΠΟΡ}}. \end{cases}$

ΘΕΜΑ 4 / 22774.pdf

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \alpha^3 x^2 - \alpha^2 x - \alpha$, με $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να κάνετε τη διαίρεση $P(x):(x-\alpha)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε τις τιμές του α για τις οποίες το $(x-\alpha)$ διαιρεί το $P(x)$. (Μονάδες 6)

γ) Αν $\alpha = -1$, τότε:

i. Να λύσετε την ανίσωση $P(x) \geq 0$. (Μονάδες 6)

ii. Να λύσετε την ανίσωση $(x+1)P(x) \leq 0$. (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4/22774

(α) Έχουμε, $P(x) = x^3 + a^3x^2 - a^2x - a,\ a \in \mathbb{R}$, τότε

$$
\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & +a^3x^2 & -a^2x & -a & x-a \\
\cline{5-5}
-x^3 & +ax^2 & & & x^2 + (a^3+a)x + a^4 \\
\hline
 & (a^3+a)x^2 & -a^2x & -a & \\
 & -(a^3+a)x^2 & +a(a^3+a)x & & \\
\cline{2-4}
 & & a^4x & -a & \\
 & & -a^4x & +a^5 & \\
\cline{3-4}
 & & & +a^5-a &
\end{array}
$$

Άρα, $P(x) = (x-a)\left[x^2 + (a^3+a)x + a^4\right] + a^5 - a$

(β) Από (α) έχουμε $υ = a^5 - a$, επομένως για να διαιρεί το $(x-a)$ το $P(x)$ θα πρέπει $υ = 0 \iff$

$a^5 - a = 0 \iff a(a^4-1) = 0 \iff \begin{cases} a = 0 \\ ή \\ a^4 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 0 \\ ή \\ a = \pm\sqrt[4]{1} = \pm 1. \end{cases}$

(γ) Αν $a = -1$, τότε $P(x) = x^3 + (-1)^3x^2 - (-1)^2x - (-1) \iff$

$P(x) = x^3 - x^2 - x + 1$ και από το (α) έχουμε:

$P(x) = [x-(-1)]\left\{x^2 + \left[(-1)^3 - 1\right]x + (-1)^4\right\} + (-1)^5 - (-1) \iff$

$P(x) = (x+1)(x^2 - 2x + 1) \iff P(x) = (x+1)(x-1)^2$

(i) Είναι,

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$
$(x-1)^2$	$+$		$+$	0	$+$
$P(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

Άρα, $x \in [-1, +\infty)$

(ii) Έχουμε, $(x+1)P(x) \le 0 \overset{(6)}{\Longleftrightarrow} (x+1)(x+1)(x-1)^2 \le 0 \Leftrightarrow$

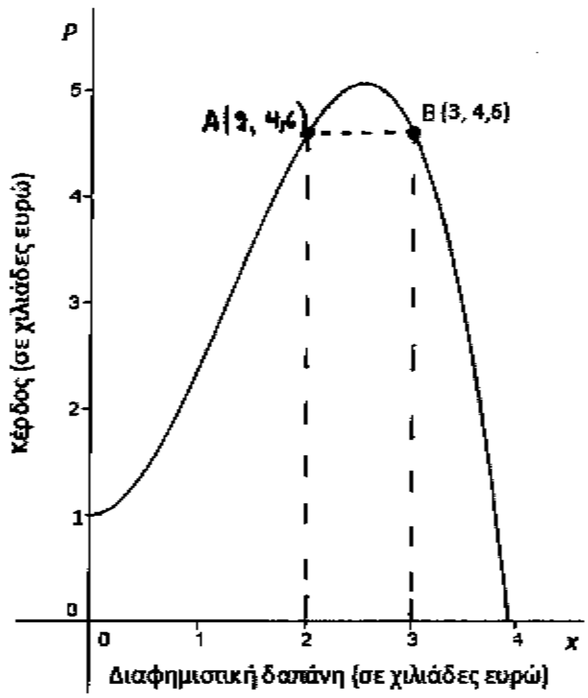
$(x+1)^2(x-1)^2 \le 0 \Leftrightarrow \left[(x+1)(x-1)\right]^2 \le 0$. Όμως,

$\left[(x+1)(x-1)\right]^2 \ge 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ άρα $\left[(x+1)(x-1)\right]^2 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2 = 0 \\ \text{ή} \\ (x-1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \quad (\text{διπλή ρίζα}) \\ \text{ή} \\ x = 1 \quad (\text{διπλή ρίζα}) \end{cases}$$

ΘΕΜΑ 4 / 22775.pdf

Μια εταιρεία εκτίμησε ότι το κέρδος της P (σε χιλιάδες ευρώ) από την πώληση ενός συγκεκριμένου προιόντος ήταν: $P(x) = -0{,}5x^3 + 1{,}9x^2 + 1$, $0 \le x < 4$, όπου x είναι η διαφημιστική δαπάνη (σε χιλιάδες ευρώ). Για αυτό το προιόν, ξόδεψε για διαφήμιση 3 χιλιάδες ευρώ και το κέρδος της ήταν 4,6 χιλιάδες ευρώ.



α) i. Να χρησιμοποιήσετε την παραπάνω γραφική παράσταση της συνάρτησης $P(x)$ για να εκτιμήσετε ένα άλλο ποσό x που θα μπορούσε να δαπανήσει για διαφήμιση η εταιρεία ώστε να έχει το ίδιο κέρδος. (Μονάδες 5)

ii. Να επαληθεύσετε αλγεβρικά το αποτέλεσμα του ερωτήματος i. (Μονάδες 10)

β) Πόσα χρήματα πρέπει να δαπανήσει η εταιρεία για διαφήμιση, ώστε το κέρδος της να είναι μεγαλύτερο από 4,6 χιλιάδες ευρώ; (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4/22775

(α) (i) Από το σημείο Β φέρουμε ευθεία παράλληλη στον $x'x$ που τέμνει τη γραφική παράσταση στο σημείο $A(2, 4{,}6)$. Άρα, αν η εταιρεία είχε δαπανήσει δύο χιλιάδες ευρώ θα είχε το ίδιο κέρδος, δηλαδή 4,6 χιλιάδες ευρώ

(ii) Έχουμε, $P(x) = 4{,}6 \Leftrightarrow -0{,}5x^3 + 1{,}9x^2 + 1 = 4{,}6 \Leftrightarrow$

$0{,}5x^3 - 1{,}9x^2 + 3{,}6 = 0 \Leftrightarrow 5x^3 - 19x^2 + 36 = 0$

Οι πιθανές ακέραιες ρίζες είναι οι διαιρέτες του σταθερού όρου, δηλαδή $\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm9,$ $\pm12, \pm18, \pm36$. Έστω $Q(x) = 5x^3 - 19x^2 + 36$.

- $Q(1) = \dots \neq 0$ · $Q(-1) = \dots \neq 0$
- $Q(2) = \dots \neq 0$ · $Q(-2) = \dots \neq 0$
- $Q(3) = 5\cdot3^3 - 19\cdot3^2 + 36 = 135 - 171 + 36 = 0$, άρα εκτελώ σχήμα Horner στο $Q(x)$ για $\rho = 3$, δηλαδή

5	−19	0	36	ρ = 3
↓	15	−12	−36	
5	−4	−12	0	

Έστω $\pi(x)$ το πηλίκο της διαίρεσης του $Q(x)$ με το $(x-3)$, τότε $Q(x) = (x-3)(5x^2 - 4x - 12)$

Έχουμε, $Q(x) = 0 \Leftrightarrow (x-3)(5x^2 - 4x - 12) = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x-3=0 \\ \text{ή} \\ 5x^2-4x-12=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 & \text{ΔΕΚΤΟ} \\ \text{ή} \\ x=2 & \text{ΔΕΚΤΟ} \\ \text{ή} \\ x=-\frac{6}{5} & \text{ΑΠΟΡ} \end{cases}$$, αφού $0 \le x < 4$

Επομένως, $P(2) = 4{,}6$, άρα $A(2, 4{,}6) \in C_P$.

<u>Γεωμετρικά</u>:

(β) Για να είναι το κέρδος της εταιρείας μεγαλύτερο από 4,6 χιλιάδες ευρώ θα πρέπει η C_P να βρίσκεται πάνω από το ευθύγραμμο τμήμα AB, δηλαδή για κάθε $x \in (2,3)$. Επομένως, θα πρέπει να δαπανήσει από 2 έως 3 χιλιάδες ευρώ για διαφήμιση.

<u>Αλγεβρικά</u>: Με $x \in [0,4)$ πρέπει: $P(x) > 4{,}6 \Leftrightarrow$

$-0{,}5x^3 + 1{,}9x^2 + 1 > 4{,}6 \Leftrightarrow 0{,}5x^3 - 1{,}9x^2 + 3{,}6 < 0 \Leftrightarrow$

$5x^3 - 19x^2 + 36 < 0$.

Έστω $f(x) = 5x^3 - 19x^2 + 36$, με $x \in [0,4)$. Οι πιθανές ακέραιες ρίζες είναι οι διαιρέτες του σταθερού όρου, δηλαδή $\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm9, \pm12, \pm18, \pm36$.

- $f(1) = \dots \neq 0$ • $f(-1) = \dots \neq 0$
- $f(2) = \dots \neq 0$ • $f(-2) = \dots \neq 0$
- $f(3) = \dots = 0$, άρα εκτελώ σχήμα Horner στο $f(x)$ για $\rho = 3$, δηλαδή

5	−19	0	36	ρ=3
#	15	−12	−36	
5	−4	−12	0	

Οπότε, $f(x) = (x-3)(5x^2-4x-12)$. Αρκεί να λύσουμε την ανίσωση $f(x) < 0$

Δηλαδή,

x	$-\infty$		$-\frac{6}{5}$		2		3		$+\infty$
$x-3$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$5x^2-4x-12$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Είναι, $x \in (-\infty, -\frac{6}{5}) \cup (2,3)$. Όμως, $x \in [0,4)$ άρα $x \in (2,3)$.

ΘΕΜΑ 4 / 22776.pdf

Για να κατασκευάσουμε ένα ανοικτό κουτί από ένα ορθογώνιο χαρτόνι με διαστάσεις 5*dm* και 8*dm*, κόβουμε ίσα τετράγωνα, πλευράς *x*, από κάθε γωνία του και γυρίζουμε προς τα πάνω τις πλευρές του (Σχήμα 1).

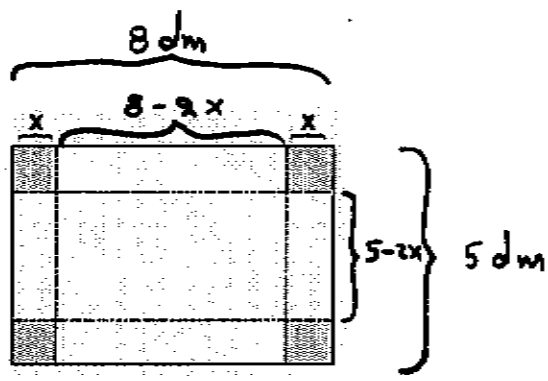
α) Να δείξετε ότι ο όγκος *V* του κουτιού εκφράζεται ως συνάρτηση του *x* με τον τύπο $V(x) = 4x^3 - 26x^2 + 40x$. (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τις τιμές που μπορεί να πάρει το *x* στο πλαίσιο του προβλήματος.

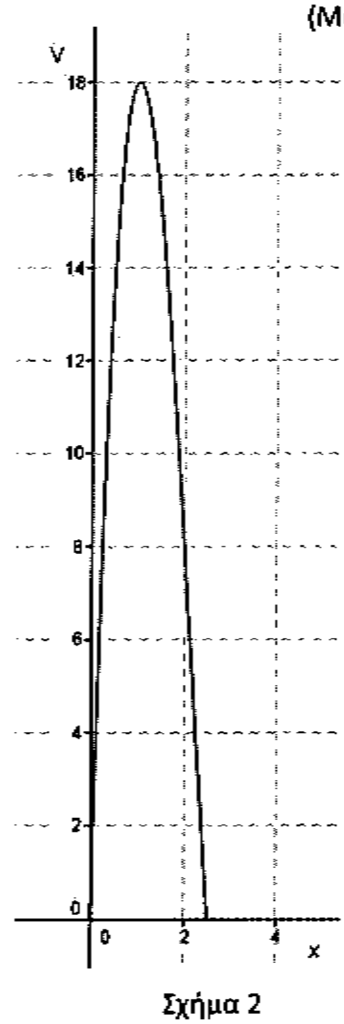
(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε τις διαστάσεις (εκφρασμένες σε *dm* με ακέραιους αριθμούς) του κουτιού αν γνωρίζουμε ότι ο όγκος του είναι $8dm^3$. (Μονάδες 7)

δ) Στο σχ.2 δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $V(x) = 4x^3 - 26x^2 + 40x$ για $x \in (0, 2{,}5)$. Χρησιμοποιώντας το σχήμα να βρείτε ποιος είναι ο μεγαλύτερος όγκος που μπορεί να έχει το κουτί. Στη συνέχεια να υπολογίσετε αλγεβρικά τις διαστάσεις του κουτιού με το μεγαλύτερο όγκο. (Μονάδες 7)



Σχήμα 1



Σχήμα 2

ΘΕΜΑ 4/22776

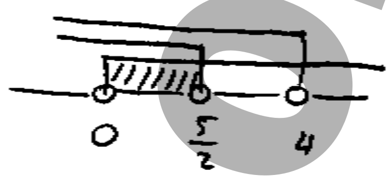
(α) Ο όγκος V του κουτιού με τη βοήθεια του σχήματος 1 είναι: $V(x) = x(5-2x)(8-2x) =$

$= x(40 - 10x - 16x + 4x^2) = x(4x^2 - 26x + 40) \Leftrightarrow$

$V(x) = 4x^3 - 26x^2 + 40x$

(β) Πρέπει: $\begin{cases} x > 0 \\ 5-2x > 0 \\ 8-2x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 2x < 5 \\ 2x < 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < \frac{5}{2} \\ x < 4 \end{cases}$

<u>Συναλήθευση</u>:



Άρα, $x \in (0, \frac{5}{2})$

(γ) Έχουμε, $V(x) = 8 \overset{(\beta)}{\Longleftrightarrow} 4x^3 - 26x^2 + 40x - 8 = 0 \Leftrightarrow$

$2x^3 - 13x^2 + 20x - 4 = 0$. Έστω $P(x) = 2x^3 - 13x^2 + 20x - 4$

Οι πιθανές ακέραιες ρίζες είναι οι διαιρέτες του σταθερού όρου, δηλαδή $\pm 1, \pm 2, \pm 4$.

- $P(1) = \cdots \neq 0$ • $P(-1) = \cdots \neq 0$
- $P(2) = 2 \cdot 2^3 - 13 \cdot 2^2 + 20 \cdot 2 - 4 = 16 - 52 + 40 - 4 = 0$

Εκτελώ σχήμα Horner στο $P(x)$ για $\rho = 2$, δηλαδή

2	−13	20	−4	$\rho = 2$
↓	4	−18	4	
2	−9	2	0	

Οπότε, $P(x) = (x-2)(2x^2 - 9x + 2)$

Έχουμε, $P(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 0 \\ \text{ή} \\ 2x^2 - 9x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \quad \text{ΔΕΚΤΟ} \\ \text{ή} \\ x_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{65}}{4} \notin \mathbb{Z} \quad \text{ΑΠΟΡ} \end{cases}$

(δ) Με τη βοήθεια του σχήματος 2 παρατηρούμε ότι ο μεγαλύτερος όγκος που μπορεί να έχει το κουτί είναι $18\,dm^3$, δηλαδή $V_{max}(x) = 18\,dm^3$.

Άρα, $V_{max}(x) = 18 \Leftrightarrow 4x^3 - 26x^2 + 40x - 18 = 0 \Leftrightarrow$
$2x^3 - 13x^2 + 20x - 9 = 0$. Έστω $Q(x) = 2x^3 - 13x^2 + 20x - 9$

Οι πιθανές ακέραιες ρίζες είναι οι διαιρέτες του σταθερού όρου, δηλαδή $\pm 1, \pm 3, \pm 9$.

• $Q(1) = 2 \cdot 1^3 - 13 \cdot 1^2 + 20 \cdot 1 - 9 = 0$, άρα εκτελώ σχήμα Horner στο $Q(x)$ για $\rho = 1$, δηλαδή

2	−13	20	−9	$\rho = 1$
#	2	−11	9	
2	−11	9	0	

Οπότε, $Q(x) = (x-1)(2x^2 - 11x + 9)$, άρα $Q(x) = 0 \Leftrightarrow$

$$(x-1)(2x^2 - 11x + 9) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \\ \text{ή} \\ 2x^2 - 11x + 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 & \text{ΔΕΚΤΟ} \\ \text{ή} \\ x = 1 & \text{ΔΕΚΤΟ} \\ \text{ή} \\ x = \frac{9}{2} & \text{ΑΠΟΡ} \end{cases}$$

διότι $x \in \left(0, \frac{5}{2}\right)$

Για $x = 1$ οι διαστάσεις είναι: $1\,dm$, $5 - 2 \cdot 1 = 3\,dm$ και $8 - 2 \cdot 1 = 6\,dm$

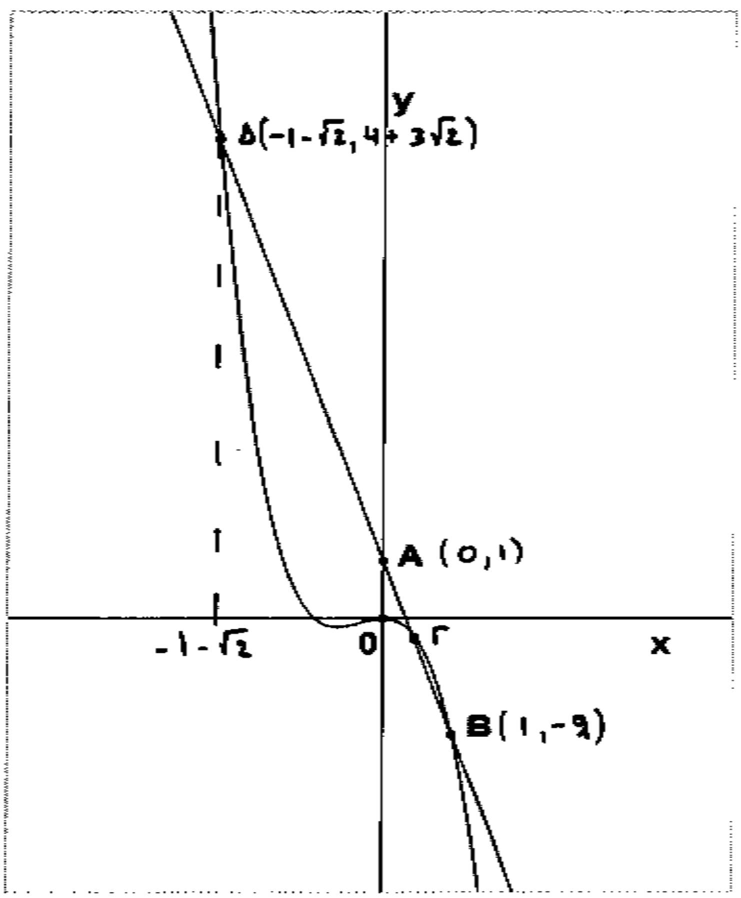
ΘΕΜΑ 4 / 22777.pdf

Στο σχήμα φαίνονται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = -x^3 - x^2$ και η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Α (0, 1) και Β (1, -2).

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας. (Μονάδες 7)

β) Αν η ευθεία έχει εξίσωση $y = -3x + 1$, να βρείτε τις συντεταγμένες των κοινών σημείων της ευθείας με τη γραφική παράσταση της f. (Μονάδες 9)

γ) Να λύσετε την ανίσωση $-x^3 - x^2 < -3x + 1$ (Μονάδες 9)



ΘΕΜΑ 4/22777

(α) Έχουμε, $\lambda_{AB} = \dfrac{-2-1}{1-0} = -3$. Επίσης, $AB: y - y_A = \lambda_{AB}(x - x_A)$

$\Leftrightarrow y - 1 = -3(x-0) \Leftrightarrow y = -3x+1$.

Επομένως, $AB: y = -3x+1$.

(β) Έστω $g(x) = -3x+1$, με $A_g = \mathbb{R}$. Επίσης, $A_f = \mathbb{R}$, οπότε στα κοινά σημεία των C_f και C_g έχουμε ίσες συντεταγμένες, δηλαδή για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow -x^3 - x^2 = -3x+1 \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow$
$x^3 - x^2 + 2x^2 - 2x - x + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2(x-1) + 2x(x-1) - (x-1) = 0$
$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2+2x-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ \text{ή} \\ x^2+2x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ \text{ή} \\ x=-1+\sqrt{2} \\ \text{ή} \\ x=-1-\sqrt{2} \end{cases}$$

- $g(1) = -3\cdot 1 + 1 = -2$
- $g(-1+\sqrt{2}) = -3(-1+\sqrt{2}) + 1 = 3 - 3\sqrt{2} + 1 = 4 - 3\sqrt{2}$
- $g(-1-\sqrt{2}) = -3(-1-\sqrt{2}) + 1 = 3 + 3\sqrt{2} + 1 = 4 + 3\sqrt{2}$.

Άρα, οι C_f και C_g τέμνονται στα σημεία $B(1,-2)$, $\Gamma(-1+\sqrt{2}, 4-3\sqrt{2})$ και $\Delta(-1-\sqrt{2}, 4+3\sqrt{2})$.

(γ) Με $x \in \mathbb{R}$, έχουμε:

$-x^3 - x^2 < -3x+1 \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 3x + 1 > 0 \xLeftrightarrow{(\beta)} (x-1)(x^2+2x-1) > 0$

Δηλαδή,

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{2}$		$-1+\sqrt{2}$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
x^2+2x-1		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
ΓΙΝΟΜΕΝΟ		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Άρα, η ανίσωση επαληθεύεται για κάθε

$x \in (-1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2}) \cup (1, +\infty)$.