ΘΕΜΑ 2 / 22639.pdf

α) Να δείξετε ότι $\eta\mu\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\eta\mu\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\,\eta\mu x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε με τη βοήθεια του ερωτήματος α) τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f(x)=\eta\mu\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\eta\mu\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$, $x\in\mathbb{R}$. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2/22639

(α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$\eta\mu\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\eta\mu\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\eta\mu x\,\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}+\sigma\upsilon\nu x\,\eta\mu\frac{\pi}{4}+\eta\mu x\,\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}-\sigma\upsilon\nu x\,\eta\mu\frac{\pi}{4}$$

$$=2\eta\mu x\,\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}=2\frac{\sqrt{2}}{2}\eta\mu x=\sqrt{2}\,\eta\mu x.$$

(β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, έχουμε:

$$f(x)=\eta\mu\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\eta\mu\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\overset{(\alpha)}{\Longleftrightarrow} f(x)=\sqrt{2}\,\eta\mu x.$$

Επομένως, η μέγιστη τιμή της f είναι η τιμή $\sqrt{2}$ ενώ η ελάχιστη τιμή της f είναι η $-\sqrt{2}$.

ΘΕΜΑ 2 / 19913.pdf

Έστω η συνάρτηση $f(x)=(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)^2$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=1+\eta\mu 2x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε την περίοδο καθώς και τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή της f.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2/19913

(α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, έχουμε:

$f(x) = (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)^2 = \eta\mu^2 x + 2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu^2 x \Leftrightarrow$

$f(x) = 1 + 2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow f(x) = 1 + \eta\mu 2x.$

(β) • Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, έχουμε:

$-1 \le \eta\mu 2x \le 1 \Leftrightarrow -1+1 \le 1+\eta\mu 2x \le 1+1 \Leftrightarrow 0 \le f(x) \le 2$

Οπότε, η ελάχιστη τιμή της f είναι η τιμή 0, ενώ η μέγιστη είναι η τιμή 2.

• Η περίοδος T είναι $T = \frac{2\pi}{2} = \pi > 0$, διότι

(i) $(x+\pi) \in A_f$, $(x-\pi) \in A_f$

(ii) $f(x+\pi) = 1 + \eta\mu[2(x+\pi)] = 1 + \eta\mu(2\pi + 2x) =$

$= 1 + \eta\mu 2x = f(x)$

$f(x-\pi) = 1 + \eta\mu[2(x-\pi)] = 1 + \eta\mu(2x - 2\pi) =$

$= 1 + \eta\mu 2x = f(x)$

ΘΕΜΑ 4 / 20331.pdf

Η θερμοκρασία μιας περιοχής σε βαθμούς Κελσίου (^oC) κατά τη διάρκεια ενός εικοσιτετραώρου δίνεται κατά προσέγγιση από τη συνάρτηση:

$$f(t) = -8\sigma\upsilon\nu\frac{\pi t}{12} + 4, \qquad \mu\varepsilon\ 0 \leq t \leq 24 \ \ (t \text{ ο χρόνος σε ώρες})$$

α) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη θερμοκρασία κατά τη διάρκεια του εικοσιτετραώρου.

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε τις χρονικές στιγμές που η θερμοκρασία είναι ίση με 0^oC. (Μονάδες 6)

γ) Να παραστήσετε γραφικά την f για $t \in [0, 24]$. (Μονάδες 7)

δ) Να βρείτε, με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης, πότε η θερμοκρασία είναι πάνω από 0^oC.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4/20331

(α) Για κάθε $t \in [0,24]$ έχουμε:

$$-1 \le \sigma\upsilon\nu\frac{\pi t}{12} \le 1 \Leftrightarrow 8 \ge -8\sigma\upsilon\nu\frac{\pi t}{12} \ge -8 \Leftrightarrow$$

$$-8 \le -8\sigma\upsilon\nu\frac{\pi t}{12} \le 8 \Leftrightarrow -8+4 \le 4-8\sigma\upsilon\nu\frac{\pi t}{12} \le 8+4 \Leftrightarrow$$

$$-4 \le f(t) \le 12$$

Άρα, η μέγιστη θερμοκρασία κατά τη διάρκεια του εικοσιτετραώρου είναι 12 βαθμοί Κελσίου, ενώ η ελάχιστη είναι −4 βαθμοί Κελσίου.

(β) Έστω η θερμοκρασία είναι $0°C$, δηλαδή

$$f(t)=0 \Leftrightarrow -8\sigma\upsilon\nu\frac{\pi t}{12}+4=0 \Leftrightarrow -8\sigma\upsilon\nu\frac{\pi t}{12}=-4 \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu\frac{\pi t}{12}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\frac{\pi t}{12}=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{\pi t}{12} = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{3} \\ \text{ή} \\ \frac{\pi t}{12} = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{t}{12} = 2\kappa + \frac{1}{3} \\ \text{ή} \\ \frac{t}{12} = 2\kappa - \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 24\kappa + 4 \quad (1) \\ \text{ή} \qquad\qquad , \kappa \in \mathbb{Z} \\ t = 24\kappa - 4 \quad (2) \end{cases}$$

• Όμως, $t \in [0,24]$, άρα η (1) γίνεται:

$$0 \le 24\kappa+4 \le 24 \Leftrightarrow -4 \le 24\kappa \le 20 \Leftrightarrow -\frac{4}{24} \le \kappa \le \frac{20}{24} \Leftrightarrow$$

$-\frac{1}{6} \le \kappa \le \frac{5}{6}$ και $\kappa \in \mathbb{Z}$, άρα $\kappa = 0$

Για $\kappa=0$ η (1) γίνεται: $t_1 = 24\cdot 0+4 \Leftrightarrow t_1 = 4$ ώρες.

• Όμως, $t \in [0,24]$, άρα η (2) γίνεται:

$0 \le 24\kappa - 4 \le 24 \Leftrightarrow 4 \le 24\kappa \le 28 \Leftrightarrow \frac{4}{24} \le \kappa \le \frac{28}{24} \Leftrightarrow$

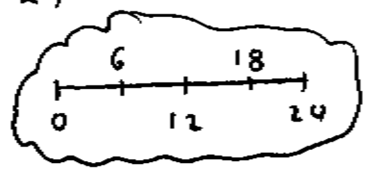
$\frac{1}{6} \le \kappa \le \frac{7}{6}$ και $\kappa \in \mathbb{Z}$, άρα $\kappa = 1$

Για $\kappa = 1$ η (2) γίνεται: $t_2 = 24 \cdot 1 - 4 \Leftrightarrow t_2 = 20$ ώρες.

Άρα, τις χρονικές στιγμές $t_1 = 4$ ώρες και

$t_2 = 20$ ώρες η θερμοκρασία είναι ίση με $0°C$.

(δ) Η περίοδος της f είναι: $T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{12}} = 24$



$f(0) = -8\sigma\upsilon\nu 0° + 4 = -8 + 4 = -4$

$f(6) = -8\sigma\upsilon\nu \frac{6\pi}{12} + 4 = -8\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{2} + 4 = 4$

$f(12) = -8\sigma\upsilon\nu \frac{12\pi}{12} + 4 = -8\sigma\upsilon\nu \pi + 4 = -8(-1) + 4 = 12$

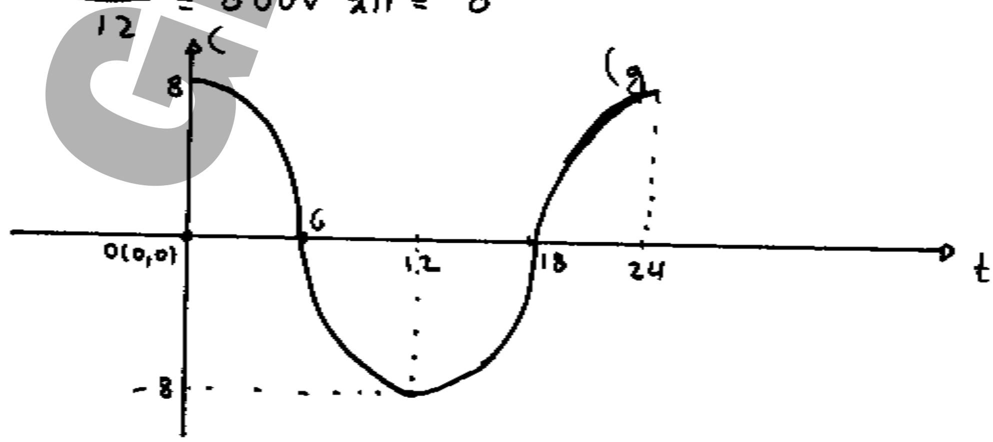
$f(18) = -8\sigma\upsilon\nu \frac{18\pi}{12} + 4 = -8\sigma\upsilon\nu \frac{3\pi}{2} + 4 = 4$

$f(24) = -8\sigma\upsilon\nu \frac{24\pi}{12} + 4 = -8\sigma\upsilon\nu 2\pi + 4 = -8 + 4 = -4$

Έστω $g(t) = 8\sigma\upsilon\nu \frac{\pi t}{12}$ με περίοδο $T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{12}} = 24$

- $g(0) = 8\sigma\upsilon\nu 0 = 8$
- $g(6) = 8\sigma\upsilon\nu \frac{6\pi}{12} = 8\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{2} = 0$
- $g(12) = 8\sigma\upsilon\nu \frac{12\pi}{12} = 8\sigma\upsilon\nu \pi = 8(-1) = -8$
- $g(18) = 8\sigma\upsilon\nu \frac{18\pi}{12} = 8\sigma\upsilon\nu \frac{3\pi}{2} = 0$
- $g(24) = 8\sigma\upsilon\nu \frac{24\pi}{12} = 8\sigma\upsilon\nu 2\pi = 8$

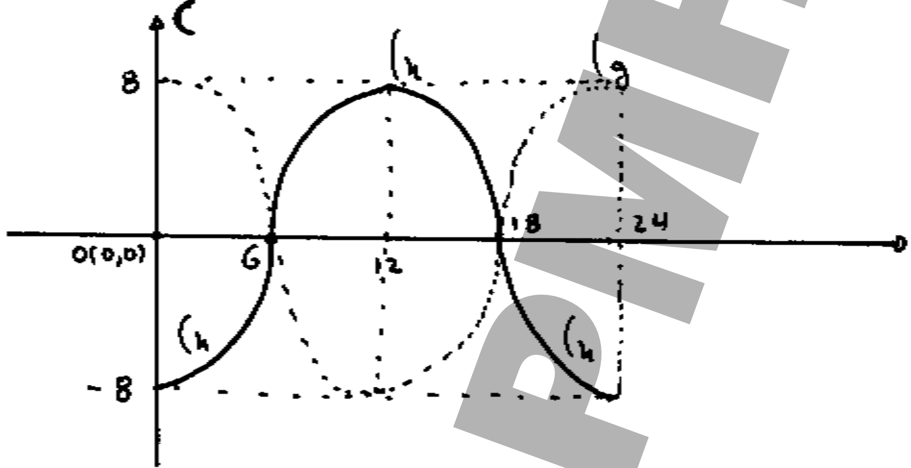
Δηλαδή,



Έστω η συνάρτηση $h(t) = -8συν\frac{\pi t}{12}$, με $t \in [0,24]$

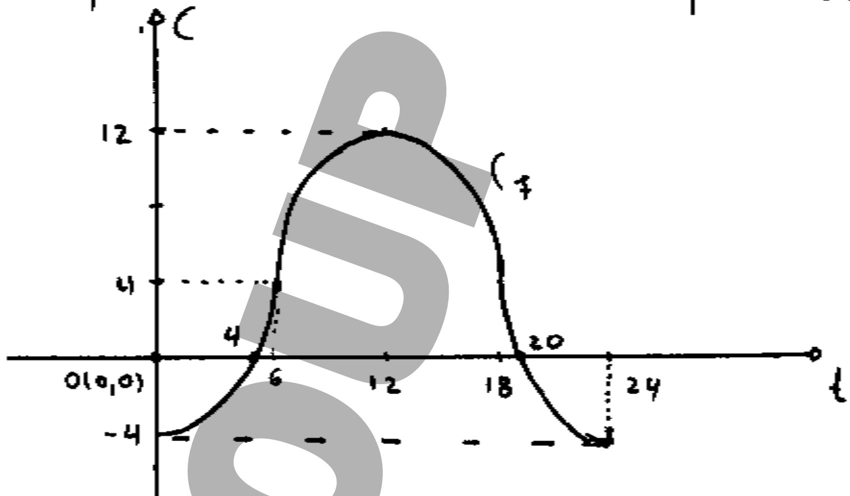
Παρατηρώ ότι $h(t) = -g(t)$, άρα η C_h είναι συμμετρική με τη C_g ως προς τον άξονα $x'x$

Επομένως,



Παρατηρώ ότι η C_f προκύπτει από την C_h με κατακόρυφη μετατόπιση κατά 4 μονάδες προς τα πάνω.

Άρα,



(δ) Από το (β) έχουμε ότι οι χρονικές στιγμές που η θερμοκρασία είναι ίση με 0°C είναι $t_1 = 4$ ώρες και $t_2 = 20$ ώρες, τις οποίες σημειώνουμε στην παραπάνω γραφική παράσταση. Άρα, η θερμοκρασία είναι πάνω από 0°C για το διάστημα $t \in (4, 20)$.

ΘΕΜΑ 4 / 20338.pdf

Στο παρακάτω σχήμα, δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f, που είναι της μορφής $f(x) = α + β \cdot συν2x$, όπου $α$, $β$ πραγματικοί αριθμοί.

α) Με βάση τη γραφική παράσταση της f, να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της.

(Μονάδες 4)

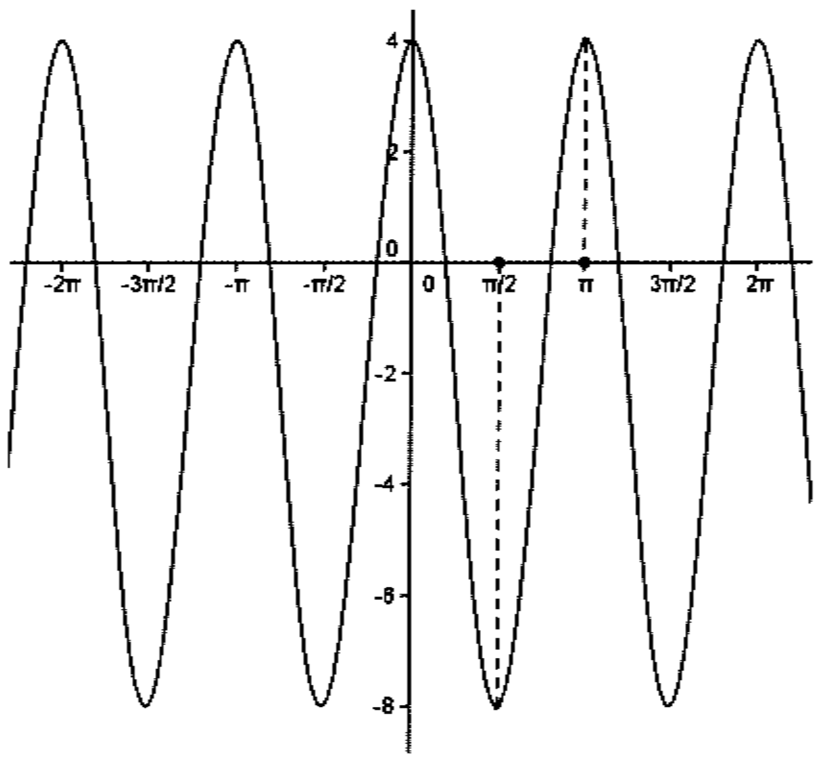
β) Ποια είναι η περίοδος T της συνάρτησης f ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 4)

γ) Με βάση τα δεδομένα του σχήματος, να αποδείξετε ότι: $α = -2$ και $β = 6$.

(Μονάδες 8)

δ) Να προσδιορίσετε αλγεβρικά τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y = 1$ στο διάστημα $[0, 2π]$. (Μονάδες 9)



ΘΕΜΑ 4/20338

(α) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης η μέγιστη τιμή της f είναι η τιμή 4, ενώ η ελάχιστη τιμή είναι −8.

(β) Η περίοδος Τ είναι ίση με $\frac{2\pi}{2}=\pi$, δηλαδή $T=\pi$ διότι

• $(x+\pi)\in A_f$, $(x-\pi)\in A_f$

• $f(x+\pi)=\alpha+\beta\sigma\upsilon\nu 2(x+\pi)=\alpha+\beta\sigma\upsilon\nu(2x+2\pi)=$
$=\alpha+\beta\sigma\upsilon\nu 2x=f(x)$

$f(x-\pi)=\alpha+\beta\sigma\upsilon\nu 2(x-\pi)=\alpha+\beta\sigma\upsilon\nu(2x-2\pi)=$
$=\alpha+\beta\sigma\upsilon\nu 2x=f(x)$.

(γ) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης, έχουμε:

• $(0,4)\in C_f \Leftrightarrow f(0)=4 \Leftrightarrow \alpha+\beta\sigma\upsilon\nu 0^\circ=4 \Leftrightarrow \alpha+\beta=4$ (1)

• $\left(\frac{\pi}{2},-8\right)\in C_f \Leftrightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-8 \Leftrightarrow \alpha+\beta\sigma\upsilon\nu 2\frac{\pi}{2}=-8 \Leftrightarrow$
$\alpha+\beta\sigma\upsilon\nu\pi=-8 \Leftrightarrow \alpha-\beta=-8$ (2)

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$$\begin{cases}\alpha+\beta=4\\ \alpha-\beta=-8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=4-\beta\\ 4-\beta-\beta=-8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=4-\beta\\ -2\beta=-12\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=4-6\\ \beta=6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=-2\\ \beta=6\end{cases}$$

(δ) Έστω $g(x)=1$, τότε στα κοινά σημεία των C_f και C_g έχουμε ίσες συντεταγμένες, δηλαδή $f(x)=g(x) \Leftrightarrow -2+6\sigma\upsilon\nu 2x=1 \Leftrightarrow$
$6\sigma\upsilon\nu 2x=3 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 2x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 2x=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 2x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{3} \\ \quad \acute{\eta} \\ 2x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \kappa\pi + \frac{\pi}{6} & (3) \\ \quad \acute{\eta} \\ x = \kappa\pi - \frac{\pi}{6} & (4) \end{cases}$$

Όμως, $x \in [0, 2\pi]$ άρα η (3) γίνεται:

$0 \leq x \leq 2\pi \Leftrightarrow 0 \leq \kappa\pi + \frac{\pi}{6} \leq 2\pi \Leftrightarrow 0 \leq \kappa + \frac{1}{6} \leq 2 \Leftrightarrow$

$-\frac{1}{6} \leq \kappa \leq 2 - \frac{1}{6} \Leftrightarrow -\frac{1}{6} \leq \kappa \leq \frac{11}{6}$ και $\kappa \in \mathbb{Z}$ άρα

$\kappa = 0$ και $\kappa = 1$.

Για $\kappa = 0$ η (3) γίνεται: $x_1 = 0 \cdot \pi + \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x_1 = \frac{\pi}{6}$

Για $\kappa = 1$ η (3) γίνεται: $x_2 = 1 \cdot \pi + \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x_2 = \frac{7\pi}{6}$

Όμως, $x \in [0, 2\pi]$, άρα η (4) γίνεται:

$0 \leq x \leq 2\pi \Leftrightarrow 0 \leq \kappa\pi - \frac{\pi}{6} \leq 2\pi \Leftrightarrow 0 \leq \kappa - \frac{1}{6} \leq 2 \Leftrightarrow$

$\frac{1}{6} \leq \kappa \leq 2 + \frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{1}{6} \leq \kappa \leq \frac{13}{6}$ και $\kappa \in \mathbb{Z}$ άρα

$\kappa = 1$ και $\kappa = 2$

Για $\kappa = 1$ η (4) γίνεται: $x_3 = 1\pi - \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x_3 = \frac{5\pi}{6}$

Για $\kappa = 2$ η (4) γίνεται: $x_4 = 2\pi - \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x_4 = \frac{11\pi}{6}$

Έχουμε, $g\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1$, $g\left(\frac{7\pi}{6}\right) = 1$, $g\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 1$, $g\left(\frac{11\pi}{6}\right) = 1$

Επομένως, τα κοινά σημεία των C_f και C_g είναι $A\left(\frac{\pi}{6}, 1\right)$, $B\left(\frac{7\pi}{6}, 1\right)$, $\Gamma\left(\frac{5\pi}{6}, 1\right)$ και $\Delta\left(\frac{11\pi}{6}, 1\right)$.

ΘΕΜΑ 4 / 20339.pdf

Μια ρόδα ποδηλάτου περιστρέφεται γύρω από τον άξονά της. Σημειώνουμε ένα σημείο P της ρόδας (όπως φαίνεται στο σχήμα), το οποίο τη χρονική στιγμή $t = 0$, είναι το σημείο επαφής της ρόδας με μια επιφάνεια. Η συνάρτηση που εκφράζει την απόσταση h (σε m) του σημείου P από την επιφάνεια, t *sec* μετά την αρχή της κίνησης δίνεται από τη σχέση:

$$h(t) = -0{,}2\sigma\upsilon\nu(\omega t) + 0{,}2 \quad , \quad \text{με } \omega \text{ θετική πραγματική σταθερά.}$$

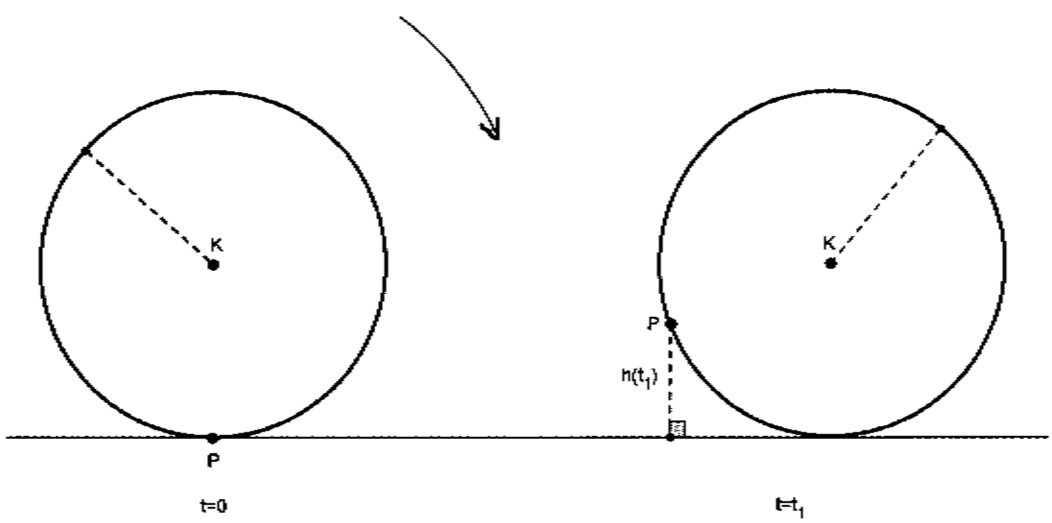
Υποθέτουμε ότι το σημείο P κάνει ένα πλήρη κύκλο σε 4*sec*.

α) Να αποδείξετε ότι $\omega = \dfrac{\pi}{2}$. (Μονάδες 5)

β) Να προσδιορίσετε την απόσταση του P από την επιφάνεια τις στιγμές: $t_1 = 1sec$, $t_2 = 2sec$ και $t_3 = 7sec$. (Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της h. (Μονάδες 5)

δ) Να προσδιορίσετε την ακτίνα της ρόδας. (Μονάδες 9)



ΘΕΜΑ 4/20339

(α) Το σημείο P κάνει ένα πλήρη κύκλο σε 4sec, άρα η περίοδος είναι T = 4 sec.

Δηλαδή, $T=4 \Leftrightarrow \frac{2\pi}{\omega}=4 \Leftrightarrow \omega=\frac{2\pi}{4} \Leftrightarrow \omega=\frac{\pi}{2}$.

Επομένως, $h(t)=0,2-0,2\,\text{συν}\,\frac{\pi t}{2}$.

(β) • $h(1)=0,2-0,2\,\text{συν}\,\frac{\pi}{2}=0,2\ m$

• $h(2)=0,2-0,2\,\text{συν}\,\frac{2\pi}{2}=0,2-0,2\,\text{συν}\,\pi=0,2+0,2=0,4m.$

• $h(7)=0,2-0,2\,\text{συν}\,\frac{7\pi}{2}=0,2-0,2\,\text{συν}\,\frac{3\pi}{2}=0,2\ m.$

(γ) Για κάθε $t\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$-1\le \text{συν}\,\frac{\pi t}{2}\le 1 \Leftrightarrow 0,2\ge -0,2\,\text{συν}\frac{\pi t}{2}\ge -0,2 \Leftrightarrow$

$0,4\ge 0,2-0,2\,\text{συν}\,\frac{\pi t}{2}\ge 0 \Leftrightarrow 0\le h(t)\le 0,4$

Άρα, η μέγιστη τιμή της h είναι 0,4m, ενώ η ελάχιστη τιμή της h είναι 0m.

(δ) Η μέγιστη τιμή της h είναι ίση με το διπλάσιο της ακτίνας, δηλαδή αν ρ η ακτίνα της ρόδας, τότε $2\rho=0,4 \Leftrightarrow \rho=0,2\ m.$

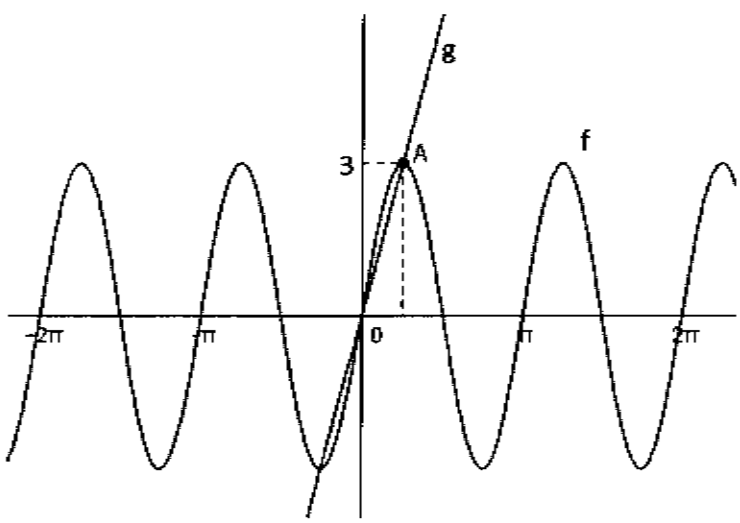
ΘΕΜΑ 4 / 20921.pdf

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=\alpha x+\beta$, όπου α, β πραγματικοί αριθμοί και της συνάρτησης $f(x)=\rho\eta\mu(\omega x)$, όπου $\omega>0$ και $\rho>0$. Και οι δύο συναρτήσεις έχουν πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Επίσης η f έχει μέγιστο 3.

α) Να αποδείξετε ότι $\rho=3$ και $\omega=2$ (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τα α, β. (Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε, γραφικά, το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $3\eta\mu(2x)-\dfrac{12x}{\pi}=0$ στο διάστημα $[0,\pi]$. (Μονάδες 10)



ΘΕΜΑ 4/20991

(α) Η f έχει μέγιστο το 3, δηλαδή $\rho = 3$. Επίσης, από τη C_f παρατηρούμε ότι έχει περίοδο $T = \pi$ δηλαδή $T = \pi \Leftrightarrow \frac{2\pi}{\omega} = \pi \Leftrightarrow \omega = \frac{2\pi}{\pi} \Leftrightarrow \omega = 2$.

(β) • $O(0,0) \in C_g \Leftrightarrow g(0) = 0 \Leftrightarrow a \cdot 0 + \beta = 0 \Leftrightarrow \beta = 0$

Οπότε, $g(x) = ax$.

Επίσης, από τη C_f παρατηρούμε ότι η f στο $x_0 = \frac{\pi}{4}$ παρουσιάζει μέγιστο την τιμή $f(\frac{\pi}{4}) = 3$, άρα το σημείο Α έχει συντεταγμένες $A(\frac{\pi}{4}, 3)$.

Δηλαδή, $A(\frac{\pi}{4}, 3) \in C_g \Leftrightarrow g(\frac{\pi}{4}) = 3 \Leftrightarrow a\frac{\pi}{4} = 3 \Leftrightarrow$ $a = \frac{12}{\pi}$

(γ) Με τη βοήθεια των (α) και (β) έχουμε:

$f(x) = 3\eta\mu 2x$ και $g(x) = \frac{12}{\pi}x$

Έχουμε, $3\eta\mu 2x - \frac{12x}{\pi} = 0 \Leftrightarrow 3\eta\mu 2x = \frac{12x}{\pi} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$, οπότε αρκεί να βρούμε γραφικά τα κοινά σημεία των C_f και C_g στο διάστημα $[0,\pi]$

Οι C_f και C_g τέμνονται στο διάστημα $[0,\pi]$ στα σημεία $O(0,0)$ και $A(\frac{\pi}{4}, 3)$, άρα σε δύο στο πλήθος σημεία.

ΘΕΜΑ 4 / 20922.pdf

Δίνεται η συνάρτηση $f(t) = -2\etaμ\frac{\pi t}{2} + 2,\ t \in [0, 4]$.

α) Να βρείτε την περίοδο της f. (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της, καθώς και τις τιμές του t για τις οποίες η f παίρνει τις τιμές αυτές. (Μονάδες 12)

γ) Να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση της f. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4/20922

(α) Η περίοδος της f είναι $T = \dfrac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$

(β) Για κάθε $t \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$-1 \le ημ\dfrac{\pi t}{2} \le 1 \Leftrightarrow 2 \ge -2ημ\dfrac{\pi t}{2} \ge -2 \Leftrightarrow 4 \ge 2 - 2ημ\dfrac{\pi t}{2} \ge 0$

$\Leftrightarrow 0 \le f(t) \le 4$.

· Έχουμε, $f(t) = 0 \Leftrightarrow 2 - 2ημ\dfrac{\pi t}{2} = 0 \Leftrightarrow 2ημ\dfrac{\pi t}{2} = 2 \Leftrightarrow$

$ημ\dfrac{\pi t}{2} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{\pi t}{2} = 2\kappa\pi + \dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow \pi t = 4\kappa\pi + \pi \Leftrightarrow$

$t = 4\kappa + 1$, $\kappa \in \mathbb{Z}$

Όμως, $t \in [0,4]$, δηλαδή $0 \le 4\kappa + 1 \le 4 \Leftrightarrow$

$-1 \le 4\kappa \le 3 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{4} \le \kappa \le \dfrac{3}{4}$. Όμως, $\kappa \in \mathbb{Z}$ άρα $\kappa = 0$

Για $\kappa = 0$ έχουμε: $t_1 = 4 \cdot 0 + 1 \Leftrightarrow t_1 = 1$.

· Έχουμε, $f(t) = 4 \Leftrightarrow 2 - 2ημ\dfrac{\pi t}{2} = 4 \Leftrightarrow 2ημ\dfrac{\pi t}{2} = -2 \Leftrightarrow$

$ημ\dfrac{\pi t}{2} = -1 \Leftrightarrow \dfrac{\pi t}{2} = 2\kappa\pi + \dfrac{3\pi}{2} \Leftrightarrow \pi t = 4\kappa\pi + 3\pi \Leftrightarrow$

$t = 4\kappa + 3$, $\kappa \in \mathbb{Z}$

Όμως, $t \in [0,4]$, δηλαδή $0 \le t \le 4 \Leftrightarrow 0 \le 4\kappa + 3 \le 4$

$\Leftrightarrow -3 \le 4\kappa \le 1 \Leftrightarrow -\dfrac{3}{4} \le \kappa \le \dfrac{1}{4}$. Όμως, $\kappa \in \mathbb{Z}$, άρα $\kappa = 0$

Για $\kappa = 0$ έχουμε: $t_2 = 4 \cdot 0 + 3 \Leftrightarrow t_2 = 3$.

Άρα, η f για $t_1 = 1$ παρουσιάζει ελάχιστο την τιμή $f(1) = 0$ και για $t_2 = 3$ παρουσιάζει μέγιστο την τιμή $f(3) = 4$.

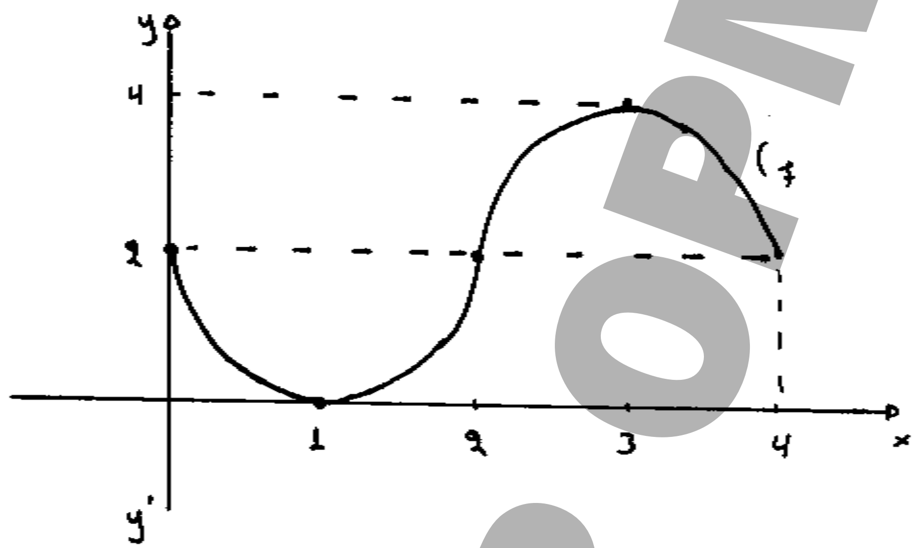
(γ) Είναι, • $f(0) = -2ημ0 + 2 = 2$

• $f(1) \overset{(β)}{=} 0$

• $f(2) = -2ημ\frac{π2}{2} + 2 = -2ημπ + 2 = 2$

• $f(3) \overset{(β)}{=} 4$

• $f(4) = -2ημ\frac{π4}{2} + 2 = -2ημ2π + 2 = 2$



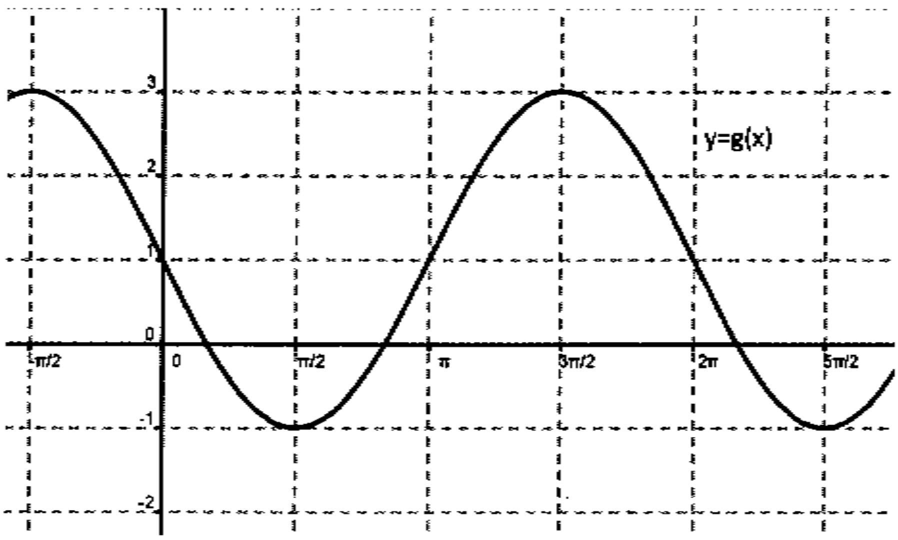
ΘΕΜΑ 4 / 20923.pdf

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2ημ(3x)+1,\ x\in\mathbb{R}$

α) Να βρείτε την περίοδο Τ και τη μέγιστη τιμή της f. (Μονάδες 5)

β) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$g(x)=αημ(βx)+γ,\ x\in\mathbb{R}$$



i. Να προσδιορίσετε τα $α$, $β$, $γ$. (Μονάδες 12)

ii. Για $α=-2$, $β=1$ και $γ=1$, να λύσετε την εξίσωση $f(x)=g(x)$ στο διάστημα $[0,\pi)$. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4/20993

(α) Η περίοδος T είναι ίση με $T=\frac{2\pi}{3}$, διότι

• $\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)\in A_f$, $\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)\in A_f$.

• $f\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)=2\eta\mu\left[3\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)\right]+1=2\eta\mu(3x+2\pi)+1=$

$=2\eta\mu 3x+1=f(x)$

$f\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)=2\eta\mu\left[3\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)\right]+1=2\eta\mu(3x-2\pi)+1=$

$=2\eta\mu 3x+1=f(x)$.

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$-1\le\eta\mu 3x\le 1\Leftrightarrow -2\le 2\eta\mu 3x\le 2\Leftrightarrow -2+1\le 1+2\eta\mu 3x\le 2+1$

$\Leftrightarrow -1\le f(x)\le 3$.

Άρα, η μέγιστη τιμή της f είναι 3.

(β)(i). $A(0,1)\in C_g\Leftrightarrow g(0)=1\Leftrightarrow\gamma=1$

Άρα, $g(x)=\alpha\eta\mu(\beta x)+1$, $x\in\mathbb{R}$.

Επίσης, η περίοδος T είναι $T=2\pi$, δηλαδή

$\frac{2\pi}{\beta}=2\pi\Leftrightarrow\beta=1$. Άρα, $g(x)=\alpha\eta\mu x+1$ $x\in\mathbb{R}$.

Επίσης, $B\left(\frac{3\pi}{2},3\right)\in C_g\Leftrightarrow g\left(\frac{3\pi}{2}\right)=3\Leftrightarrow\alpha\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2}\right)+1=3$

$\Leftrightarrow\alpha\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2}\right)=2\Leftrightarrow\alpha(-1)=2\Leftrightarrow-\alpha=2\Leftrightarrow\alpha=-2$

Άρα, $\alpha=-2$, $\beta=1$ και $\gamma=1$.

(ii) Αν $\alpha=-2$, $\beta=1$ και $\gamma=1$, έχουμε $g(x)=-2\eta\mu x+1$

Οπότε, $f(x)=g(x)\Leftrightarrow 2\eta\mu 3x+1=-2\eta\mu x+1\Leftrightarrow$

$2ημ3x = -2ημx \Leftrightarrow ημ3x = -ημx \Leftrightarrow ημ3x = ημ(-x)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 2κπ + (-x) \\ \quad ή \\ 3x = 2κπ + π - (-x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 2κπ \\ \quad ή \\ 2x = 2κπ + π \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{κπ}{2} \\ \quad ή \\ x = κπ + \frac{π}{2} \end{cases}, κ \in \mathbb{Z}$$

Όμως, $x \in [0, π)$, οπότε

• Αν $x = \frac{κπ}{2}, κ \in \mathbb{Z}$ έχουμε: $0 \le x < π \Leftrightarrow 0 \le \frac{κπ}{2} < π \Leftrightarrow$

$0 \le \frac{κ}{2} < 1 \Leftrightarrow 0 \le κ < 2$ που $κ \in \mathbb{Z}$ άρα $κ = 0, κ = 1$.

Για $κ = 0$, έχουμε $x_1 = 0$.

Για $κ = 1$, έχουμε $x_2 = \frac{π}{2}$.

• Αν $x = κπ + \frac{π}{2}, κ \in \mathbb{Z}$ έχουμε: $0 \le x < π \Leftrightarrow$

$0 \le κπ + \frac{π}{2} < π \Leftrightarrow 0 \le κ + \frac{1}{2} < 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \le κ < \frac{1}{2}$ που

$κ \in \mathbb{Z}$ άρα $κ = 0$

Για $κ = 0$, έχουμε: $x_3 = \frac{π}{2}$.

Επομένως, $x_1 = 0$ ή $x_2 = \frac{π}{2}$.

ΘΕΜΑ 4 / 22690.pdf

Δίνεται η εξίσωση

$$1 - \eta\mu x = \sqrt{3}\,\sigma\upsilon\nu x \qquad (A)$$

α) Να αποδείξετε ότι, αν x_0 είναι μία λύση της εξίσωσης (Α), τότε $\sigma\upsilon\nu x_0 \geq 0$.

(Μονάδες 5)

β) Θεωρούμε την εξίσωση

$$(1 - \eta\mu x)^2 = 3\,\sigma\upsilon\nu^2 x \qquad (B)$$

η οποία προκύπτει υψώνοντας στο τετράγωνο τα δύο μέλη της εξίσωσης (Α). Να λύσετε την εξίσωση (Β). (Μονάδες 12)

γ) Να λύσετε την εξίσωση (Α). (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4/22690

(α) Το x_0 είναι μια λύση της εξίσωσης (Α), δηλαδή την επαληθεύει, άρα $1-\eta\mu x_0 = \sqrt{3}\,\sigma\upsilon\nu x_0$ (1)

Έχουμε, $-1 \leq \eta\mu x_0 \leq 1 \Leftrightarrow 1 \geq -\eta\mu x_0 \geq -1 \Leftrightarrow$

$-1 \leq -\eta\mu x_0 \leq 1 \Leftrightarrow 1-1 \leq 1-\eta\mu x_0 \leq 1+1 \Leftrightarrow 0 \leq 1-\eta\mu x_0 \leq 2$

$\overset{(1)}{\Longleftrightarrow} 0 \leq \sqrt{3}\,\sigma\upsilon\nu x_0 \leq 2 \Leftrightarrow \dfrac{0}{\sqrt{3}} \leq \dfrac{\sqrt{3}\,\sigma\upsilon\nu x_0}{\sqrt{3}} \leq \dfrac{2}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow$

$0 \leq \sigma\upsilon\nu x_0 \leq \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$, άρα $\sigma\upsilon\nu x_0 \geq 0$

(β) Έχουμε, $(1-\eta\mu x)^2 = 3\sigma\upsilon\nu^2 x \Leftrightarrow$

$1-2\eta\mu x + \eta\mu^2 x = 3(1-\eta\mu^2 x) \Leftrightarrow 1-2\eta\mu x+\eta\mu^2 x = 3-3\eta\mu^2 x \Leftrightarrow$

$4\eta\mu^2 x - 2\eta\mu x - 2 = 0 \Leftrightarrow 2\eta\mu^2 x - \eta\mu x - 1 = 0.$ (2)

Θέτω: $\eta\mu x = \omega$, με $-1 \leq \omega \leq 1$, άρα η (2) γίνεται:

$2\omega^2 - \omega - 1 = 0$ Είναι, $\Delta = (-1)^2 - 4\cdot 2(-1) = 1+8 = 9 > 0$

Οπότε, $\omega_{1,2} = \dfrac{-(-1)\pm\sqrt{9}}{2\cdot 2} = \dfrac{1\pm 3}{4}$ $\begin{cases} \omega_1 = \dfrac{1+3}{4} = 1 & \text{ΔΕΚΤΟ} \\ \omega_2 = \dfrac{1-3}{4} = -\dfrac{1}{2} & \text{ΔΕΚΤΟ} \end{cases}$

• Για $\omega_1 = 1$, έχουμε: $\eta\mu x = 1 \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi + \dfrac{\pi}{2}, \kappa\in\mathbb{Z}$

• Για $\omega_2 = -\dfrac{1}{2}$, έχουμε: $\eta\mu x = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu x = -\eta\mu\dfrac{\pi}{6} \Leftrightarrow$

$\eta\mu x = \eta\mu\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi + \left(-\dfrac{\pi}{6}\right) \\ \text{ή} \\ x = 2\kappa\pi + \pi - \left(-\dfrac{\pi}{6}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi - \dfrac{\pi}{6} \\ \text{ή} \\ x = 2\kappa\pi + \dfrac{7\pi}{6} \end{cases}, \kappa\in\mathbb{Z}$

(γ) Από τη σχέση (Β), έχουμε:

$(1-\eta\mu x)^2 = 3\sigma\upsilon\nu^2 x \xLongleftrightarrow{\rho\iota\zeta} \sqrt{(1-\eta\mu x)^2} = \sqrt{3\sigma\upsilon\nu^2 x} \Leftrightarrow$

$|1-\eta\mu x| = |\sqrt{3}\,\sigma\upsilon\nu x| \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 1-ημx = \sqrt{3}\,συνx & (A) \\ \quad ή \\ 1-ημx = -\sqrt{3}\,συνx & (Γ) \end{cases}$$

Οι λύσεις της (Β) είναι η ένωση των λύσεων των (Α) και (Γ). Επίσης, από το (β) έχουμε ότι οι λύσεις της (Β) είναι: $x = 2κπ + \frac{π}{2}$, $κ \in \mathbb{Z}$, $x = 2κπ - \frac{π}{6}$, $κ \in \mathbb{Z}$ και $x = 2κπ + \frac{7π}{6}$, $κ \in \mathbb{Z}$

Τώρα θέλουμε να βρούμε τις λύσεις της (Α), οι οποίες θα είναι ένα υποσύνολο των λύσεων της (Β). Επίσης, γνωρίζουμε από (α) ότι αν x_0 είναι μία λύση της εξίσωσης (Α), τότε $συνx_0 \geq 0$

- Για $x = 2κπ + \frac{π}{2}$, $κ \in \mathbb{Z}$, έχουμε: $συν\left(2κπ + \frac{π}{2}\right) = 0 \geq 0$ __ΔΕΚΤΟ__
- Για $x = 2κπ - \frac{π}{6}$, $κ \in \mathbb{Z}$, έχουμε: $συν\left(2κπ - \frac{π}{6}\right) = συν\left(-\frac{π}{6}\right) =$
$= συν\frac{π}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \geq 0$ __ΔΕΚΤΟ__

- Για $x = 2κπ + \frac{7π}{6}$, $κ \in \mathbb{Z}$ έχουμε: $συν\left(2κπ + \frac{7π}{6}\right) = συν\frac{7π}{6}$

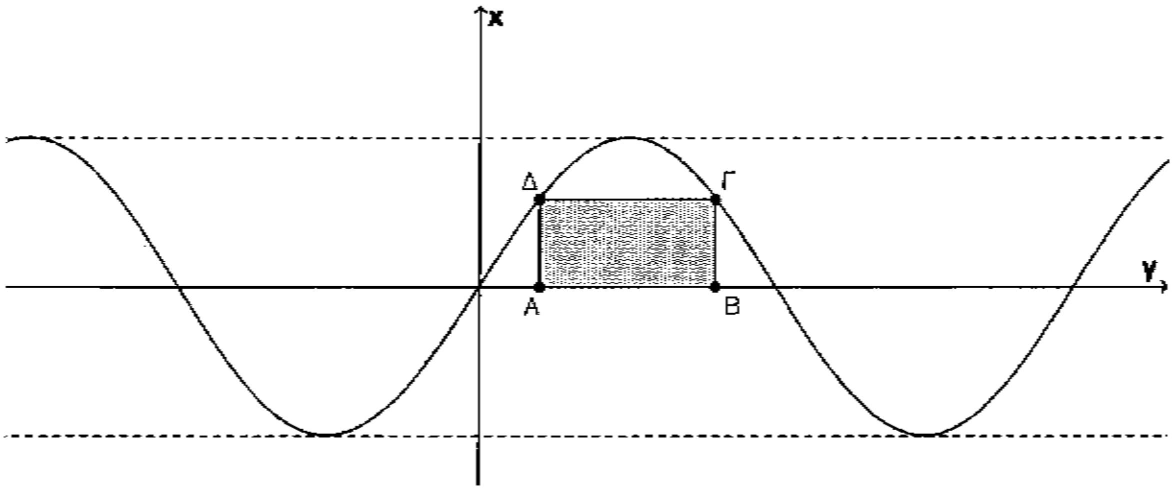
$\overset{\text{παραπλ.}}{=} -συν\left(π - \frac{7π}{6}\right) = -συν\left(-\frac{π}{6}\right) \overset{\text{αντιθ}}{=} -συν\frac{π}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Οπότε, η $x = 2κπ + \frac{7π}{6}$, $κ \in \mathbb{Z}$ __ΑΠΟΡ__.

Επομένως, η εξίσωση (Α) γίνεται αληθής για $x = 2κπ + \frac{π}{2}$, $κ \in \mathbb{Z}$ και $x = 2κπ - \frac{π}{6}$, $κ \in \mathbb{Z}$.

ΘΕΜΑ 4 / 22691.pdf

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=2\eta\mu\left(\frac{\pi}{4}\cdot x\right)$.



α) Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης f.

(Μονάδες 5)

β) Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο με Α $(\frac{2}{3}, 0)$. Να βρείτε:

i. τις συντεταγμένες του σημείου Δ. (Μονάδες 10)

ii. τις συντεταγμένες των σημείων Β και Γ.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4/22691

(α) Η περίοδος T είναι ίση με $T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}} = 8$, διότι

- $(x+8) \in A_f$ και $(x-8) \in A_f$
- $f(x+8) = 2\eta\mu\left[\frac{\pi}{4}(x+8)\right] = 2\eta\mu\left(\frac{\pi}{4}\cdot x + 2\pi\right) = 2\eta\mu\frac{\pi}{4}x = f(x)$

  $f(x-8) = 2\eta\mu\left[\frac{\pi}{4}(x-8)\right] = 2\eta\mu\left(\frac{\pi}{4}x - 2\pi\right) = 2\eta\mu\frac{\pi}{4}x = f(x)$

(β) (i) Οι συντεταγμένες του Δ είναι $\Delta\left(\frac{2}{3}, y\right)$, όμως

$\Delta\left(\frac{2}{3}, y\right) \in C_f \Leftrightarrow f\left(\frac{2}{3}\right) = y \Leftrightarrow y = 2\eta\mu\left(\frac{\pi}{4}\cdot\frac{2}{3}\right) \Leftrightarrow y = 2\eta\mu\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow$

$y = 2\frac{1}{2} \Leftrightarrow y = 1$. Άρα, $\Delta\left(\frac{2}{3}, 1\right)$

(ii) Το σημείο Γ έχει ίση τεταγμένη με αυτή του σημείου Δ, άρα $\Gamma(x_\Gamma, 1)$.

Επίσης, $\Gamma(x_\Gamma, 1) \in C_f \Leftrightarrow f(x_\Gamma) = 1 \Leftrightarrow 2\eta\mu\left(\frac{\pi}{4}\cdot x_\Gamma\right) = 1 \Leftrightarrow$

$\eta\mu\left(\frac{\pi}{4}\cdot x_\Gamma\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu\left(\frac{\pi}{4}\cdot x_\Gamma\right) = \eta\mu\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow$

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\pi}{4}\cdot x_\Gamma = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \\ \quad\quad ή \\ \frac{\pi}{4}\cdot x_\Gamma = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \frac{x_\Gamma}{4} = 2\kappa + \frac{1}{6} \\ \quad\quad ή \\ \frac{x_\Gamma}{4} = 2\kappa + 1 - \frac{1}{6} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_\Gamma = 8\kappa + \frac{2}{3} \\ \quad\quad ή \\ x_\Gamma = 8\kappa + \frac{10}{3} \end{array}\right., \kappa \in \mathbb{Z}$$

Από τη γραφική παράσταση καταλαβαίνουμε ότι $2 < x_\Gamma < 4$, οπότε

- αν $x_\Gamma = 8\kappa + \frac{2}{3}, \kappa \in \mathbb{Z}$, τότε $2 < 8\kappa + \frac{2}{3} < 4 \Leftrightarrow$

$2 - \frac{2}{3} < 8\kappa < 4 - \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{4}{3} < 8\kappa < \frac{10}{3} \Leftrightarrow \frac{4}{3\cdot 8} < \kappa < \frac{10}{3\cdot 8} \Leftrightarrow$

$\frac{1}{6} < \kappa < \frac{5}{12}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$. Όμως δεν υπάρχει ακέραιος ο οποίος να ανήκει στο $\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{12}\right)$.

• αν $x_\Gamma = 8\kappa + \frac{10}{3}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$ τότε $2 < 8\kappa + \frac{10}{3} < 4 \Leftrightarrow$

$2 - \frac{10}{3} < 8\kappa < 4 - \frac{10}{3} \Leftrightarrow -\frac{4}{3} < 8\kappa < \frac{2}{3} \Leftrightarrow -\frac{4}{3\cdot 8} < \kappa < \frac{2}{3\cdot 8}$

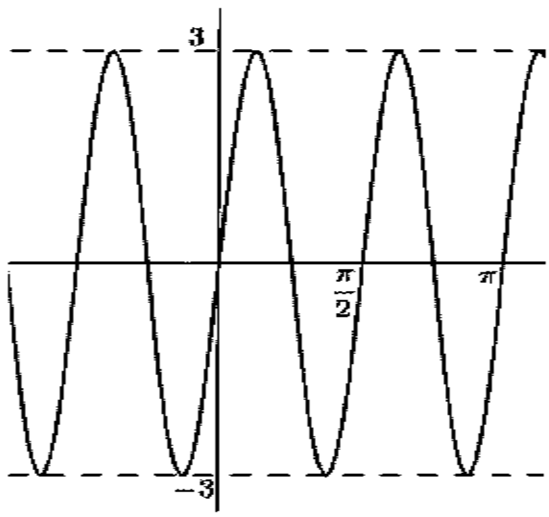
$\Leftrightarrow -\frac{1}{6} < \kappa < \frac{1}{12}$ και $\kappa \in \mathbb{Z}$ άρα $\kappa = 0$

Για $\kappa = 0$, έχουμε $x_\Gamma = 8\cdot 0 + \frac{10}{3} \Leftrightarrow x_\Gamma = \frac{10}{3}$

Άρα, $\Gamma\left(\frac{10}{3}, 1\right)$, επομένως $B\left(\frac{10}{3}, 0\right)$

ΘΕΜΑ 4 / 22693.pdf

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\alpha\eta\mu(\omega x)$ με παραμέτρους $\alpha,\omega>0$.



Να βρείτε:

α) την περίοδο της συνάρτησης f (Μονάδες 9)

β) τους αριθμούς α και ω (Μονάδες 8)

γ) τους αριθμούς $\kappa\in\mathbb{R}$ για τους οποίους η εξίσωση $f(x)=\kappa$ έχει μοναδική λύση στο διάστημα $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ και στη συνέχεια να λυθεί η εξίσωση αυτή. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4/22693

(α) Από το σχήμα παρατηρούμε ότι $T = \frac{\pi}{2}$

(β) Από (α) έχουμε $T = \frac{\pi}{2}$, άρα $\frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$

$\omega\pi = 4\pi \Leftrightarrow \omega = 4$

Επίσης, η f παρουσιάζει μέγιστο την τιμή 3, άρα $\alpha = 3$

(γ) Για $\alpha = 3$ και $\omega = 4$, έχουμε: $f(x) = 3\eta\mu 4x$

Η εξίσωση $f(x) = \kappa$ έχει μοναδική λύση στο διάστημα $[0, \frac{\pi}{2})$, αν και μόνο αν, η ευθεία $y = \kappa$ τέμνει τη C_f σε ένα ακριβώς σημείο στο διάστημα $[0, \frac{\pi}{2})$. Άρα, $y = 3$ ή $y = -3$.

- Αν $y = 3$, τότε έχουμε: $3\eta\mu 4x = 3 \Leftrightarrow \eta\mu 4x = 1 \Leftrightarrow$

$4x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\kappa\pi}{2} + \frac{\pi}{8}, \kappa \in \mathbb{Z}$.

- Αν $y = -3$, τότε έχουμε: $3\eta\mu 4x = -3 \Leftrightarrow \eta\mu 4x = -1 \Leftrightarrow$

$4x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\kappa\pi}{2} - \frac{\pi}{8}, \kappa \in \mathbb{Z}$