

ΘΕΜΑ 2 / 16962

Η γραφική παράσταση μιας γνησίως μονότονης συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ διέρχεται από τα σημεία $A(5,2)$ και $B(4,9)$.

α) Να προσδιορίσετε το είδος της μονοτονίας της f αιτιολογώντας την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την ανίσωση $f(5-3x) < 2$.

(Μονάδες 13)

(α) Έστω f η γραφική παράσταση της f και η f διέρχεται από τα σημεία $A(5,2)$ και $B(4,9)$, δηλαδή

$$\bullet A(5,2) \in f \Rightarrow f(5) = 2 \quad (1)$$

$$\bullet B(4,9) \in f \Rightarrow f(4) = 9$$

Οπότε, με $5 > 4$ έχουμε $f(5) < f(4)$ και η f είναι γνησίως μονότονη, οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$f(5-3x) < 2 \stackrel{(1)}{\iff} f(5-3x) < f(5) \stackrel{f \text{ φθίνουσα}}{\iff}$$

$$5-3x > 5 \iff -3x > 0 \iff 3x < 0 \iff x < 0$$

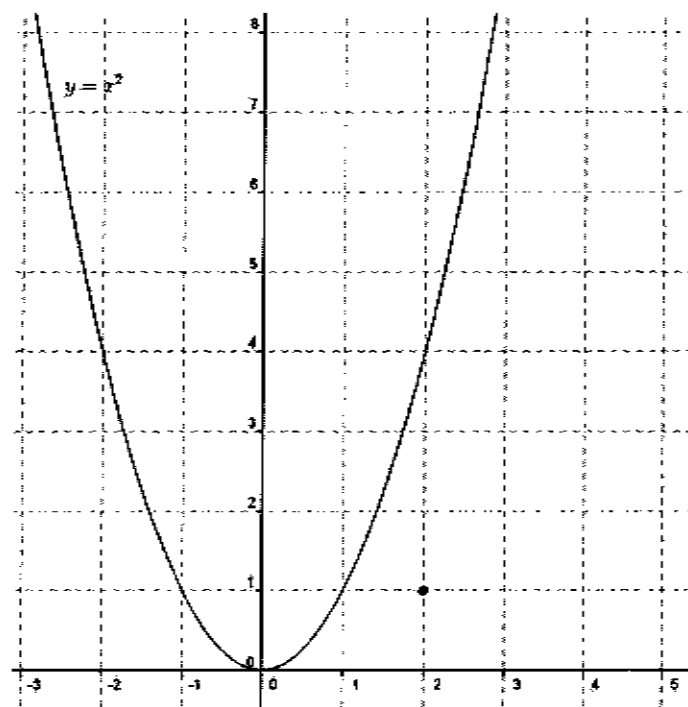
Επομένως, η αρχική ανίσωση ικανοποιείται για κάθε $x < 0$.

ΘΕΜΑ 2 / 16965

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x + 5, x \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι η f γράφεται στη μορφή $f(x) = (x - 2)^2 + 1$. (Μονάδες 12)

β) Στο σύστημα συντεταγμένων που ακολουθεί, να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f , μετατοπίζοντας κατάλληλα την $y = x^2$. (Μονάδες 13)



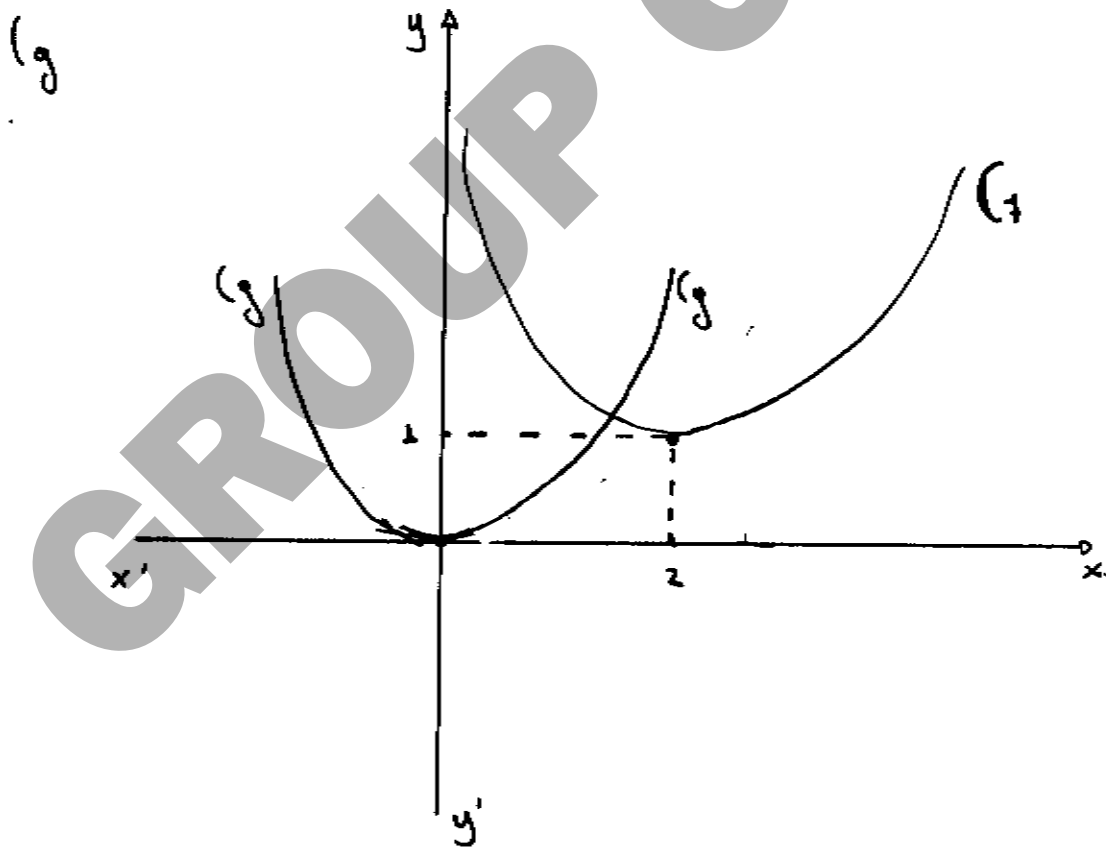
(Μονάδες 13)

(α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$f(x) = x^2 - 4x + 5 = x^2 - 4x + 4 + 1 \Rightarrow f(x) = (x-2)^2 + 1.$$

(β) Έστω $g(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$.

Παρατηρούμε ότι η f προκύπτει από τη g με οριζόντια μετατόπιση κατά δύο μονάδες προς τα δεξιά και με κατακόρυφη μετατόπιση κατά μία μονάδα προς τα πάνω.



ΘΕΜΑ 2 / 17688

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$, με $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η $f(x) \leq 1$. (Μονάδες 8)

β) Είναι το 1 η μέγιστη τιμή της συνάρτησης; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 8)

γ) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση είναι άρτια ή περιττή. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 2/17688

(α) Έστω $f(x) \leq 1 \Leftrightarrow \frac{2x}{x^2+1} \leq 1 \xLeftrightarrow{x^2+1>0}$

$$(x^2+1) \frac{2x}{x^2+1} \leq x^2+1 \Leftrightarrow 2x \leq x^2+1 \Leftrightarrow x^2-2x+1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 0 \text{ που ισχύει}$$

(β) Παρατηρούμε ότι: $f(1) = \frac{2 \cdot 1}{1^2+1} = 1$

Από (α) έχουμε: $f(x) \leq 1 \Leftrightarrow f(x) \leq f(1) \Leftrightarrow f(1) \geq f(x)$,
για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άρα, η f στο $x_0=1$ παρουσιάζει μέγιστο των
τιμών $f(1)=1$.

(γ) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύουν:

- $-x \in \mathbb{R}$

- $f(-x) = \frac{2(-x)}{(-x)^2+1} = \frac{-2x}{x^2+1} = -\frac{2x}{x^2+1} = -f(x)$.

Άρα, η f είναι περιττή.

ΘΕΜΑ 2 / 17698

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Να απαντήσετε τα παρακάτω ερωτήματα:

α) Να διατάξετε από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τους αριθμούς $f(x_1)$, $f(x_2)$ και $f(x_3)$.

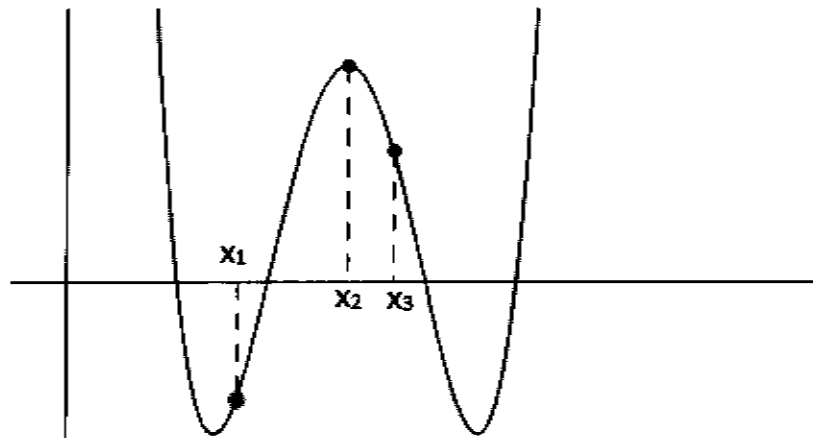
(Μονάδες 10)

β) Είναι η συνάρτηση f γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

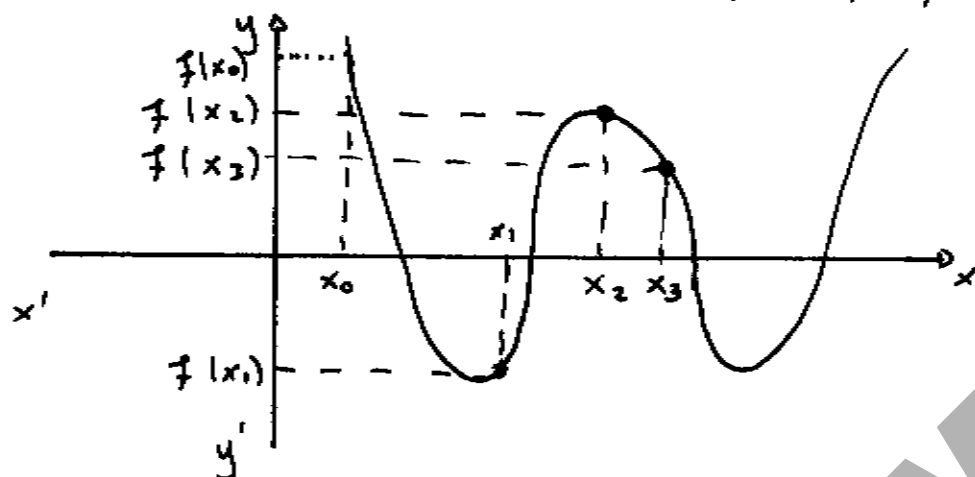
(Μονάδες 10)

γ) Παρουσιάζει η f μέγιστο στο σημείο x_2 ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)



(α) Έχουμε, $f(x_1) < f(x_3) < f(x_2)$, διότι



(β) Η f δεν είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$, διότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_1, x_2]$, ενώ η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_2, x_3]$.

(γ) Η f παρουσιάζει μέγιστο στο x_2 των τιμών $f(x_2)$, αν και μόνο αν, $f(x_2) \geq f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Όμως, υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(x_0) > f(x_2)$

Άρα, η f δεν παρουσιάζει μέγιστο στο σημείο x_2 .

ΘΕΜΑ 2 / 17732

Έστω γνησίως μονότονη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η γραφική παράσταση της οποίας διέρχεται από τα σημεία $A(2,3)$ και $B(4,5)$.

α) Να προσδιορίσετε το είδος της μονοτονίας της f . (Μονάδες 13)

β) Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο -2, να δείξετε ότι $f'(0) > 0$.

(Μονάδες 12)

(α) Έστω f η γραφική παράσταση της f και η f διέρχεται από τα σημεία $A(2,3)$ και $B(4,5)$, δηλαδή

$$\bullet A(2,3) \in f \Leftrightarrow f(2) = 3$$

$$\bullet B(4,5) \in f \Leftrightarrow f(4) = 5$$

Οπότε, με $2 < 4$ έχουμε $f(2) < f(4)$. Επίσης, η f είναι γνησίως μονότονη, δηλαδή η f θα είναι ή γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$. Άρα, η f είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(β) Η f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο -2 , δηλαδή η f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο $\Gamma(-2,0)$ άρα $\Gamma(-2,0) \in f \Leftrightarrow f(-2) = 0$

Έχουμε, $-2 < 0$ και η $f \uparrow$ στο $\mathbb{R}$, άρα

$$f(-2) < f(0) \Leftrightarrow 0 < f(0) \Leftrightarrow f(0) > 0.$$

ΘΕΜΑ 2 / 18632

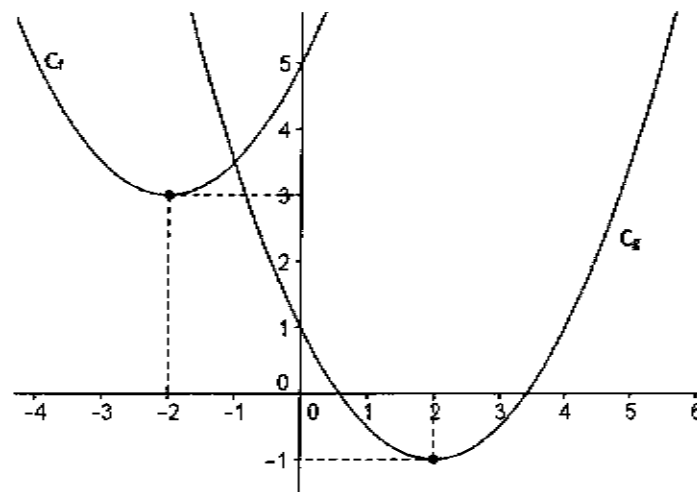
Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι παραβολές C_f και C_g που είναι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g αντίστοιχα με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Η γραφική παράσταση της g προκύπτει από τη γραφική παράσταση της f με οριζόντια και κατακόρυφη μετατόπιση. Παρατηρώντας το σχήμα:

α) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας, το είδος του ακρότατου της f και την τιμή του.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε μέσω ποιων μετατοπίσεων της C_f προκύπτει η C_g .

(Μονάδες 15)



ΘΕΜΑ 2/18632

(α) Η f είναι γνησίως φθίνουσα για κάθε $x \in (-\infty, -2]$

Η f είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $x \in [-2, +\infty)$

Η f στο $x_0 = -2$ παρουσιάζει ΕΛΑΧΙΣΤΟ την τιμή $f(-2) = 3$.

(β) Η g προκύπτει από την f με κατακόρυφη μετατόπιση προς τα κάτω κατά 4 μονάδες και με οριζόντια μετατόπιση προς τα δεξιά κατά 4 μονάδες.

ΘΕΜΑ 2 / 18634

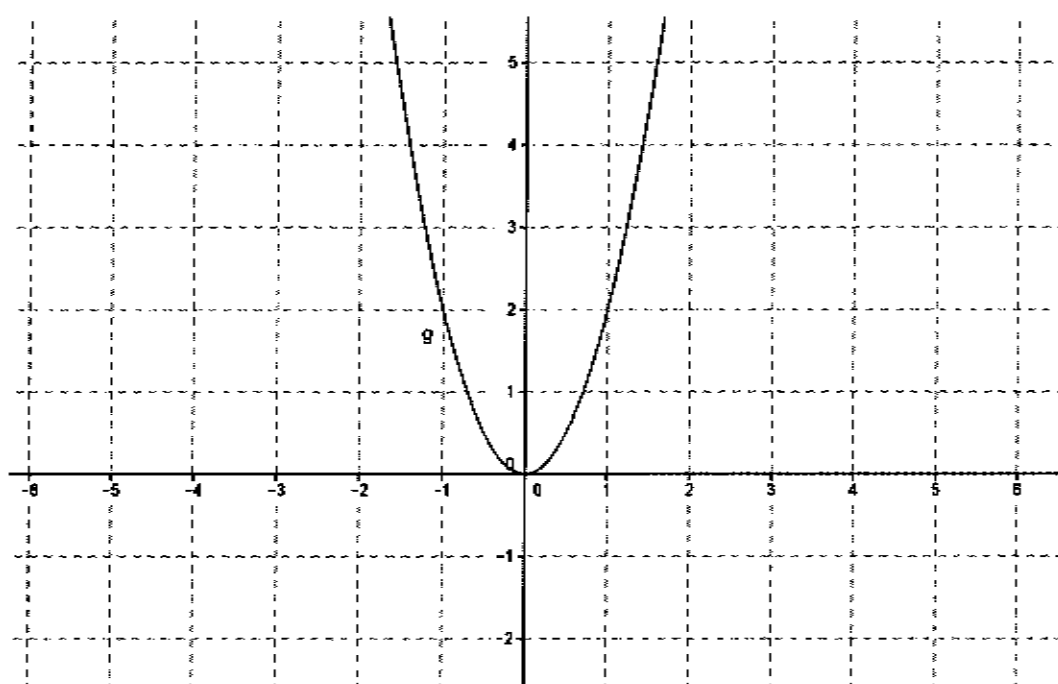
Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^2 - 12x + 19$.

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f γράφεται στη μορφή: $f(x) = 2(x - 3)^2 + 1$.

(Μονάδες 10)

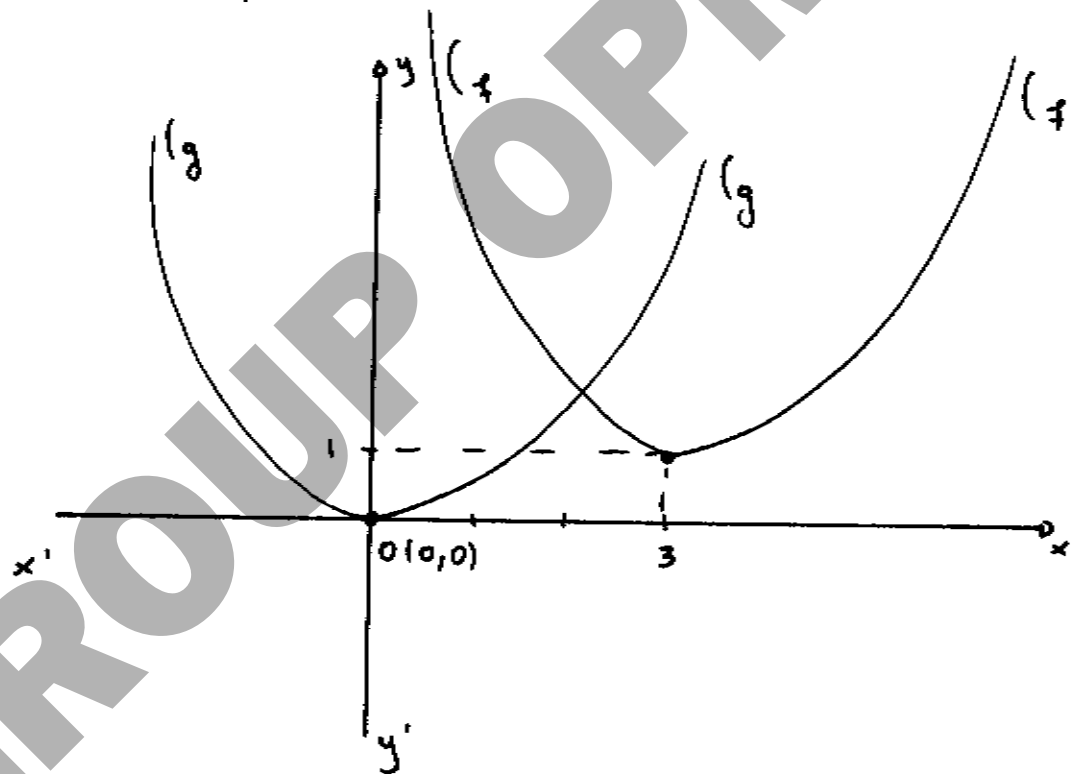
β) Παρακάτω δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = 2x^2$. Στο ίδιο σύστημα αξόνων, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και να εξηγήσετε πώς αυτή προκύπτει μετατοπίζοντας κατάλληλα τη γραφική παράσταση της g .

(Μονάδες 15)



(α) Έχουμε, $f(x) = 2x^2 - 12x + 19 = 2x^2 - 12x + 18 + 1 =$
 $= 2(x^2 - 6x + 9) + 1 \Leftrightarrow f(x) = 2(x-3)^2 + 1$

(β) Η (f) προκύπτει από τη (g) με κατακόρυφη μετατόπιση προς τα πάνω κατά 1 μονάδα και με οριζόντια μετατόπιση προς τα δεξιά κατά 3 μονάδες.



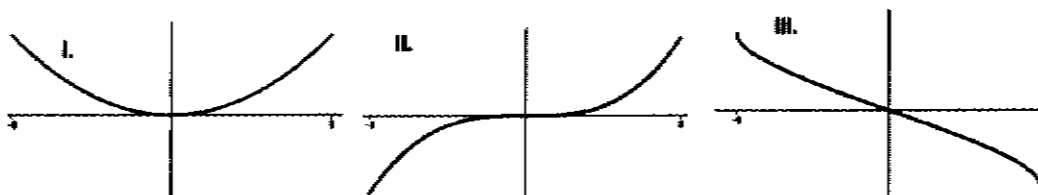
ΘΕΜΑ 4 / 17833

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{8-x} - \sqrt{8+x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f . (Μονάδες 5)

β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι άρτια ή περιττή. (Μονάδες 8)

γ) Αν η συνάρτησης f είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της, να επιλέξετε ποια από τις παρακάτω τρεις προτεινόμενες, είναι η γραφική της παράσταση και στη συνέχεια να υπολογίσετε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της.



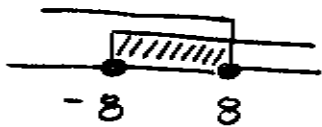
(Μονάδες 7)

δ) Να αιτιολογήσετε γραφικά ή αλγεβρικά, γιατί οι συναρτήσεις $g(x) = f(x) - 3$ και $h(x) = f(x+3)$ δεν είναι ούτε άρτιες ούτε περιττές.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4/17833

(α) Πρέπει και αρκεί: $\begin{cases} 8-x \geq 0 \\ \text{και} \\ 8+x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 8 \\ \text{και} \\ x \geq -8 \end{cases}$

Συναρτησιακή:  Άρα, $A_f = [-8, 8]$.

(β) Για κάθε $x \in [-8, 8]$, έχουμε:

- $-x \in [-8, 8]$

- $f(-x) = \sqrt{8-(-x)} - \sqrt{8+(-x)} = \sqrt{8+x} - \sqrt{8-x} =$
 $= -(\sqrt{8-x} - \sqrt{8+x}) = -f(x)$

Άρα, η f είναι περιττή.

(γ) Αφού η f είναι συνεχώς φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της, τότε η γραφική της παράσταση μπορεί να είναι μόνο η III. Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης η f στο $x_1 = -8$ παρουσιάζει ΜΕΓΙΣΤΟ την τιμή $f(-8) = \sqrt{8-(-8)} - \sqrt{8-8} = \sqrt{16} = 4$, ενώ η f στο $x_2 = 8$ παρουσιάζει ΕΛΑΧΙΣΤΟ την τιμή $f(8) = \sqrt{8-8} - \sqrt{8+8} = -\sqrt{16} = -4$

(δ) Αλγεβρική ερμηνεία:

► Για κάθε $x \in [-8, 8]$ έχουμε: $g(x) = f(x) - 3 \Leftrightarrow$

$$g(x) = \sqrt{8-x} - \sqrt{8+x} - 3$$

Για κάθε $x \in [-8, 8]$ έχουμε:

- $-x \in [-8, 8]$

- $g(-x) = \sqrt{8-(-x)} - \sqrt{8-x} - 3 = \sqrt{8+x} - \sqrt{8-x} - 3 \neq g(x) \neq -g(x)$

Άρα, η g δεν είναι άρτια, ούτε περιττή.

► Για κάθε $x \in [-11, 5]$, έχουμε: $h(x) = f(x+3) \Leftrightarrow$

$$h(x) = \sqrt{8-(x+3)} - \sqrt{8+x+3} = \sqrt{5-x} - \sqrt{11+x} \Leftrightarrow$$

$$h(x) = \sqrt{5-x} - \sqrt{11+x}$$

Για κάθε $x \in [-11, 5]$, έχουμε:

- $-x \notin [-11, 5]$, διότι $-10 \in [-11, 5]$, όμως $10 \notin [-11, 5]$

Άρα η h δεν είναι άρτια, ούτε περιττή.

Γεωμετρική ερμηνεία:

► Η g προκύπτει από τη f με κατακόρυφη μετατόπιση κατά 3 μονάδες προς τα κάτω
Άρα η g δεν μπορεί να είναι ευήμετρική ως προς το $O(0,0)$, ούτε ως προς τον $y'y$.

Άρα, η g δεν μπορεί να είναι άρτια, ούτε περιττή.

► Η h προκύπτει από τη f με οριζόντια μετατόπιση κατά 3 μονάδες προς τα αριστερά.
Δηλαδή, η h δεν μπορεί να είναι ευήμετρική ούτε ως προς το $O(0,0)$, ούτε ως προς τον $y'y$. Άρα, η h δεν είναι άρτια, ούτε περιττή.

ΘΕΜΑ 4 / 17842

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{1}{2}(x-c)^2 - d, \quad x \in \mathbb{R}$

με c, d θετικές σταθερές, η γραφική παράσταση της οποίας διέρχεται από τα σημεία

$A(0, 16)$ και $B(4, 0)$.

α) Με βάση τα δεδομένα, να κατασκευάσετε ένα σύστημα δύο εξισώσεων με αγνώστους τους c, d και να υπολογίσετε την τιμή τους. (Μονάδες 10)

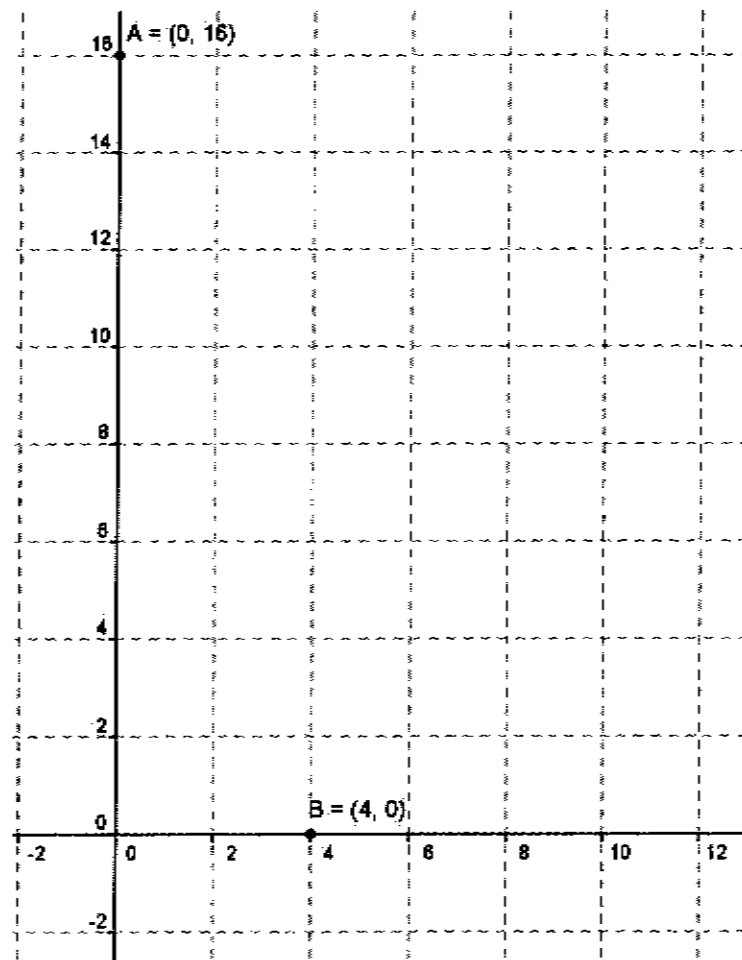
β) Θεωρώντας γνωστό ότι $c = 6$ και $d = 2$,

i. να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες. (Μονάδες 3)

ii. να μεταφέρετε στην κόλα σας το σύστημα συντεταγμένων που ακολουθεί, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και να εξηγήσετε πώς αυτή

σχετίζεται με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = \frac{1}{2}x^2$ (Μονάδες 6)

iii. με βάση την παραπάνω γραφική παράσταση, να βρείτε το ακρότατο της συνάρτησης f , τα διαστήματα στα οποία η f είναι μονότονη, καθώς και το είδος της μονοτονίας της σε καθένα από αυτά τα διαστήματα. (Μονάδες 6)



$$(a) \bullet A(0,16) \in (\gamma \Rightarrow \gamma(0)=16 \Rightarrow \frac{1}{2}(0-c)^2 - d = 16 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}c^2 - d = 16$$

$$\bullet B(4,0) \in (\gamma \Rightarrow \gamma(4)=0 \Rightarrow \frac{1}{2}(4-c)^2 - d = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}(16-8c+c^2) - d = 0 \Rightarrow 8-4c + \frac{1}{2}c^2 - d = 0$$

Οπότε, προκύπτει το σύστημα:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}c^2 - d = 16 \\ 8-4c + \frac{1}{2}c^2 - d = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -d = 16 - \frac{1}{2}c^2 \\ 8-4c + \frac{1}{2}c^2 + 16 - \frac{1}{2}c^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -d = 16 - \frac{1}{2}c^2 \\ -4c + 24 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = -16 + \frac{1}{2}c^2 \\ -4c = -24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = -16 + \frac{36}{2} \\ c = 6 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} d = 2 & \text{ΔΕΚΤΟ} \\ c = 6 & \text{ΔΕΚΤΟ} \end{cases}$$

(β) Για $c = 6$ και $d = 2$, έχουμε: $\gamma(x) = \frac{1}{2}(x-6)^2 - 2$

(i) Έστω $y = \frac{1}{2}(x-6)^2 - 2$ η εξίσωση της (γ) .

$$\bullet \text{Για } x=0, \text{ έχουμε: } y = \frac{1}{2}(0-6)^2 - 2 = \frac{36}{2} - 2 = 16$$

Άρα, η (γ) τέμνει τον y -αξονα στο σημείο $A(0,16)$

$$\bullet \text{Για } y=0, \text{ έχουμε: } 0 = \frac{1}{2}(x-6)^2 - 2 \Rightarrow \frac{1}{2}(x-6)^2 - 2 \Rightarrow$$

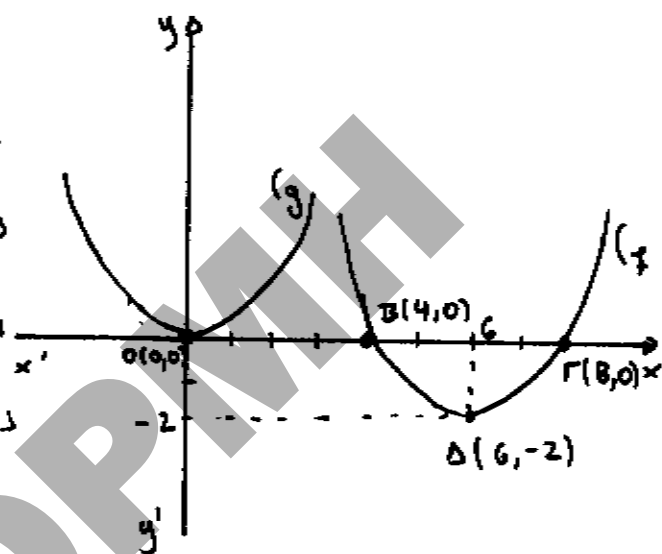
$$(x-6)^2 = 4 \Rightarrow \sqrt{(x-6)^2} = \sqrt{4} \Rightarrow |x-6| = 2 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x-6 = 2 \\ x-6 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 8 \\ x = 4 \end{cases}$$

Άρα, η f τέμνει τον x 'α στα σημεία
 $B(4,0)$ και $\Gamma(8,0)$

(ii) Έχουμε, $g(x) = \frac{1}{2}x^2$ και $f(x) = \frac{1}{2}(x-6)^2 - 2$.

Η f προκύπτει από τη
 g με κατακόρυφη μετατό-
πιση κατά 2 μονάδες προς
τα κάτω και με οριζόντια
μετατόπιση κατά 6 μονάδες
προς τα δεξιά.



(iii) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης
από το (βii) παρατηρούμε ότι η f στο $x_0 = 6$
παρουσιάζει ΕΛΑΧΙΣΤΟ την τιμή $f(6) = -2$.
Η f είναι γνησίως φθίνουσα για κάθε
 $x \in (-\infty, 6]$, η f είναι γνησίως αύξουσα για
κάθε $x \in [6, +\infty)$.

ΣΧΟΛΙΟ: Στο σύστημα συντεταγμένων της
εκφώνησης έχει δύο σημεία Α και Β
δίπλα στα οποία χρησιμοποιεί = . Είναι
τεράστιο ΛΑΘΟΣ.