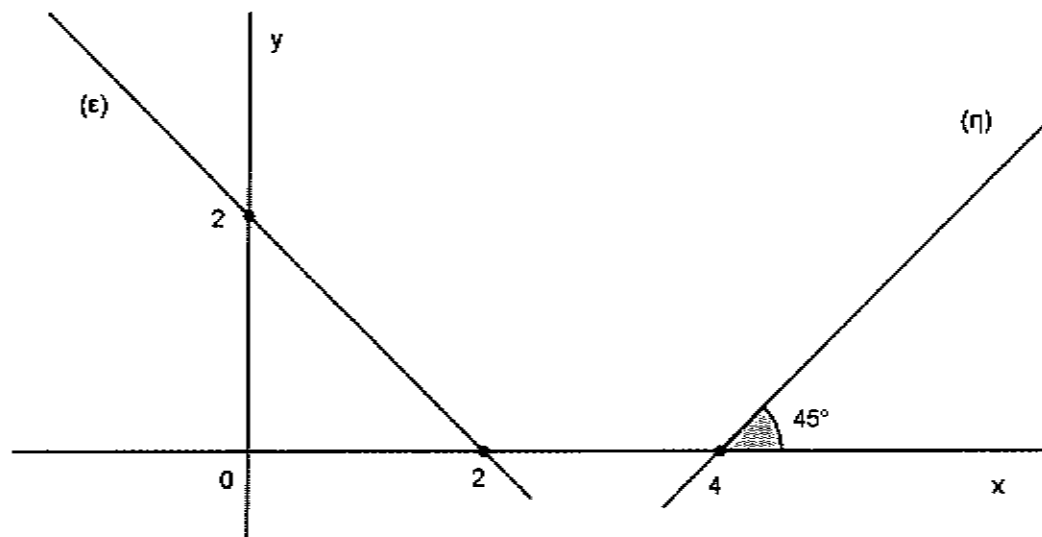


ΘΕΜΑ 2 / 16960

α) Με βάση τα δεδομένα του σχήματος, να προσδιορίσετε τις εξισώσεις των ευθειών (ϵ) και (η) .



(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής τους.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2/16960

(α) Έστω η ευθεία ϵ με εξίσωση: $y = a_1 x + \beta_1$.

Παρατηρούμε ότι τα σημεία $A(2,0)$ και $B(0,2)$ ανήκουν στην ευθεία ϵ , δηλαδή

$$\bullet A(2,0) \in \epsilon \Leftrightarrow 0 = 2a_1 + \beta_1 \quad (1)$$

$$\bullet B(0,2) \in \epsilon \Leftrightarrow 2 = 0a_1 + \beta_1 \Leftrightarrow \beta_1 = 2$$

$$\text{Για } \beta_1 = 2 \text{ η (1) γίνεται: } 0 = 2a_1 + 2 \Leftrightarrow 2a_1 = -2 \Leftrightarrow a_1 = -1$$

$$\text{Άρα, } \epsilon: y = -x + 2.$$

Έστω η ευθεία η με εξίσωση: $y = a_2 x + \beta_2$.

Παρατηρούμε ότι το σημείο $\Gamma(4,0)$ ανήκει στην ευθεία η . Επίσης, η ευθεία η τέμνει τον $x'x$ υπό γωνία 45° , δηλαδή

$$a_2 = \tan 45^\circ \Leftrightarrow a_2 = 1, \text{ άρα η εξίσωση γίνεται: } y = x + \beta_2.$$

$$\bullet \Gamma(4,0) \in \eta \Leftrightarrow 0 = 4 + \beta_2 \Leftrightarrow \beta_2 = -4$$

$$\text{Άρα, } \eta: y = x - 4$$

(β) Για να βρω το σημείο τομής των ευθειών ϵ και η αρκεί να λύσω το σύστημα:

$$\begin{cases} y = -x + 2 \\ y = x - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x + 2 \\ -x + 2 = x - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x + 2 \\ 2x = 6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y = -3 + 2 \\ x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = 3. \end{cases}$$

Άρα, οι ευθείες ε και η τέμνονται στο
σημείο $K(3, -1)$.

ΘΕΜΑ 2 / 16950

α) Να κατασκευάσετε ένα γραμμικό σύστημα δυο εξισώσεων με δυο αγνώστους με συντελεστές διάφορους του μηδενός, το οποίο να είναι αδύνατο.

(Μονάδες 10)

β) Να παραστήσετε γραφικά στο επίπεδο τις δυο εξισώσεις του συστήματος που ορίσατε στο α) ερώτημα και, με βάση το γράφημα, να εξηγήσετε γιατί το σύστημα είναι αδύνατο.

(Μονάδες 15)

(α) Έστω το σύστημα $\begin{cases} x-y = -1 \\ x-y = -2 \end{cases}$ ΑΔΥΝΑΤΟ

(β) Η εξίσωση: $x-y = -1 \Leftrightarrow y = x+1$ παριστάνει ευθεία, έστω ϵ_1 , και η εξίσωση: $x-y = -2 \Leftrightarrow y = x+2$ παριστάνει ευθεία, έστω ϵ_2 .

• Για την ϵ_1 , έχουμε:

x	0	-1
y	1	0

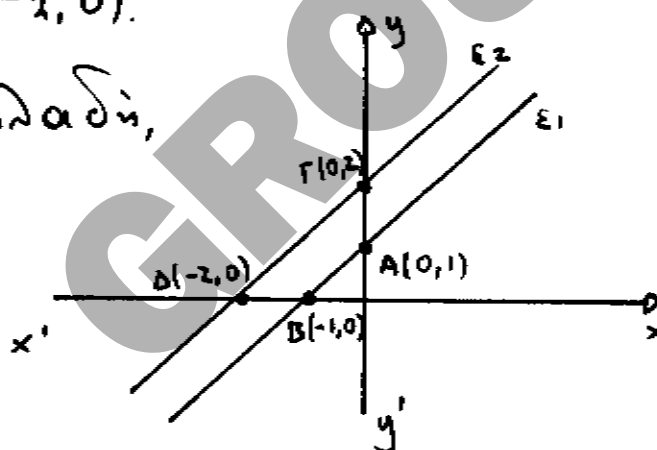
Άρα, η ϵ_1 διέρχεται από τα σημεία $A(0,1)$ και $B(-1,0)$.

• Για την ϵ_2 , έχουμε:

x	0	-2
y	2	0

Άρα, η ϵ_2 διέρχεται από τα σημεία $\Gamma(0,2)$ και $\Delta(-2,0)$.

Δηλαδή,



Με τη βοήθεια του σχήματος παρατηρώ ότι οι ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 είναι παράλληλες χωρίς κοινό σημείο.

Επίσης, γνωρίζουμε ότι οι συντεταγμένες της λύσης ενός συστήματος είναι το σημείο τομής των ευθειών ϵ_1 και ϵ_2 . Αφού, οι ϵ_1 και ϵ_2 είναι παράλληλες, τότε το σύστημα είναι ΑΔΥΝΑΤΟ.

ΘΕΜΑ 2 / 16954

Δίνεται η εξίσωση: $8x + 2y = 7$ (1)

α) Να γράψετε μια άλλη εξίσωση που να μην έχει καμία κοινή λύση με την εξίσωση (1).

(Μονάδες 10)

β) Να παραστήσετε γραφικά στο επίπεδο τις δυο εξισώσεις και, με βάση το γράφημα, να εξηγήσετε γιατί το σύστημα είναι αδύνατο.

(Μονάδες 15)

(α) Η εξίσωση (1) ισοδύναμα γράφεται:

$$8x + 2y = 7 \Leftrightarrow 2y = -8x + 7 \Leftrightarrow y = -4x + \frac{7}{2} \quad \text{και}$$

παριστάνει μία ευθεία, έστω την ϵ_1 . Για να γράψω μία εξίσωση, η οποία να μην έχει κοινή λύση με την (1) θα πρέπει οι ϵ_1 και η ζητούμενη ϵ_2 να είναι παράλληλες, χωρίς κοινό σημείο. Δηλαδή, $\epsilon_2: y = -4x$

(β) Για την $\epsilon_1: y = -4x + \frac{7}{2}$, έχουμε:

x	0	$\frac{7}{8}$
y	$\frac{7}{2}$	0

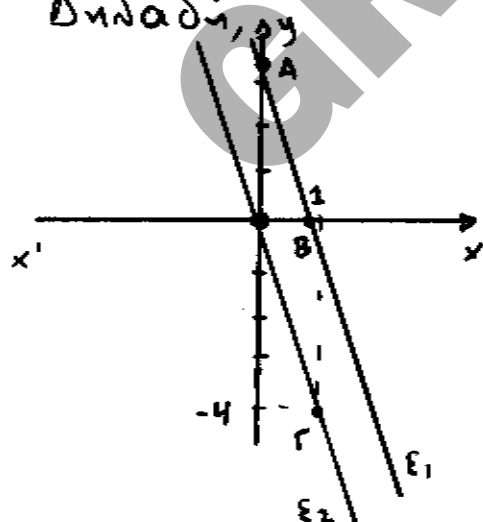
Άρα, η ϵ_1 διέρχεται από τα σημεία $A(0, \frac{7}{2})$ και $B(\frac{7}{8}, 0)$.

• Για την $\epsilon_2: y = -4x$, έχουμε:

x	0	1
y	0	-4

Άρα, η ϵ_2 διέρχεται από τα σημεία $O(0,0)$ και $\Gamma(1,-4)$.

Δηλαδή,



Παρατηρούμε ότι οι ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 είναι παράλληλες, χωρίς κοινό σημείο. Επίσης, γνωρίζουμε ότι οι συντεταγμένες των κοινών σημείων των ϵ_1 και ϵ_2 είναι οι λύσεις του συστήματος. Άρα, το σύστημα είναι ΑΔΥΝΑΤΟ.

ΘΕΜΑ 2 / 16957

Δύο φίλοι, ο Μάρκος και ο Βασίλης, έχουν άθροισμα ηλικιών 27 χρόνια, και ο Μάρκος είναι μεγαλύτερος από το Βασίλη.

α) Μπορείτε να υπολογίσετε την ηλικία του καθενός; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 13)

β) Δίνεται επιπλέον η πληροφορία ότι η διαφορά των ηλικιών τους είναι 5 χρόνια. Να υπολογίσετε την ηλικία του καθενός.

(Μονάδες 12)

(α) Έστω x η ηλικία του Μάρκου και y η ηλικία του Βασιλή, με $0 \leq x \leq 27$ και $0 \leq y \leq 27$ είναι, $x + y = 27$ (i) και $x > y$. Οπότε, $x > y \Rightarrow x + x > y + x \xrightarrow{(i)} 2x > 27 \Rightarrow x > \frac{27}{2}$, άρα $\frac{27}{2} < x \leq 27$. Επίσης, $x > y \Rightarrow x + y > y + y \xrightarrow{(i)} 27 > 2y \Rightarrow y < \frac{27}{2}$ άρα $0 \leq y < \frac{27}{2}$.

Επομένως, η ηλικία του Μάρκου είναι από 13,5 χρονών έως και 27 χρονών ενώ η ηλικία του Βασιλή από 0 χρονών έως 13,5 χρονών.

(β) Έχουμε, $x + y = 27$ και $x = y + 5$ (2) άρα $x + y = 27 \xrightarrow{(2)} y + 5 + y = 27 \Rightarrow 2y = 22 \Rightarrow y = 11$. Άρα, $x + 11 = 27 \Rightarrow x = 16$.

Επομένως, ο Μάρκος είναι 16 χρονών και ο Βασιλής είναι 11 χρονών.

ΘΕΜΑ 2 / 17647

Δίνεται το σύστημα: $\begin{cases} x - 2y = 8 \\ ax + \beta y = \gamma \end{cases}$ με παραμέτρους $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

α) Να επιλέξετε τιμές για τις παραμέτρους α, β, γ ώστε το σύστημα αυτό να έχει μοναδική λύση το ζεύγος $(2, -3)$. (Μονάδες 13)

β) Να επιλέξετε τιμές για τις παραμέτρους α, β, γ ώστε το σύστημα αυτό να είναι αδύνατο. (Μονάδες 12)

(α) 1ος τρόπος

$$\text{Είναι, } D = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = \beta - (-2)\alpha = \beta + 2\alpha$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 8 & -2 \\ \gamma & \beta \end{vmatrix} = 8\beta + 2\gamma$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 8 \\ \alpha & \gamma \end{vmatrix} = \gamma - 8\alpha$$

Το σύστημα για να έχει μοναδική λύση το ζεύγος $(2, -3)$ πρέπει: $D \neq 0$ (1) και

$$(x, y) = (2, -3) \text{ , δηλαδή } \left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D} \right) = (2, -3) \text{ άρα}$$

$$\begin{cases} \frac{8\beta + 2\gamma}{\beta + 2\alpha} = 2 \\ \frac{\gamma - 8\alpha}{\beta + 2\alpha} = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8\beta + 2\gamma = 2(\beta + 2\alpha) \\ \gamma - 8\alpha = -3(\beta + 2\alpha) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4\beta + \gamma = \beta + 2\alpha \\ \gamma - 8\alpha = -3\beta - 6\alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3\beta = 2\alpha - \gamma \\ 3\beta = 2\alpha - \gamma \end{cases}$$

Το νέο σύστημα είναι ισοδύναμο με την εξίσωση $3\beta = 2\alpha - \gamma$, η οποία έχει άπειρες λύσεις. Μια λύση είναι $(\alpha, \beta, \gamma) = (2, 1, 1)$

η οποία ικανοποιεί και τη σχέση (1) ,

$$\text{δηλαδή } D = 1 + 2 \cdot 2 = 5 \neq 0.$$

2ος τρόπος

Για να έχει το σύστημα λύση το ζεύγος $(2, -3)$ θα πρέπει να επαληθεύει τις εξισώσεις του συστήματος, δηλαδή για $x=2$ και $y=-3$

$$\text{έχουμε: } \begin{cases} 2 - 2(-3) = 8 \\ a \cdot 2 + b(-3) = \gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8 = 8 \\ 2a - 3b = \gamma \quad (2) \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι για $(a, b, \gamma) = (1, 1, -1)$ η εξίσωση (2) ικανοποιείται.

Επαλήθευση :

Για $a=1$, $b=1$ και $\gamma=-1$ το σύστημα γίνεται:

$$\begin{cases} x - 2y = 8 \\ x + y = -1 \end{cases} \quad \text{και} \quad D = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - (-2) = 3 \neq 0$$

Άρα, το σύστημα για $a=1$, $b=1$ και $\gamma=-1$ έχει μοναδική λύση.

$$(β) \text{ Πρέπει: } D = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ a & b \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow b - (-2a) = 0 \Leftrightarrow$$

$$b + 2a = 0 \Leftrightarrow b = -2a. \quad (3)$$

Για $a=1$ μέσω της (3) γίνεται $b=-2$, άρα για $a=1$ και $b=-2$ το σύστημα γίνεται:

$$\begin{cases} x - 2y = 8 \\ x - 2y = \gamma \end{cases}$$

Για να είναι το σύστημα αδύνατο, θα πρέπει $\gamma \neq 8$, δηλαδή $\gamma=5$. Άρα, $(a, b, \gamma) = (1, -2, 5)$

ΘΕΜΑ 2 / 17650

Δίνεται ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με μήκος $x\text{ cm}$, πλάτος $y\text{ cm}$, περίμετρο ίση με 38 cm και με την ακόλουθη ιδιότητα:

Αν αυξήσουμε το μήκος του κατά 2 cm και μειώσουμε το πλάτος του κατά 4 cm , θα προκύψει ένα ορθογώνιο με εμβαδόν ίσο με το εμβαδόν του αρχικού.

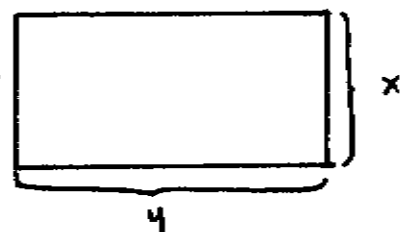
α) Να εκφράσετε τα δεδομένα με ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τις τιμές των διαστάσεων x , y του ορθογωνίου.

(Μονάδες 15)

(α) Η περίμετρος του παραλληλογράμμου είναι: $\Pi = 38 \Leftrightarrow 2x + 2y = 38 \Leftrightarrow x + y = 19$ (1). Επίσης, το εμβαδόν του είναι



$$E = x \cdot y, \text{ με } x > 0 \text{ και } y > 0$$

Αν αυξήσουμε το μήκος του κατά 2 cm και μειώσουμε το πλάτος του κατά 4 cm θα προκύψει ένα ορθογώνιο με εμβαδόν ίσο με το εμβαδόν του αρχικού, δηλαδή:

$$xy = (x+2)(y-4) \Leftrightarrow xy = xy - 4x + 2y - 8 \Leftrightarrow$$

$$4x - 2y = -8 \Leftrightarrow 2x - y = -4 \quad (2)$$

Οπότε, έχουμε το σύστημα:
$$\begin{cases} x + y = 19 \\ 2x - y = -4 \end{cases}$$

(β) Αν προχωρήσουμε κατά μέλη τις εξισώσεις (1) και (2) του συστήματος θα έχουμε:

$$3x = 15 \Leftrightarrow x = 5. \text{ ΔΕΚΤΟ, αφού } x > 0$$

Για $x = 5$ η (1) γίνεται: $5 + y = 19 \Leftrightarrow y = 14$ ΔΕΚΤΟ, αφού $y > 0$.

Άρα, $x = 5 \text{ cm}$ το μήκος και $y = 14 \text{ cm}$ το πλάτος

ΘΕΜΑ 2 / 17651

Στο δημοτικό parking μιας επαρχιακής πόλης στις 10 το πρωί, το σύνολο των δίκυκλων και τετράτροχων οχημάτων που έχουν παρκάρει είναι 830 και το πλήθος των τροχών τους 2.700.

α) Να εκφράσετε τα δεδομένα με ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους.

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε τον αριθμό των δίκυκλων καθώς και τον αριθμό των τετράτροχων οχημάτων.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2/17651

(α) Έστω x το πλήθος των δικύκλων και y το πλήθος των τετράτροχων οχημάτων με $x \geq 0, y \geq 0$. Οπότε,

$$\begin{cases} x + y = 830 \\ 2x + 4y = 2700 \end{cases}$$

(β) Έχουμε,

$$\begin{cases} x + y = 830 \\ 2x + 4y = 2700 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 830 \\ x + 2y = 1350 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = 830 - y \\ 830 - y + 2y = 1350 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 310 \\ y = 520 \end{cases} \begin{array}{l} \text{ΔΕΚΤΟ, αφού } x \geq 0 \\ \text{ΔΕΚΤΟ, αφού } y \geq 0 \end{array}$$

Άρα, 310 δικύκλα και 520 τετράτροχα οχήματα.

ΘΕΜΑ 2 / 17659

α) Να λύσετε αλγεβρικά το σύστημα $\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ x - y = -1 \end{cases}$.

(Μονάδες 15)

β) Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά τις λύσεις του συστήματος που βρήκατε στο ερώτημα α).

(Μονάδες 10)

$$(α) \text{ Έχουμε, } \begin{cases} y = x^2 + 1 \\ x - y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 + 1 \\ x - (x^2 + 1) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ x - x^2 - 1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 + 1 \\ x^2 - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 + 1 & (2) \\ x(x-1) = 0 & (1) \end{cases}$$

$$\text{Η (1) γίνεται: } x(x-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x-1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$\text{Για } x = 0 \text{ η (2) γίνεται: } y = 0^2 + 1 \Leftrightarrow y = 1$$

$$\text{Για } x = 1 \text{ η (2) γίνεται: } y = 1^2 + 1 \Leftrightarrow y = 2$$

Άρα, το σύστημα έχει δύο λύσεις, τα διατεταγμένα ζεύγη: $(x, y) = (0, 1)$ και $(x, y) = (1, 2)$.

(β) Οι λύσεις του συστήματος είναι τα σημεία τομής $A(0, 1)$ και $B(1, 2)$ των γραφικών παραστάσεων της παραβολής με εξίσωση:

$$y = x^2 + 1 \text{ και της ευθείας με εξίσωση: } x - y = -1 \Leftrightarrow$$

$$y = x + 1$$

ΘΕΜΑ 2 / 17683

Δίνεται το σύστημα:
$$\begin{cases} (\lambda + 1)x + 2y = 3 \\ 4x + (\lambda - 1)y = -6 \end{cases}, \text{ με παράμετρο } \lambda \in \mathbb{R}.$$

α) Αν $\lambda = -3$, να δείξετε ότι το σύστημα έχει άπειρες λύσεις. Να βρείτε μια λύση.

(Μονάδες 8)

β) Αν $\lambda = 3$, να δείξετε ότι το σύστημα είναι αδύνατο.

(Μονάδες 8)

γ) Αν $\lambda = 0$, να δείξετε ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση την οποία και να προσδιορίσετε.

(Μονάδες 9)

(α) Αν $\lambda = -3$ το σύστημα γίνεται:

$$\begin{cases} -2x + 2y = 3 \\ 4x - 4y = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = -\frac{3}{2} \\ x - y = -\frac{6}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = -\frac{3}{2} \\ x - y = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Άρα, το σύστημα είναι ισοδύναμο με την
εξίσωση: $x - y = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow x = y - \frac{3}{2}$, δηλαδή το
σύστημα έχει άπειρες λύσεις της μορφής:

$$(x, y) = \left(y - \frac{3}{2}, y\right), y \in \mathbb{R}.$$

Για $y = 0$ έχουμε: $(x, y) = \left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ μία λύση
του συστήματος.

(β) Αν $\lambda = 3$ το σύστημα γίνεται: $\begin{cases} 4x + 2y = 3 \\ 4x + 2y = -6 \end{cases}$

Άρα, το σύστημα είναι ΑΔΥΝΑΤΟ.

(γ) Αν $\lambda = 0$ το σύστημα γίνεται: $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 4x - y = -6 \end{cases}$

• $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 8 = -9 \neq 0$, άρα το σύστημα
έχει μοναδική λύση.

$$• D_x = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -6 & -1 \end{vmatrix} = -3 - 2(-6) = 9 \quad • D_y = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = -6 - 12 = -18$$

Άρα, το σύστημα έχει μοναδική λύση το
διατεταγμένο ζεύγος

$$(x, y) = \left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D}\right) = \left(\frac{9}{-9}, \frac{-18}{-9}\right) = (-1, 2)$$

ΘΕΜΑ 2 / 17703

Δίνονται οι ευθείες με εξισώσεις:

$$(ε_1): 2x - y = -1$$

$$(ε_2): (\lambda - 1)x - y = 6, \quad \text{με παράμετρο } \lambda \in \mathbb{R}$$

- α) Να βρείτε την τιμή του λ ώστε οι ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ να είναι παράλληλες. (Μονάδες 8)
- β) Να παραστήσετε γραφικά τις $ε_1$ και $ε_2$, για $\lambda = 3$. (Μονάδες 8)
- γ) Υπάρχει τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε οι ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ να ταυτίζονται; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)

(α) Έστω το σύστημα:
$$\begin{cases} 2x - y = -1 \\ (\lambda - 1)x - y = 6 \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Η άσκηση μας ζητάει να βρούμε το $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε οι ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 να είναι παράλληλες, εννοώντας παράλληλες χωρίς κοινό σημείο. Διότι και οι ταυτιζόμενες ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 είναι παράλληλες. Επίσης, στο (β) μας ζητάει να βρούμε το $\lambda \in \mathbb{R}$, αν υπάρχει, ώστε οι ϵ_1 και ϵ_2 να ταυτίζονται. Άρα, η διατύπωση του (α) είναι λάθος. Επεις θα λύσουμε το ερώτημα (α) γάχνοντας $\lambda \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε οι ϵ_1 και ϵ_2 να είναι παράλληλες χωρίς κοινό σημείο.

Πρέπει, $D = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ \lambda - 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -2 + (\lambda - 1) = 0 \Leftrightarrow$

$\lambda - 3 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 3.$

Επαλήθευση: Για $\lambda = 3$ το σύστημα γίνεται:

$$\begin{cases} 2x - y = -1 \\ 2x - y = 6 \end{cases} \quad \text{ΑΔΥΝΑΤΟ}$$

Δηλαδή, οι ϵ_1 και ϵ_2 είναι παράλληλες, χωρίς κοινό σημείο.

Άρα, $\lambda = 3$ ΔΕΚΤΟ.

(β) Για $\lambda = 3$ έχουμε $(\epsilon_1): 2x - y = -1$

$$(\epsilon_2): 2x - y = 6$$

• Η ϵ_1 έχει εξίσωση: $y = 2x + 1$

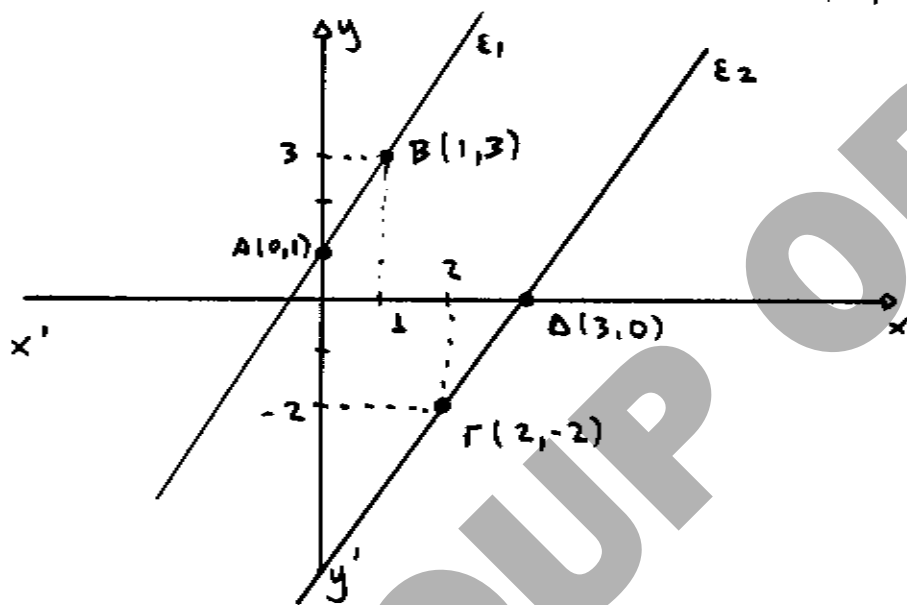
x	0	1
y	1	3

Δηλαδή, $A(0,1) \in \epsilon_1$ και $B(1,3) \in \epsilon_1$.

• Η ϵ_2 έχει εξίσωση: $y = 2x - 6$

x	3	0
y	0	-6

Δηλαδή, $\Gamma(3,0) \in \epsilon_2$ και $\Delta(0,-6) \in \epsilon_2$.



(δ) Πρέπει, $D=0 \iff \lambda=3$. Για $\lambda=3$ από (α) έχουμε ότι οι ϵ_1 και ϵ_2 είναι παράλληλες χωρίς κοινό σημείο. Άρα, δεν υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε οι ϵ_1 και ϵ_2 να ταυτίζονται.

ΘΕΜΑ 2 / 17709

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : 2x + y = 5$, $\varepsilon_2 : -2x + 3y = -9$ και $\varepsilon_3 : 3x + 2y = 7$.

α) i. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ε_1 και ε_2 .

ii. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ε_1 και ε_3 .

(Μονάδες 12)

β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος (α), να δείξετε ότι το κοινό σημείο των ε_2 και ε_3 είναι σημείο της ε_1 .

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2/17709

(α) (i) Αρκεί να λύσω το σύστημα:
$$\begin{cases} 2x + y = 5 & (1) \\ -2x + 3y = -9 & (2) \end{cases}$$

Αν προσθέσω κατά μέλη τις (1) και (2) έχουμε:

$$4y = -4 \Leftrightarrow y = -1.$$

Για $y = -1$ η (1) γίνεται: $2x - 1 = 5 \Leftrightarrow 2x = 6 \Leftrightarrow x = 3$

Άρα, το σύστημα έχει μοναδική λύση το διατεταγμένο ζεύγος $(x, y) = (3, -1)$.

Επομένως, οι ϵ_1 και ϵ_2 έχουν μοναδικό σημείο τομής το $A(3, -1)$.

(ii) Αρκεί να λύσω το σύστημα:
$$\begin{cases} 2x + y = 5 & (1) \\ 3x + 2y = 7 & (2) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{rcl} -4x - 2y & = & -10 \\ 3x + 2y & = & 7 \quad (+) \\ \hline -x & = & -3 \Leftrightarrow x = 3 \end{array}$$

Για $x = 3$ η (1) γίνεται: $2 \cdot 3 + y = 5 \Leftrightarrow y = -1$

Άρα, το σύστημα έχει μοναδική λύση το διατεταγμένο ζεύγος $(x, y) = (3, -1)$.

Επομένως, οι ϵ_1 και ϵ_3 έχουν μοναδικό σημείο τομής το $A(3, -1)$.

(β) Για να βρω το κοινό σημείο των ϵ_2 και ϵ_3 αρκεί να λύσω το σύστημα:

$$\begin{cases} -2x + 3y = -9 \\ 3x + 2y = 7 \quad (1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6x + 9y = -27 \\ 6x + 4y = 14 \quad (1) \end{cases}$$

$$13y = -13 \Rightarrow y = -1$$

Για $y = -1$ η (1) γίνεται: $3x + 2(-1) = 7 \Rightarrow 3x - 2 = 7$
 $\Rightarrow 3x = 9 \Rightarrow x = 3$.

Άρα, το σύστημα έχει μοναδική λύση το διατεταγμένο ζεύγος $(x, y) = (3, -1)$. Επομένως, οι ε_2 και ε_3 τέμνονται στο $A(3, -1)$.

Από το (α) γνωρίζουμε ότι οι ε_1 και ε_2 , όπως οι ε_1 και ε_3 τέμνονται στο $A(3, -1)$, άρα το $A(3, -1)$ προφανώς είναι σημείο της ε_1 .

ΘΕΜΑ 2 / 17717

Ένα θέατρο έχει 25 σειρές καθισμάτων χωρισμένες σε δύο διαζώματα. Η κάθε μια από τις σειρές του κάτω διαζώματος έχει 14 καθίσματα και η κάθε μια από τις σειρές του πάνω διαζώματος έχει 16 καθίσματα, ενώ η συνολική χωρητικότητα του θεάτρου είναι 374 καθίσματα.

α) Αν x ο αριθμός σειρών του κάτω και y ο αριθμός σειρών του πάνω διαζώματος, να εκφράσετε τα δεδομένα του προβλήματος με ένα σύστημα δύο εξισώσεων.

(Μονάδες 12)

β) Πόσες σειρές έχει το πάνω και πόσες το κάτω διάζωμα;

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2/17717

(α) Με $0 < x < 25$ και $0 < y < 25$ έχουμε:

$$\begin{cases} x+y=25 \\ 14x+16y=374 \end{cases} \quad (\Rightarrow) \quad \begin{cases} x+y=25 \\ 7x+8y=187 \end{cases}$$

(β) Από (α) έχουμε: $\begin{cases} x+y=25 \quad (1) \\ 7x+8y=187 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -7x-7y=-175 \\ 7x+8y=187 \quad (2) \end{cases}$

$$y = 12 \text{ ΔΕΚΤΟ}$$

Για $y=12$ η (1) γίνεται: $x+12=25 \Rightarrow x=13$ ΔΕΚΤΟ

Άρα, 13 βειρές έχει το κάτω διάστημα και 12 βειρές έχει το πάνω διάστημα

ΘΕΜΑ 2 / 17734

Δίνονται οι ευθείες: $\varepsilon_1: 2x + y = 6$ και $\varepsilon_2: x - 2y = -3$

α) Να προσδιορίσετε αλγεβρικά το κοινό τους σημείο M . (Μονάδες 13)

β) Να βρείτε για ποια τιμή του α , η ευθεία $3x + \alpha y = \alpha + 5$ διέρχεται από το M .

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2/17734

(α) Για να βρω το κοινό τους σημείο M πρέπει να λύσω το σύστημα:

$$\begin{cases} 2x + y = 6 \\ x - 2y = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 6 - 2x \\ x - 2(6 - 2x) = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 6 - 2x \\ x - 12 + 4x = -3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y = 6 - 2x \\ 5x = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 6 - 2 \cdot \frac{9}{5} \\ x = \frac{9}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{12}{5} \\ x = \frac{9}{5} \end{cases}$$

Άρα, οι ε_1 και ε_2 τέμνονται στο $M\left(\frac{9}{5}, \frac{12}{5}\right)$

(β) Έστω η ευθεία ζ με εξίσωση: $3x + ay = a + 5$

$$\bullet M\left(\frac{9}{5}, \frac{12}{5}\right) \in \zeta \Rightarrow 3 \cdot \frac{9}{5} + a \cdot \frac{12}{5} = a + 5 \Rightarrow$$

$$\frac{27}{5} + \frac{12a}{5} = a + 5 \Rightarrow 27 + 12a = 5a + 25 \Rightarrow$$

$$7a = 25 - 27 \Rightarrow 7a = -2 \Rightarrow a = -\frac{2}{7}$$

ΘΕΜΑ 2 / 18637

Δίνεται το σύστημα:
$$\begin{cases} x - 2y = 9 \\ ax + \beta y = \gamma \end{cases}$$
 με παραμέτρους $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

α) Να επιλέξετε τιμές για τις παραμέτρους α, β, γ , ώστε το σύστημα αυτό να έχει μοναδική λύση το ζεύγος $(1, -4)$. (Μονάδες 13)

β) Να επιλέξετε τιμές για τις παραμέτρους α, β, γ , ώστε το σύστημα αυτό να είναι αδύνατο και να επαληθεύσετε γραφικά την επιλογή σας. (Μονάδες 12)

(α) 1^{ος} τρόπος

$$\bullet D = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = \beta - (-2\alpha) = \beta + 2\alpha$$

$$\bullet D_x = \begin{vmatrix} 9 & -2 \\ \delta & \beta \end{vmatrix} = 9\beta - (-2\delta) = 9\beta + 2\delta$$

$$\bullet D_y = \begin{vmatrix} 1 & 9 \\ \alpha & \delta \end{vmatrix} = \delta - 9\alpha$$

Το σύστημα έχει μοναδική λύση το ζεύγος $(x, y) = (1, -4)$, αν και μόνο αν,

$$D \neq 0 \quad (1) \text{ και } \frac{D_x}{D} = 1 \quad (2) \text{ και } \frac{D_y}{D} = -4 \quad (3)$$

Οι σχέσεις (2) και (3) γίνονται:

$$\begin{cases} \frac{9\beta + 2\delta}{\beta + 2\alpha} = 1 \\ \frac{\delta - 9\alpha}{\beta + 2\alpha} = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9\beta + 2\delta = \beta + 2\alpha \\ \delta - 9\alpha = -4(\beta + 2\alpha) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 8\beta + 2\delta = 2\alpha \\ \delta - 9\alpha = -4\beta - 8\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4\beta + \delta = \alpha \\ 4\beta + \delta = \alpha \end{cases}$$

Οπότε, το σύστημα είναι ισοδύναμο με την εξίσωση: $4\beta + \delta = \alpha$, άρα το σύστημα έχει άπειρες λύσεις.

Μία λύση είναι η διατεταγμένη τριάδα

$$(a, \beta, \gamma) = (3, 1, -1)$$

Για $a=3$, $\beta=1$ και $\gamma=-1$ η σχέση (1) γίνεται:

$$D \neq 0 \Leftrightarrow 1 + 2 \cdot 3 \neq 0 \text{ αληθές.}$$

2ος τρόπος

Το σύστημα για να έχει μοναδική λύση το διατεταγμένο ζεύγος $(x, y) = (1, -4)$ θα πρέπει για $x=1$ και $y=-4$ οι εξισώσεις του συστήματος να επαληθεύονται, δηλαδή

$$\begin{cases} 1 - 2(-4) = 9 \\ a \cdot 1 + \beta(-4) = \gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 = 9 \\ a - 4\beta = \gamma \end{cases}$$

Για $a=4$, $\beta=1$ και $\gamma=0$ η εξίσωση $a - 4\beta = \gamma$ του παραπάνω συστήματος επαληθεύεται.

Επαλήθευση: Για $a=4$, $\beta=1$ και $\gamma=0$, το σύστημα γίνεται:
$$\begin{cases} x - 2y = 9/1 \\ 4x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 9 \\ \underline{8x + 2y = 0} \quad \text{(*)} \\ 9x = 9 \Leftrightarrow x = 1 \end{cases}$$

Για $x=1$ η (1) γίνεται: $1 - 2y = 9 \Leftrightarrow 2y = -8 \Leftrightarrow y = -4$

Άρα, για $(a, \beta, \gamma) = (4, 1, 0)$ το σύστημα έχει μοναδική λύση το διατεταγμένο ζεύγος: $(x, y) = (1, -4)$.

(β) Πρέπει: $D=0 \Leftrightarrow \beta+2\alpha=0 \Leftrightarrow \beta=-2\alpha$.

Για $\beta=-2\alpha$ το σύστημα γίνεται:

$$\begin{cases} x-2y=9 \\ \alpha x-2\alpha y=\gamma \end{cases}$$

Για να είναι το παραπάνω σύστημα ΑΔΥΝΑΤΟ θα πρέπει τα πρώτα μέλη των εξισώσεων να είναι ίσα και τα δεύτερα άνισα, δηλαδή $\alpha=1$ και $\gamma \neq 9$. Επομένως, $\alpha=1$ και $\gamma=5$.

Για $\alpha=1$ έχουμε $\beta=-2 \cdot 1 \Leftrightarrow \beta=-2$

Άρα, $\alpha=1, \beta=-2$ και $\gamma=5$.

Επαλήθευση: Για $\alpha=1, \beta=-2$ και $\gamma=5$ το σύστημα γίνεται:

$$\begin{cases} x-2y=9 \\ x-2y=5 \end{cases} \text{ ΑΔΥΝΑΤΟ. Άρα, οι τιμές}$$

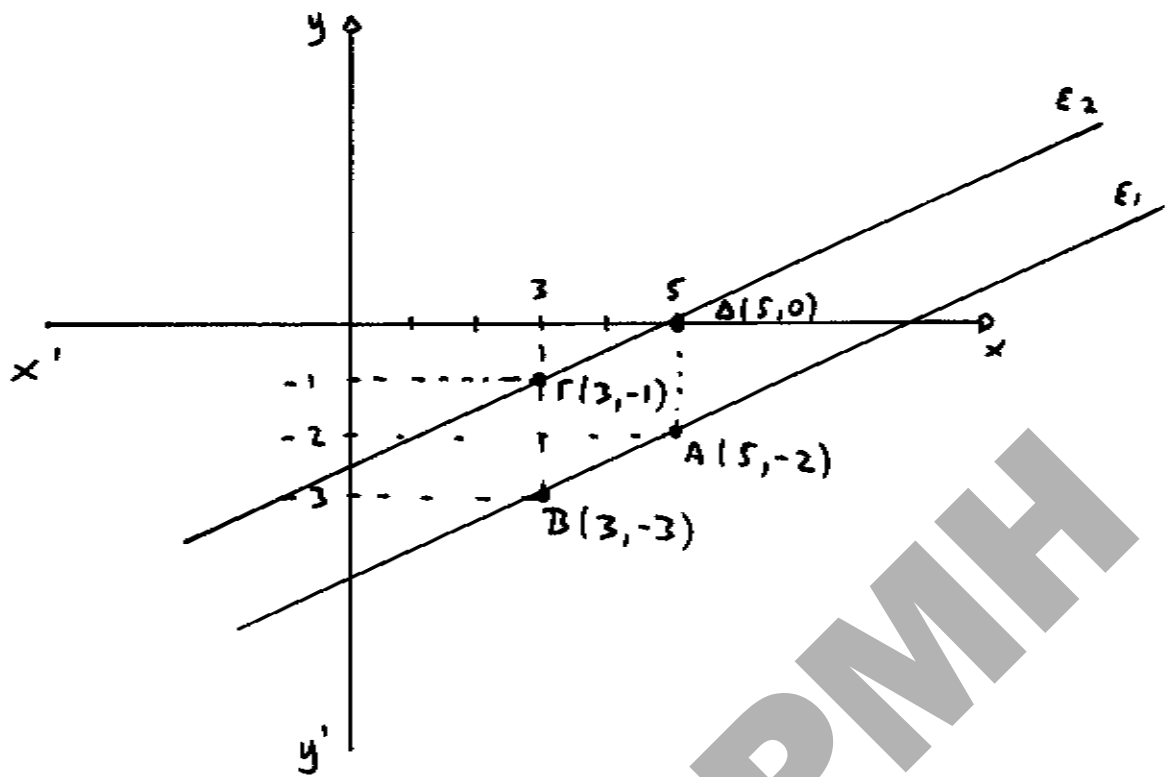
$\alpha=1, \beta=-2$ και $\gamma=5$ είναι δεκτές.

(β) Έστω $\epsilon_1: x-2y=9 \Leftrightarrow 2y=x-9 \Leftrightarrow y=\frac{1}{2}x-\frac{9}{2}$

$\begin{array}{c|c|c} x & 5 & 3 \\ \hline y & -2 & -3 \end{array}$, δηλαδή $A(5, -2)$ και $B(3, -3)$

Έστω $\epsilon_2: x-2y=5 \Leftrightarrow 2y=x-5 \Leftrightarrow y=\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}$

$\begin{array}{c|c|c} x & 3 & 5 \\ \hline y & -1 & 0 \end{array}$, δηλαδή $\Gamma(3, -1)$ και $\Delta(5, 0)$



Παρατηρούμε ότι οι ϵ_1 και ϵ_2 είναι παράλληλες χωρίς κοινό σημείο, επομένως το σύστημα των δύο εξισώσεων των ευθειών θα είναι ΑΔΥΝΑΤΟ.

ΘΕΜΑ 2 / 18638

Δίνεται το σύστημα:
$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ ax + \beta y = \gamma \end{cases}$$
 με παραμέτρους $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

α) Να επιλέξετε τιμές για τις παραμέτρους α, β, γ , ώστε το σύστημα αυτό να έχει μοναδική λύση το ζεύγος $(-1, 5)$. (Μονάδες 13)

β) Να επιλέξετε τιμές για τις παραμέτρους α, β, γ , ώστε το σύστημα αυτό να έχει άπειρες λύσεις και να επαληθεύσετε γραφικά την επιλογή σας. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2/18638

(α) Έχουμε, $\bullet D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ a & \beta \end{vmatrix} = 2\beta - a$

$\bullet D_x = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ \gamma & \beta \end{vmatrix} = 3\beta - \gamma$ $\bullet D_y = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ a & \gamma \end{vmatrix} = 2\gamma - 3a$

Το σύστημα έχει μοναδική λύση το ζεύγος $(x, y) = (-1, 5)$, αν και μόνο αν,

$D \neq 0$ (1) και $\frac{D_x}{D} = -1$ (2) και $\frac{D_y}{D} = 5$ (3)

Από τις σχέσεις (2) και (3) έχουμε:

$$\begin{cases} \frac{3\beta - \gamma}{2\beta - a} = -1 \\ \frac{2\gamma - 3a}{2\beta - a} = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\beta - \gamma = -(2\beta - a) \\ 2\gamma - 3a = 5(2\beta - a) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 3\beta - \gamma = -2\beta + a \\ 2\gamma - 3a = 10\beta - 5a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5\beta - \gamma = a \\ 10\beta - 2\gamma = 2a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5\beta - \gamma = a \\ 5\beta - \gamma = a \end{cases}$$

Οπότε, το σύστημα είναι ισοδύναμο με την εξίσωση: $5\beta - \gamma = a$, άρα το σύστημα έχει άπειρες λύσεις.

Μια λύση είναι η διατεταγμένη τριάδα

$$(a, \beta, \gamma) = (1, 0, -1)$$

Για $a=1, \beta=0$ και $\gamma=-1$ η σχέση (1) γίνεται:

$$D \neq 0 \Rightarrow 2 \cdot 0 - 1 \neq 0 \Rightarrow -1 \neq 0 \text{ αληθές.}$$

(β) Πρέπει: $D=0 \stackrel{(a)}{\Rightarrow} 2\beta - \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 2\beta$.

Για $\alpha = 2\beta$ το σύστημα γίνεται:

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 2\beta x + \beta y = \gamma \end{cases}$$

Για να έχει το παραπάνω σύστημα άπειρες λύσεις θα πρέπει τα πρώτα και τα δεύτερα μέλη των εξισώσεων να είναι ίσα μεταξύ τους, δηλαδή $\beta=1$ και $\gamma=3$.

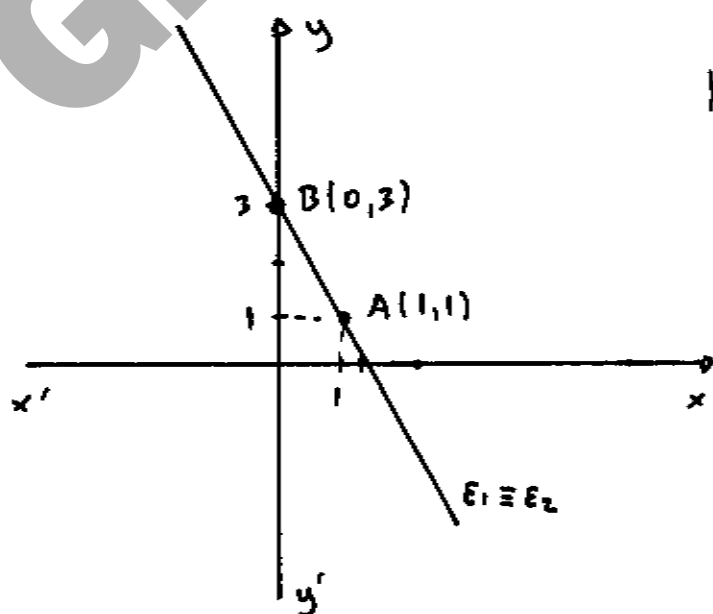
Για $\beta=1$, έχουμε $\alpha = 2 \cdot 1 \Leftrightarrow \alpha = 2$

Για $\alpha=2, \beta=1$ και $\gamma=3$ οι εξισώσεις του συστήματος γίνονται:

$$ε_1: 2x + y = 3 \quad \text{και} \quad ε_2: 2x + y = 3$$

Παρατηρούμε ότι οι ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ τωτίζονται, αφού έχουν την ίδια εξίσωση

$$2x + y = 3 \Leftrightarrow y = -2x + 3 \quad \text{Είναι, } \begin{array}{c|c|c} x & 1 & 0 \\ \hline y & 1 & 3 \end{array} \text{ με } A(1,1) \text{ και } B(0,3)$$



ΘΕΜΑ 4 / 17834

Για τις ηλικίες των μελών μιας τριμελούς οικογένειας ισχύουν τα παρακάτω:

Η ηλικία της μητέρας είναι τριπλάσια από την ηλικία του παιδιού. Ο λόγος της ηλικίας το πατέρα προς την ηλικία του παιδιού ισούται με $\frac{11}{3}$. Επιπλέον το άθροισμα των ηλικιών και των τριών ισούται με 115 χρόνια.

α) Να εκφράσετε τα δεδομένα με ένα σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους.

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε την ηλικία του καθενός.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 4/17834

- (α) Έστω x η ηλικία του παιδιού με $x > 0$,
 y η ηλικία της μητέρας και w η ηλικία
του πατέρα, με $y > 0$ και $w > 0$.

Είναι, • $y = 3x$

• $\frac{w}{x} = \frac{11}{3} \Rightarrow w = \frac{11x}{3}$, δηλαδή:

$$\begin{cases} y = 3x & (1) \\ w = \frac{11x}{3} & (2) \\ x + y + w = 115 & (3) \end{cases}$$

- (β) Η σχέση (3) γίνεται: $x + y + w = 115 \xrightarrow{(1)} \xrightarrow{(2)}$

$$x + 3x + \frac{11x}{3} = 115 \Rightarrow 4x + \frac{11x}{3} = 115 \Rightarrow$$

$$\frac{12x}{3} + \frac{11x}{3} = 115 \Rightarrow \frac{23x}{3} = 115 \Rightarrow x = \frac{3 \cdot 115}{23} \Rightarrow$$

$$x = 15 \text{ ΔΕΚΤΟ}$$

Για $x = 15$ η (1) γίνεται: $y = 3 \cdot 15 \Rightarrow y = 45$ ΔΕΚΤΟ

Για $x = 15$ η (2) γίνεται: $w = \frac{11 \cdot 15}{3} \Rightarrow w = 55$ ΔΕΚΤΟ.

ΘΕΜΑ 4 / 17835

Δίνονται οι ευθείες ε_1 και ε_2 με εξισώσεις $x + (\lambda + 2)y = 3$, $(\lambda - 2)x + 5y = 3$ αντίστοιχα και $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, να βρείτε τη σχετική θέση των δύο ευθειών.

(Μονάδες 13)

β) Στην περίπτωση που οι ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνονται, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής A των δύο ευθειών.

(Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ για την οποία το σημείο A ανήκει στην ευθεία με εξίσωση: $x + 2y = 3$.

(Μονάδες 5)

(α) Έστω η ευθεία ϵ_1 με εξίσωση: $x + (\lambda + 2)y = 3$

και η ευθεία ϵ_2 με εξίσωση: $(\lambda - 2)x + 5y = 3$

Έχουμε το σύστημα
$$\begin{cases} x + (\lambda + 2)y = 3 \\ (\lambda - 2)x + 5y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \cdot D &= \begin{vmatrix} 1 & \lambda + 2 \\ \lambda - 2 & 5 \end{vmatrix} = 5 - (\lambda - 2)(\lambda + 2) = 5 - (\lambda^2 - 4) = \\ &= 5 - \lambda^2 + 4 = 9 - \lambda^2 = (3 - \lambda)(3 + \lambda) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot D_x &= \begin{vmatrix} 3 & \lambda + 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 15 - 3(\lambda + 2) = 15 - 3\lambda - 6 = 9 - 3\lambda = \\ &= 3(3 - \lambda) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot D_y &= \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ \lambda - 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 3(\lambda - 2) = 3 - 3\lambda + 6 = -3\lambda + 9 = \\ &= 3(3 - \lambda) \end{aligned}$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις

$$\blacktriangleright \text{Αν } D \neq 0 \Leftrightarrow (3 - \lambda)(3 + \lambda) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - \lambda \neq 0 \\ \text{και} \\ 3 + \lambda \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda \neq 3 \\ \text{και} \\ \lambda \neq -3 \end{cases}$$

τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση
το διατεταγμένο ζεύγος:

$$(x, y) = \left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D} \right) = \left(\frac{3(3 - \lambda)}{(3 - \lambda)(3 + \lambda)}, \frac{3(3 - \lambda)}{(3 - \lambda)(3 + \lambda)} \right) = \left(\frac{3}{3 + \lambda}, \frac{3}{3 + \lambda} \right)$$

Δηλαδή, οι ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 τέμνονται

στο σημείο $A\left(\frac{3}{3 + \lambda}, \frac{3}{3 + \lambda}\right)$

► Αν $\lambda = 3$, τότε το σύστημα γίνεται:

$$\begin{cases} x + 5y = 3 \\ x + 5y = 3 \end{cases} \quad \text{ΑΟΡΙΣΤΟ, δηλαδή το σύστημα} \\ \text{είναι ισοδύναμο με την} \\ \text{εξίσωση: } x + 5y = 3.$$

Άρα, οι ευθείες ε_1 και ε_2 ταυτίζονται.

► Αν $\lambda = -3$, τότε το σύστημα γίνεται:

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ -5x + 5y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 3 \\ x - y = -\frac{3}{5} \end{cases}$$

ΑΔΥΝΑΤΟ, δηλαδή οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες χωρίς κοινό σημείο.

(β) Στην περίπτωση κατά την οποία οι ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνονται σε ένα σημείο τότε από (α) έχουμε ότι οι συντεταγμένες του σημείου τομής είναι $A\left(\frac{3}{3+\lambda}, \frac{3}{3+\lambda}\right)$, $\lambda \in \mathbb{R} - \{-3, 3\}$.

(γ) Έστω η ευθεία ζ με εξίσωση: $x + \lambda y = 3$.

Με $\lambda \in (-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, +\infty)$, έχουμε:

$$A\left(\frac{3}{3+\lambda}, \frac{3}{3+\lambda}\right) \in \zeta \Leftrightarrow \frac{3}{3+\lambda} + \lambda \frac{3}{3+\lambda} = 3 \Leftrightarrow 3 \frac{3}{3+\lambda} = 3 \Leftrightarrow$$

$$\frac{3}{3+\lambda} = 1 \Leftrightarrow 3+\lambda = 3 \Leftrightarrow \lambda = 0 \quad \text{ΔΕΚΤΟ.}$$

ΘΕΜΑ 4 / 17839

Δίνεται το σύστημα: $\begin{cases} (a-1)x + 3y = 3 \\ x + (a+1)y = 3 \end{cases}$, με παράμετρο $a \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι αν το σύστημα έχει μοναδική λύση την (x_0, y_0) , τότε $x_0 = y_0$.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τις τιμές του $a \in \mathbb{R}$ για τις οποίες το σύστημα:

i. έχει άπειρες σε πλήθος λύσεις και να δώσετε τη μορφή τους.

(Μονάδες 6)

ii. δεν έχει λύση.

(Μονάδες 4)

γ) Να εξετάσετε τις σχετικές θέσεις των δύο ευθειών που προκύπτουν από τις εξισώσεις του παραπάνω συστήματος για $a = 3$, $a = 2$, $a = -2$.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4/17839

$$(a) \cdot D = \begin{vmatrix} a-1 & 3 \\ 1 & a+1 \end{vmatrix} = (a-1)(a+1) - 3 = a^2 - 1 - 3 = \\ = a^2 - 4 = (a-2)(a+2)$$

$$\cdot D_x = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 3 & a+1 \end{vmatrix} = 3(a+1) - 9 = 3a + 3 - 9 = 3(a-2)$$

$$\cdot D_y = \begin{vmatrix} a-1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3(a-1) - 3 = 3a - 3 - 3 = 3a - 6 = \\ = 3(a-2)$$

$$\blacktriangleright \text{Αν } D \neq 0 \Leftrightarrow (a-2)(a+2) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a-2 \neq 0 \\ \text{και} \\ a+2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 2 \\ \text{και} \\ a \neq -2 \end{cases}$$

τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση το διατεταγμένο ζεύγος:

$$(x_0, y_0) = \left(\frac{3(a-2)}{(a-2)(a+2)}, \frac{3(a-2)}{(a-2)(a+2)} \right) = \left(\frac{3}{a+2}, \frac{3}{a+2} \right)$$

(β) (i) Αν $a=2$, τότε το σύστημα γίνεται:

$$\begin{cases} x+3y=3 \\ x+3y=3 \end{cases} \quad \text{ΑΟΡΙΣΤΟ, δηλαδή το σύστημα είναι ισοδύναμο με την εξίσωση:}$$

$$x+3y=3 \Leftrightarrow x=3-3y.$$

Άρα, το σύστημα έχει άπειρες λύσεις της μορφής: $(x, y) = (3-3y, y), y \in \mathbb{R}.$

(ii) Αν $a=-2$, τότε το σύστημα γίνεται:

$$\begin{cases} -3x + 3y = 3 \\ x - y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = -1 \\ x - y = 3 \end{cases} \quad \text{ΑΔΥΝΑΤΟ,}$$

δηλαδή το σύστημα δεν έχει λύση.

(δ) • Αν $a=3$, το σύστημα έχει μοναδική λύση το διατεταγμένο ζεύγος $(x,y) = (\frac{3}{5}, \frac{3}{5})$

δηλαδή οι ε_1 και ε_2 τέμνονται στο σημείο $A(\frac{3}{5}, \frac{3}{5})$

• Αν $a=2$, το σύστημα είναι ΑΟΡΙΣΤΟ από το (β), δηλαδή οι ε_1 και ε_2 συμπίπτουν.

• Αν $a=-2$, το σύστημα είναι ΑΔΥΝΑΤΟ από το (β), δηλαδή οι ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες χωρίς κοινό σημείο.

ΘΕΜΑ 4 / 17850

Ο Κώστας έχει τρία παιδιά. Δύο δίδυμα κορίτσια και ένα αγόρι. Στην ερώτηση πόσων χρονών είναι τα παιδιά του απάντησε ως εξής.

1. Το άθροισμα των ηλικιών και των τριών παιδιών είναι 14
2. Το γινόμενο της ηλικίας της κόρης μου επί την ηλικία του γιου μου είναι 24
3. Το άθροισμα των ηλικιών των κοριτσιών είναι μικρότερο από την ηλικία του αγοριού.

α) Να γράψετε τις εξισώσεις που περιγράφουν τα στοιχεία 1. και 2. που έδωσε ο Κώστας.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τις ηλικίες των παιδιών του Κώστα.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 4/17850

(α) Έστω x η ηλικία των δύο διδύμων κοριτσιών και y η ηλικία του αγοριού με $x > 0$ και $y > 0$. Το άθροισμα των ηλικιών και των τριών παιδιών είναι 14, άρα $x + x + y = 14 \Rightarrow 2x + y = 14$ (1)
Το γινόμενο της ηλικίας της κόρης μου επί την ηλικία του γιου μου είναι 24, άρα $xy = 24$ (2)

(β) Η (1) γίνεται $2x + y = 14 \Rightarrow y = 14 - 2x$ (3)

Η (2) μέσω της (3) γίνεται: $x(14 - 2x) = 24 \Rightarrow$

$$14x - 2x^2 = 24 \Rightarrow 2x^2 - 14x + 24 = 0 \Rightarrow x^2 - 7x + 12 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 3x - 4x + 12 = 0 \Rightarrow x(x - 3) - 4(x - 3) = 0 \Rightarrow$$

$$(x - 3)(x - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 3 = 0 \\ x - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 & \text{ΔΕΚΤΟ} \\ x = 4 & \text{ΔΕΚΤΟ} \end{cases}$$

Για $x = 3$ η (2) γίνεται: $3y = 24 \Rightarrow y = 8$ ΔΕΚΤΟ

Για $x = 4$ η (2) γίνεται: $4y = 24 \Rightarrow y = 6$ ΔΕΚΤΟ

Όμως, το άθροισμα των ηλικιών των κοριτσιών είναι μικρότερο από την ηλικία του αγοριού.

Αν η ηλικία του κάθε κοριτσιού είναι

$x = 3$, τότε $3 + 3 < 8$ αληθές.

Δηλαδή, το κάθε κορίτσι είναι 3 ετών και το αγόρι 8 ετών.

Αν η ηλικία του κάθε κοριτσιού είναι $x=4$, τότε $4+4 < 6$ ψευδής. Δηλαδή, δεν μπορεί $x=4$ και $y=6$.

Επομένως, $x=3$ και $y=8$.