

α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $x^2 - 5x + 6$.

(Μονάδες 12)

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x-2}{x^2-5x+6}$.

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης.

(Μονάδες 5)

ii) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in A$ ισχύει: $f(x) = \frac{1}{x-3}$.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 2/999

(α) Είναι, $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1 > 0$, άρα

$$x_{1,2} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 1}{2} \begin{cases} x_1 = \frac{5+1}{2} = 3 \\ x_2 = \frac{5-1}{2} = 2 \end{cases}$$

Οπότε, $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$.

(β) ιμπρέου και ακρι: $x^2 - 5x + 6 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 3 \\ \text{και} \\ x \neq 2 \end{cases}$

Οπότε, $A_f = (-\infty, 2) \cup (2, 3) \cup (3, +\infty)$

(ii) Για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{2, 3\}$ έχουμε:

$$f(x) = \frac{x-2}{x^2-5x+6} = \frac{x-2}{(x-2)(x-3)} = \frac{1}{x-3}.$$

Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f . (Μονάδες 7)

β) Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης f . (Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 2/477

(α) Πρέπει και αρκεί: $x-3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 3$

Άρα, $A_f = (-\infty, 3) \cup (3, +\infty) \stackrel{!}{=} A_f = \mathbb{R} - \{3\}$.

(β) Με $x \in A_f$, έχουμε:

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x-3} = \frac{(x-2)(x-3)}{x-3} = x-2$$

(γ) Με $x \in A_f$, έχουμε: $f(x) = x-2$.

Έστω $y = x-2$ η εξίσωση της f .

Για $x=0$, έχουμε: $y=-2$ και για $y=0$

έχουμε: $0 = x-2 \Leftrightarrow x=2$, άρα η f τέμνει τον

x 's στο $A(2,0)$ και τον y 's στο $B(0,-2)$.

Δίνεται η συνάρτηση g , με $g(x) = \frac{2x^2 - 4x + \mu}{x+1}$. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης g

διέρχεται από το σημείο $A(1, -4)$,

α) να δείξετε ότι $\mu = -6$. (Μονάδες 9)

β) να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. (Μονάδες 9)

γ) για $\mu = -6$ να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 2/3381

$$(α) \cdot A(1, -4) \in (g \Rightarrow g(1) = -4 \Rightarrow \frac{2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 + \mu}{1+1} = -4 \Rightarrow$$

$$\frac{-2 + \mu}{2} = -4 \Rightarrow -2 + \mu = -8 \Rightarrow \mu = -6$$

(β) Πρέπει και αρκεί: $x+1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$

$$\text{Άρα, } A_g = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty) \stackrel{\sim}{=} A_g = \mathbb{R} - \{-1\}.$$

$$(γ) \text{ Αν } \mu = -6, \text{ τότε } g(x) = \frac{2x^2 - 4x - 6}{x+1} = \frac{2(x^2 - 2x - 3)}{x+1} \quad (*)$$

$$= \frac{2(x-3)(x+1)}{x+1} \Rightarrow g(x) = 2(x-3), \text{ με } x \neq -1$$

$$(*) \Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16 > 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 4}{2} \begin{cases} x_1 = \frac{2+4}{2} = 3 \\ x_2 = \frac{2-4}{2} = -1 \end{cases}$$

$$\text{Οπότε, } x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1)$$

Δίνεται το τριώνυμο: $f(x) = 3x^2 + 9x - 12$, $x \in \mathbb{R}$

α) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \leq 0$ και να παραστήσετε το σύνολο των λύσεών της στον άξονα των πραγματικών αριθμών. (Μονάδες 13)

β) Να ελέγξετε αν ο αριθμός $\sqrt[3]{2}$ είναι λύση της ανίσωσης του ερωτήματος (α). Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2/3380

(α) Με $x \in \mathbb{R}$, έχουμε: $|x| \leq 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 9x - 12 \leq 0 \Leftrightarrow$

$$3(x^2 + 3x - 4) \leq 0 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 \leq 0$$

$$\Delta = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 9 + 16 = 25 > 0, \text{ άρα}$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm 5}{2} \begin{cases} x_1 = \frac{-3+5}{2} = 1 \\ x_2 = \frac{-3-5}{2} = -4 \end{cases}$$

Δηλαδή,

x	$-\infty$	-4	1	$+\infty$
$x^2 + 3x - 4$		+	-	+

άρα $x \in [-4, 1]$.

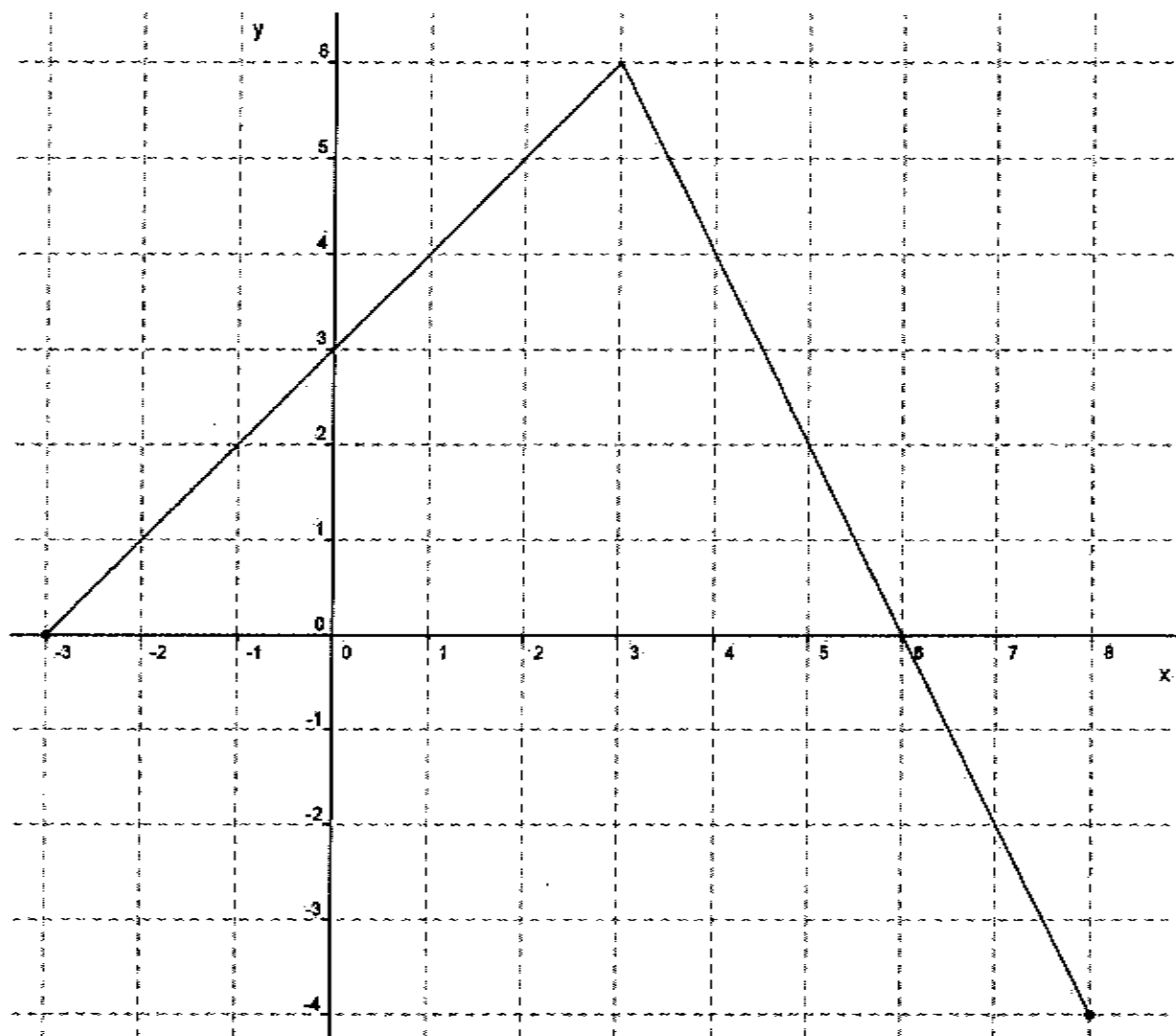
Επομένως,



(β) Έστω ο αριθμός $\sqrt[3]{2}$ είναι λύση της ανίσωσης του ερωτήματος (α), δηλαδή $-4 \leq \sqrt[3]{2} \leq 1 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} -4 \leq \sqrt[3]{2} \\ \text{και} \\ \sqrt[3]{2} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 \leq \sqrt[3]{2} \\ (\sqrt[3]{2})^3 \leq 1^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4 \leq \sqrt[3]{2} \\ 2 \leq 1 \end{cases} \text{ ΑΤΟΠΟ}$$

Άρα, ο αριθμός $\sqrt[3]{2}$ δεν είναι λύση του ερωτήματος (α).



Στο παραπάνω σύστημα συντεταγμένων δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .

α) Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

(Μονάδες 6)

β) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	-3	-1	0	3		
y					-2	-4

(Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης με τους άξονες.

(Μονάδες 6)

δ) Να προσδιορίσετε το διάστημα του πεδίου ορισμού στο οποίο η συνάρτηση παίρνει θετικές τιμές.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 2/3379

(α) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης, έχουμε $A_f = [-3, 8]$.

(β)

x	-3	-1	0	3	7	8
y	0	2	3	6	-2	-4

(γ) Η f τέμνει τον $x'x$ στα σημεία $A(-3, 0)$ και $B(6, 0)$, ενώ η f τέμνει τον $y'y$ στο σημείο $\Gamma(0, 3)$.

(δ) Η συνάρτηση παίρνει θετικές τιμές, δηλαδή η f είναι πάνω από τον $x'x$ για κάθε $x \in (-3, 6)$.

Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .

α) Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

(Μονάδες 6)

β) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	-2	-1		1	2	
y			-1			-3

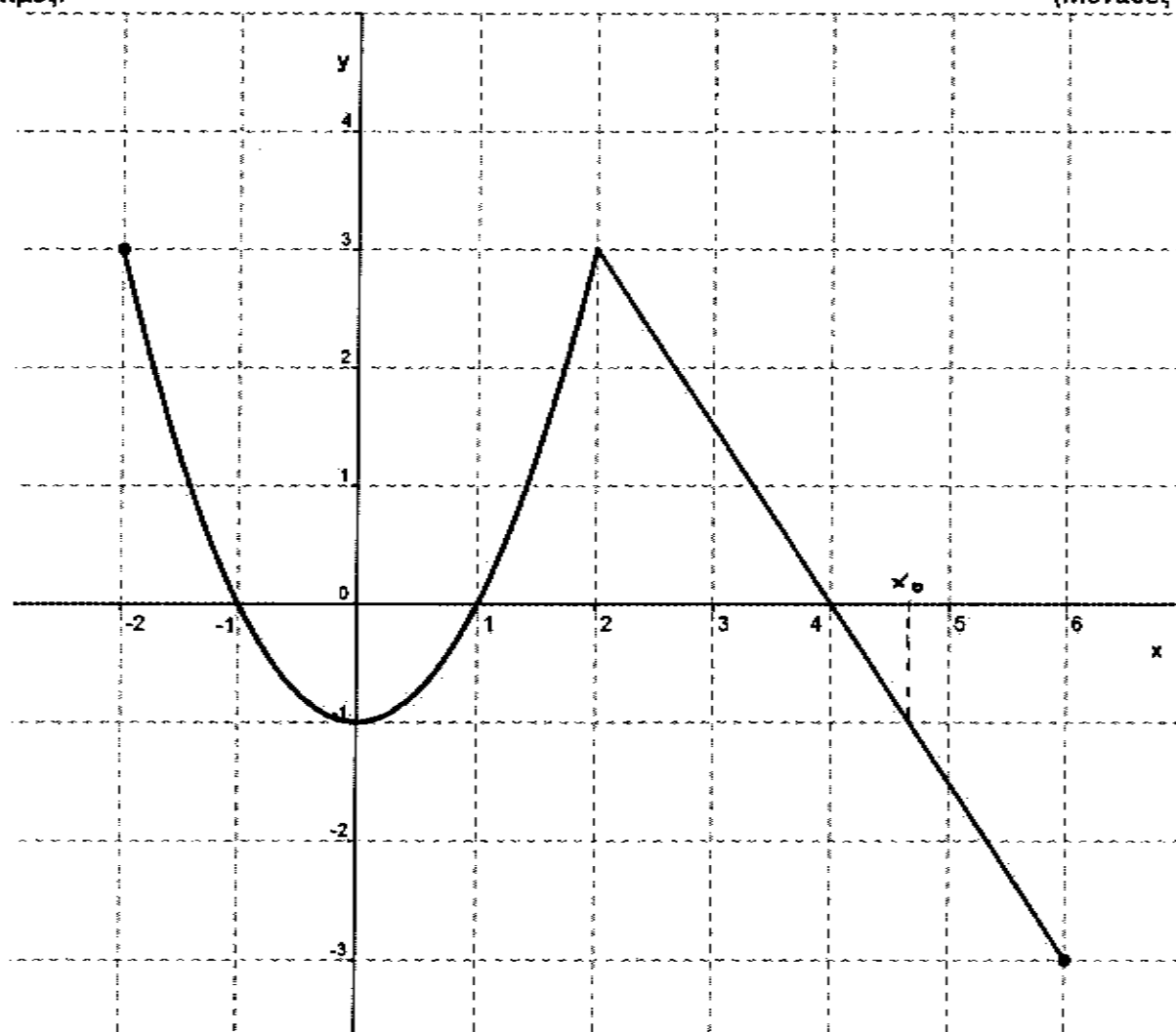
(Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης με τους άξονες.

(Μονάδες 6)

δ) Να προσδιορίσετε τα διαστήματα του πεδίου ορισμού στα οποία η συνάρτηση παίρνει αρνητικές τιμές.

(Μονάδες 7)



ΘΕΜΑ 2/3378

(α) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης, έχουμε $A_f = [-2, 6]$.

(β)

x	-2	-1	0	1	2	6
y	3	0	-1	0	3	-3

Αν φέρω την ευθεία $y = -1$ παρατηρώ ότι τέμνει τη f σε δύο σημεία, δηλαδή έχει δύο διαφορετικές τετμημένες, τις $x = 0$ και x_0 .

(γ) Η f τέμνει τον $x'x$ στα σημεία $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$ και $\Gamma(4, 0)$, ενώ η f τέμνει τον $y'y$ στο σημείο $\Delta(0, -1)$.

(δ) Η συνάρτηση παίρνει αρνητικές τιμές, δηλαδή η f είναι κάτω από τον $x'x$, για κάθε $x \in (-1, 1) \cup (4, 6]$

ΘΕΜΑ 2 / 2212.pdf

Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x) = \frac{2x^2 - 6|x|}{2|x| - 6}$

α) Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f . (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = |x|$, για κάθε $x \in A$ (Μονάδες 10)

γ) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f για $x > 0$. (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 2/2212

(α) Πρέπει και απλώς: $2|x| - 6 \neq 0 \Leftrightarrow 2|x| \neq 6 \Leftrightarrow |x| \neq 3$
 $\Leftrightarrow x \neq \pm 3$. Άρα, $A_f = (-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, +\infty)$

(β) Για κάθε $x \in A_f$, έχουμε:

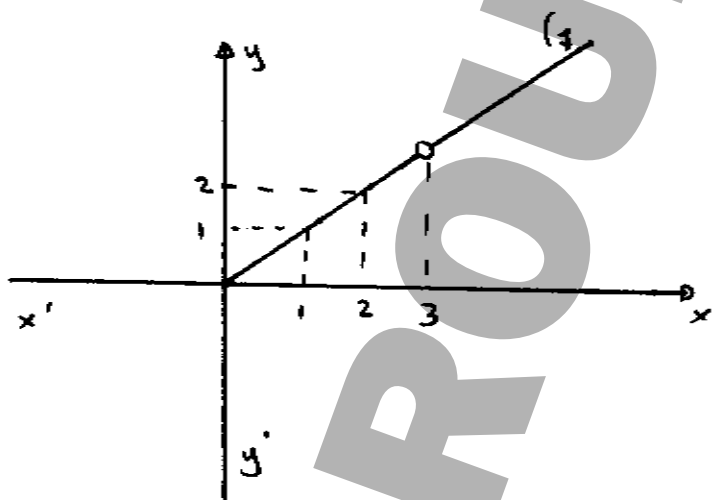
$$f(x) = \frac{2x^2 - 6|x|}{2|x| - 6} = \frac{2|x|^2 - 6|x|}{2|x| - 6} = \frac{2|x|(1|x| - 3)}{2(1|x| - 3)} = |x|.$$

(γ) Με $x \in \mathbb{R} - \{-3, 3\}$, έχουμε: $f(x) = |x|$.

Για $x > 0$, δηλαδή για $x \in (0, 3) \cup (3, +\infty)$ έχουμε:

$f(x) = x$. Έστω $y = x$ η εξίσωση της f , τότε

για $x = 1$ έχουμε $y = 1$ και για $x = 2$ έχουμε $y = 2$.



α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $x^2 + 2x - 3$

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$$

και στη συνέχεια να απλοποιήσετε τον τύπο της.

(Μονάδες 9)

γ) Να παραστήσετε γραφικά την παραπάνω συνάρτηση.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 2/1283

(α) Είναι, $\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16 > 0$, οπότε

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm 4}{2} \begin{cases} x_1 = \frac{-2+4}{2} = 1 \\ x_2 = \frac{-2-4}{2} = -3 \end{cases}$$

Οπότε, $x^2 + 2x - 3 = (x-1)(x+3)$

(β) Πρέπει και αρκεί: $x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$, άρα

$$A_f = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$$

Με $x \neq 1$, έχουμε:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x-1} = \frac{(x-1)(x+3)}{x-1} \Leftrightarrow f(x) = x+3.$$

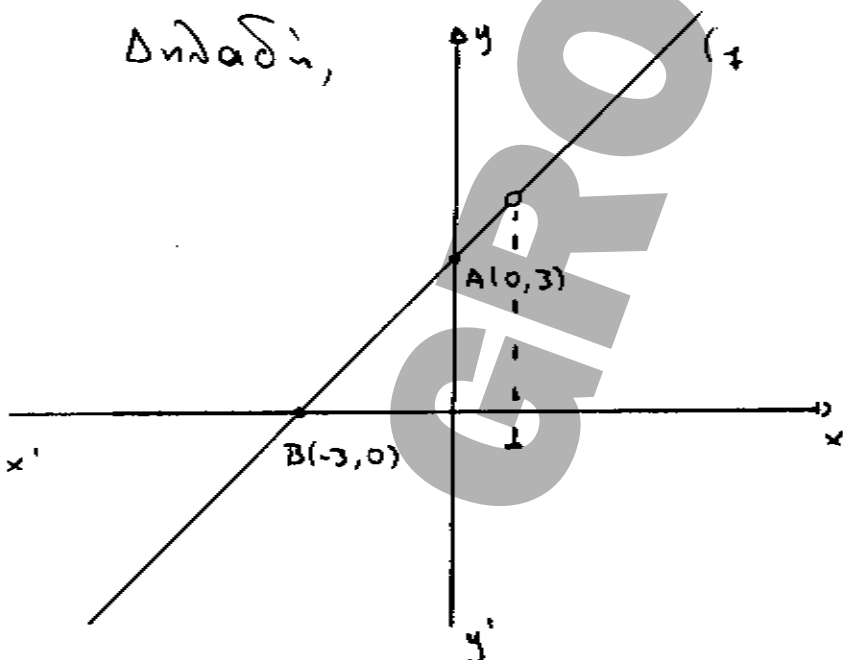
(δ) Έχω $y = x+3$ η εξίσωση της f .

Για $x=0$, έχουμε: $y=3$

Για $y=0$, έχουμε: $0=x+3 \Leftrightarrow x=-3$, άρα η f

τέμνει τον $y'y$ στο $A(0,3)$ και τον $x'x$ στο $B(-3,0)$.

Δηλαδή,



Δίνεται η συνάρτηση f , με τύπο $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. (Μονάδες 13)

β) Να βρείτε τις δυνατές τιμές του πραγματικού αριθμού α , ώστε το σημείο $M(\alpha, \frac{1}{8})$ να ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f . (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2/1090

(α) Πρέπει και αρκεί: $x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \pm 1 \Leftrightarrow x \neq \pm 1$.

Άρα, $A_f = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty) \stackrel{\text{ύ}}{=} A_f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

(β) Με $a \neq -1$ και $a \neq 1$, έχουμε:

$$M(a, \frac{1}{8}) \in I_f \Leftrightarrow f(a) = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \frac{1}{a^2 - 1} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow a^2 - 1 = 8$$

$$\Leftrightarrow a^2 = 9 \Leftrightarrow a = \pm \sqrt{9} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 & \text{ΔΕΚΤΟ} \\ a = -3 & \text{ΔΕΚΤΟ.} \end{cases}$$

ΘΕΜΑ 2 / 1082.pdf

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{x+2}{x^2 - x - 6}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

(Μονάδες 15)

β) Να δείξετε ότι: $f(2)+f(4)=0$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2/1082

(α) Πρέπει και αρκεί: $x^2 - x - 6 \neq 0$

$$\text{Είναι, } \Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 25 > 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 5}{2} \quad \begin{cases} x_1 = \frac{1+5}{2} = 3 \\ x_2 = \frac{1-5}{2} = -2 \end{cases}$$

Οπότε, $x \neq -2$ και $x \neq 3$

Άρα, $A_f = (-\infty, -2) \cup (-2, 3) \cup (3, +\infty) \stackrel{!}{=} A_f = \mathbb{R} - \{-2, 3\}$.

$$\begin{aligned} \text{(β) Έχουμε, } f(2) + f(4) &= \frac{2+2}{2^2-2-6} + \frac{4+2}{4^2-4-6} = \frac{4}{-4} + \frac{6}{6} = \\ &= -1 + 1 = 0 \end{aligned}$$

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ax + b$, όπου a, b πραγματικοί αριθμοί.

α) Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία $A(1, 6)$, $B(-1, 4)$, να βρείτε τις τιμές των a, b . (Μονάδες 13)

β) Αν $a=1$ και $b=5$, να προσδιορίσετε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2/1024

(α) • $A(1,6) \in \ell \Leftrightarrow f(1) = 6 \Leftrightarrow a \cdot 1 + \beta = 6 \Leftrightarrow \beta = 6 - a \quad (1)$

• $B(-1,4) \in \ell \Leftrightarrow f(-1) = 4 \Leftrightarrow a(-1) + \beta = 4 \xrightarrow{(1)}$

$-a + 6 - a = 4 \Leftrightarrow -2a = -2 \Leftrightarrow a = 1$

Για $a = 1$ η (1) γίνεται: $\beta = 6 - 1 \Leftrightarrow \beta = 5$

(β) Για $a = 1$ και $\beta = 5$ έχουμε: $f(x) = x + 5$, με $A_\ell = \mathbb{R}$.

Έστω $y = x + 5$ η εξίσωση της ℓ , τότε

• Για $x = 0$, έχουμε: $y = 5$, άρα η ℓ τέμνει τον y -αξονά στο $A(0,5)$

• Για $y = 0$, έχουμε: $x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -5$, άρα η ℓ τέμνει τον x -αξονά στο $B(-5,0)$.

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} 2x + 4, & x < 0 \\ x - 1, & x \geq 0 \end{cases}$

α) Να δείξετε ότι $f(-1) = f(3)$

(Μονάδες 13)

β) Να προσδιορίσετε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$, ώστε: $f(x) = 0$

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2/1042

(α) • $f(-1) = 2(-1) + 4 = -2 + 4 = 2$, διότι $-1 \in (-\infty, 0)$
• $f(3) = 3 - 1 = 2$, διότι $3 \in [0, +\infty)$

Δηλαδή, $f(-1) = f(3)$

(β) • Αν $x < 0$, τότε $f(x) = 2x + 4$

Έχουμε, $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x + 4 = 0 \Leftrightarrow 2x = -4 \Leftrightarrow x = -2 \in (-\infty, 0)$

Άρα $x = -2$ ΔΕΚΤΟ

• Αν $x \geq 0$, τότε $f(x) = x - 1$

Έχουμε, $f(x) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \in [0, +\infty)$, άρα

$x = 1$ ΔΕΚΤΟ

Άρα, η εξίσωση $f(x) = 0$ ικανοποιείται για $x = -2$, $x = 1$.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{4x^2 - 2(\alpha + 3)x + 3\alpha}{2x - 3}$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f . (Μονάδες 5)

β) Να αποδειχθεί ότι $f(x) = 2x - \alpha$, για κάθε x που ανήκει στο πεδίο ορισμού της f .

(Μονάδες 8)

γ) Να βρεθεί η τιμή του α αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $(1, -1)$. (Μονάδες 7)

δ) Να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$. (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4/8451

(α) Πρέπει και αρκεί: $2x-3 \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq 3 \Leftrightarrow x \neq \frac{3}{2}$

Οπότε, $A_f = (-\infty, \frac{3}{2}) \cup (\frac{3}{2}, +\infty)$

(β) Στον αριθμητή έχουμε το τριώνυμο: $4x^2 - 2(a+3)x + 3a$

$$\begin{aligned} \text{Διδαδὶ} \quad \Delta &= [-2(a+3)]^2 - 4 \cdot 4 \cdot 3a = 4(a+3)^2 - 4 \cdot 12a = \\ &= 4[(a+3)^2 - 12a] = 4(a^2 + 6a + 9 - 12a) = 4(a^2 - 6a + 9) = \\ &= 4^2(a-3)^2 = [2(a-3)]^2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Οπότε,} \quad x_{1,2} &= \frac{-[-2(a+3)] \pm \sqrt{[2(a-3)]^2}}{2 \cdot 4} = \frac{2(a+3) \pm 2(a-3)}{2 \cdot 4} = \\ &= \frac{a+3 \pm (a-3)}{4} \begin{cases} x_1 = \frac{a+3+a-3}{4} = \frac{2a}{4} = \frac{a}{2} \\ x_2 = \frac{a+3-(a-3)}{4} = \frac{2 \cdot 3}{4} = \frac{3}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Άρα,} \quad 4x^2 - 2(a+3)x + 3a = 4\left(x - \frac{a}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right)$$

Επομένως, με $x \neq \frac{3}{2}$ έχουμε:

$$f(x) = \frac{4x^2 - 2(a+3)x + 3a}{2x-3} = \frac{4\left(x - \frac{a}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right)}{2\left(x - \frac{3}{2}\right)} = 2\left(x - \frac{a}{2}\right) = 2x - a$$

$$(δ) A(1, -1) \in (f \Leftrightarrow f(1) = -1 \Leftrightarrow 2 \cdot 1 - a = -1 \Leftrightarrow a = 3$$

(ε) Με $x \in A_f$, διδαδὶ με $x \in (-\infty, \frac{3}{2}) \cup (\frac{3}{2}, +\infty)$,

έχουμε $f(x) = 2x - 3$. Έστω $y = 2x - 3$ η εξίσωση της $(f$.

Για $x = 0$, έχουμε: $y = -3$, άρα η $(f$ τέμνει τον $y'y$ στο $A(0, -3)$.

Για $y = 0$, έχουμε: $2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \notin A_f$ Άρα, η $(f$ δεν τέμνει τον $x'x$.

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = (x - 1)^2 - 4$ και $g(x) = |x - 1| + 2$, με $x \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 9)

β) Να δείξετε ότι, για κάθε τιμή του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης g βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 4)

γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g .

(Μονάδες 12)

(α) Έχουμε, $A_f = \mathbb{R}$. Η f βρίσκεται πάνω από

τον άξονα $x'x$, αν και μόνο αν, $f(x) > 0 \Leftrightarrow$

$$(x-1)^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 > 4 \xrightarrow{\text{μολ}} \sqrt{(x-1)^2} > \sqrt{4} \Leftrightarrow$$

$$|x-1| > 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 > 2 \\ \text{ή} \\ x-1 < -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ \text{ή} \\ x < -1 \end{cases}$$

Άρα, η f βρίσκεται πάνω από τον $x'x$ για κάθε $x \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$

(β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $|x-1| \geq 0 \Leftrightarrow |x-1| + 2 \geq 2 > 0$

$\Rightarrow g(x) \geq 2 > 0$. Άρα, η g βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(γ) Για κάθε $x \in \mathbb{R} = A_f \cap A_g$, στα κοινά σημεία των

f και g έχουμε ίσες συντεταγμένες,

$$\text{δηλαδή } f(x) = g(x) \Leftrightarrow (x-1)^2 - 4 = |x-1| + 2 \Leftrightarrow$$

$$|x-1|^2 - |x-1| - 6 = 0. \text{ (1)} \text{ Θέτω: } |x-1| = w \geq 0 \text{ άρα η (1)}$$

$$\text{γίνεται: } w^2 - w - 6 = 0 \Leftrightarrow (w-3)(w+2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} w = 3 & \underline{\text{ΔΕΚΤΟ}} \\ \text{ή} \\ w = -2 & \underline{\text{ΑΠΟΡ}} \end{cases}$$

$$\text{Για } w = 3, \text{ έχουμε: } |x-1| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = 3 \\ \text{ή} \\ x-1 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ \text{ή} \\ x = -2 \end{cases}$$

$$\text{Είναι, } f(4) = (4-1)^2 - 4 = 9 - 4 = 5$$

$$g(-2) = |-2-1| + 2 = |-3| + 2 = 3 + 2 = 5$$

Άρα, οι f και g τέμνονται στα σημεία

$A(4, 5)$ και $B(-2, 5)$.

Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει περίμετρο $\Pi=40\text{cm}$. Αν $x\text{ cm}$ είναι το μήκος του παραλληλογράμμου, τότε :

α) να αποδείξετε ότι $0 < x < 20$. (Μονάδες 4)

β) να αποδείξετε ότι το εμβαδόν $E(x)$ του ορθογωνίου δίνεται από τη σχέση:

$$E(x)=20x-x^2. \quad (\text{Μονάδες } 8)$$

γ) να αποδείξετε ότι ισχύει $E(x) \leq 100$, για κάθε $x \in (0, 20)$. (Μονάδες 6)

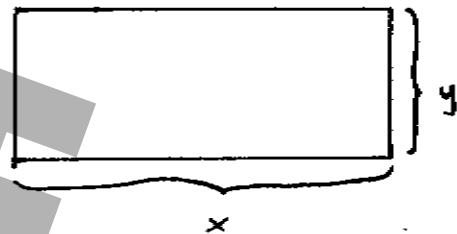
δ) να αποδείξετε ότι από όλα τα ορθογώνια με σταθερή περίμετρο 40cm , εκείνο που έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν είναι το τετράγωνο πλευράς 10cm .

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4/7512.

(α) Έστω x cm με $x > 0$ το μήκος του παραλληλογράμμου, τότε

$$Π > 2x \Leftrightarrow 40 > 2x \Leftrightarrow x < 20$$



Επίσης, $x > 0$ άρα $0 < x < 20$

(β) Έστω y cm με $y > 0$ το πλάτος του παραλληλογράμμου, τότε $Π = 2x + 2y \Leftrightarrow 40 = 2x + 2y \Leftrightarrow$

$$20 = x + y \Leftrightarrow y = 20 - x, \text{ με } 0 < y < 20 \text{ άρα το}$$

εμβαδόν $E(x)$ του ορθογώνιου είναι :

$$E(x) = x \cdot (20 - x) \Leftrightarrow E(x) = 20x - x^2, \text{ με } 0 < x < 20.$$

(γ) Με $x \in (0, 20)$ για να δείξω ότι : $E(x) \leq 100$

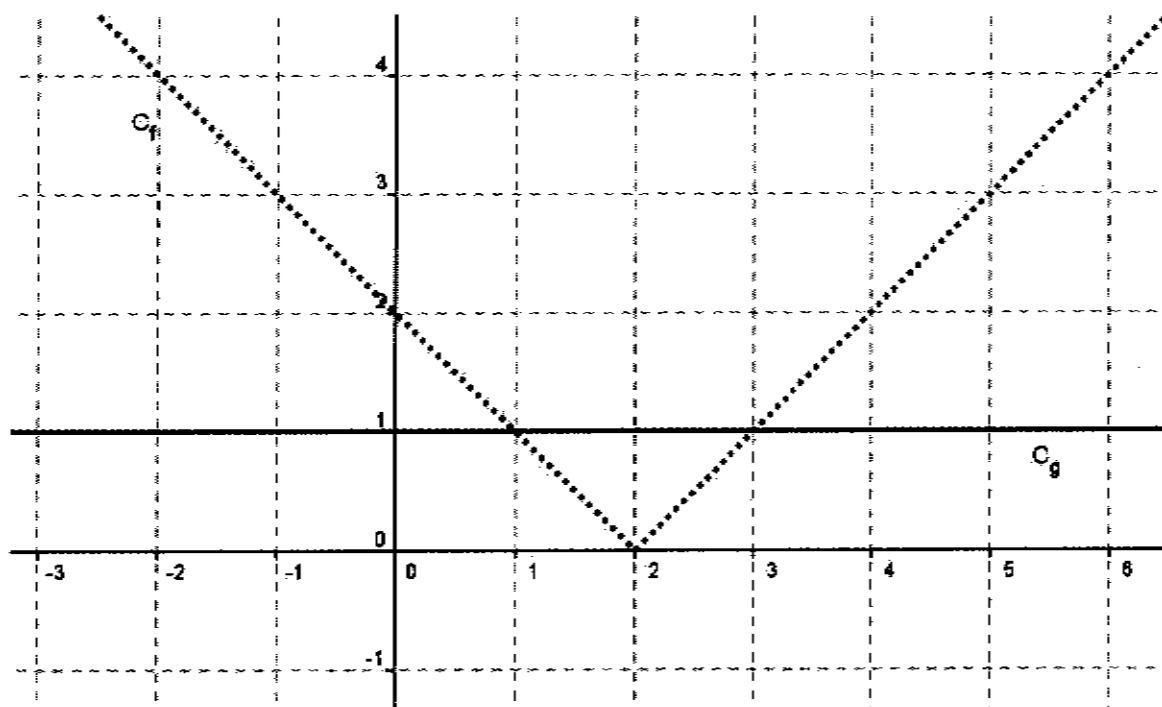
αρκεί να δείξω ότι : $E(x) - 100 \leq 0 \Leftrightarrow 20x - x^2 - 100 \leq 0$

$$\Leftrightarrow x^2 - 20x + 100 \geq 0 \Leftrightarrow (x - 10)^2 \geq 0 \text{ που ισχύει για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

(δ) Όλα τα ορθογώνια με σταθερή περίμετρο 40 cm (λόγω του (γ)) γνωρίζουμε ότι $E(x) \leq 100$ για κάθε $x \in (0, 20)$. Όμως, το τετράγωνο με πλευρά 10 cm έχει εμβαδόν ίσο με $10 \text{ cm} \cdot 10 \text{ cm} = 100 \text{ cm}^2$, άρα το εμβαδόν του τετραγώνου πλευράς 10 cm είναι μεγαλύτερο από το εμβαδόν των υπόλοιπων ορθογώνιων με σταθερή περίμετρο 40 cm.

Στο παρακάτω σχήμα, δίνονται οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g των συναρτήσεων f και g αντίστοιχα, με

$$f(x) = |x - 2| \quad \text{και} \quad g(x) = 1, \quad x \in \mathbb{R}$$



α) i) Να εκτιμήσετε τα σημεία τομής των C_f και C_g .

ii) Να εκτιμήσετε τις τιμές του x , για τις οποίες η C_f είναι κάτω από τη C_g .

(Μονάδες 10)

β) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά τις απαντήσεις σας στο προηγούμενο ερώτημα.

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x έχει νόημα πραγματικού αριθμού η παράσταση

$$A = \frac{\sqrt{1 - f(x)}}{f(x)}$$

(Μονάδες 5)

(α) (i) Τα κοινά σημεία των f και g με τη βοήθεια του παραπάνω σχήματος είναι τα $A(1,1)$ και $B(3,1)$.

(ii) Η f είναι κάτω από τη g για κάθε $x \in (1,3)$.

(β) Στα κοινά σημεία των f και g έχουμε ίσες συντεταγμένες, δηλαδή με $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow |x-2| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 = 1 \\ x-2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 1 \end{cases}$$

Είναι, $f(1) = |1-2| = |-1| = 1$ και $g(3) = 1$, άρα οι

f και g τέμνονται στα σημεία $A(1,1)$ και $B(3,1)$.

Επίσης, η f είναι κάτω από τη g , αν και

μόνο αν, $f(x) < g(x) \Leftrightarrow |x-2| < 1 \Leftrightarrow -1 < x-2 < 1 \Leftrightarrow$

$$-1+2 < x-2+2 < 1+2 \Leftrightarrow 1 < x < 3$$

(γ) Πρέπει και αρκεί: $\begin{cases} f(x) \neq 0 & (1) \\ \text{και} \\ 1-f(x) \geq 0 & (2) \end{cases}$

• Η (1) γίνεται: $f(x) \neq 0 \Leftrightarrow |x-2| \neq 0 \Leftrightarrow x-2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$

• Η (2) γίνεται: $1-f(x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \leq 1 \Leftrightarrow |x-2| \leq 1 \Leftrightarrow$

$$-1 \leq x-2 \leq 1 \Leftrightarrow -1+2 \leq x-2+2 \leq 1+2 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 3$$

Συνδυάζουμε των (1), (2):



Άρα, η παράσταση A έχει νόημα για κάθε $x \in [1, 2) \cup [2, 3]$.

ΘΕΜΑ 4 / 13158

Δυο φίλοι αποφάσισαν να κάνουν το χόμπι τους δουλειά. Τους άρεσε να ζωγραφίζουν μπλουζάκια και έστησαν μια μικρή επιχείρηση για να τα πουλήσουν μέσω διαδικτύου.

Σε διάστημα ενός μηνός τα έξοδα κατασκευής (σε ευρώ) για x μπλουζάκια δίνονται από τη συνάρτηση $K(x) = 12,5x + 120$ και τα έσοδα από την πώλησή τους (σε ευρώ), από τη συνάρτηση $E(x) = 15,5x$.

α) Αν η επιχείρηση κάποιο μήνα δεν κατασκευάσει μπλουζάκια, έχει έξοδα; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 6)

β) Τι εκφράζει ο αριθμός 12,5 και τι ο αριθμός 15,5 στο πλαίσιο του προβλήματος;

(Μονάδες 4)

γ) Να βρείτε πόσα μπλουζάκια πρέπει να πουλήσουν ώστε να έχουν έσοδα όσα και έξοδα (δηλαδή να μην «μπαίνει μέσα» η επιχείρηση)

(Μονάδες 6)

δ) Αν πουλήσουν 60 μπλουζάκια θα έχουν κέρδος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4/13158

(α) Τα έσοδα της επιχείρησης για x μπλουζάκια δίνονται από τη συνάρτηση $K(x) = 19,5x + 120$.

Αν η επιχείρηση δεν κατασκευάζει μπλουζάκια, τότε $x = 0$, άρα $K(0) = 19,5 \cdot 0 + 120 = 120 \text{ €}$.

(β) Ο αριθμός $19,5$ εκφράζει το κόστος για το κάθε μπλουζάκι σε ευρώ, ενώ ο αριθμός $15,5$ εκφράζει την τιμή πώλησης του κάθε τεμαχίου σε ευρώ.

(γ) Με $x \geq 0$ πρέπει: $E(x) = K(x) \Leftrightarrow 15,5x = 19,5x + 120$
 $\Leftrightarrow 3x = 120 \Leftrightarrow x = 40$ ΔΕΚΤΟ

Άρα, θα πρέπει να πουλήσουν 40 μπλουζάκια ώστε τα έσοδα να είναι ίσα με τα έξοδα.

(δ) Αν πουλήσουν 60 μπλουζάκια, τότε τα έσοδα θα είναι: $E(60) = 15,5 \cdot 60 = 930 \text{ €}$, ενώ τα έξοδα

θα είναι: $K(60) = 19,5 \cdot 60 + 120 = 870 \text{ €}$

Επομένως, θα υπάρχει κέρδος: $930 - 870 = 60 \text{ €}$

ΘΕΜΑ 4 / 13155

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 4x + 2$ και $g(x) = x^2 - 9$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

- α) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g με τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 6)
- β) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες σε κάποιο από τα σημεία $(3, 0)$ και $(-3, 0)$. (Μονάδες 4)
- γ) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g δεν έχουν κοινό σημείο πάνω σε κάποιον από τους άξονες. (Μονάδες 8)
- δ) Να βρείτε συνάρτηση h της οποίας η γραφική παράσταση είναι ευθεία, διέρχεται από το $A(0, 3)$ και τέμνει τη γραφική παράσταση της g σε σημείο του ημιάξονα Ox . (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4 / 13155

(α) Είναι, $A_g = \mathbb{R}$. Έστω $y = x^2 - 9$ η εξίσωση της Γ_g .

Για $y = 0$ έχουμε: $x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{9} \Leftrightarrow x = \pm 3$
 άρα η Γ_g τέμνει τον x 'α στα σημεία $A(3, 0)$ και $B(-3, 0)$.

(β) Έστω $(3, 0) \in \Gamma_f \Leftrightarrow f(3) = 0 \Leftrightarrow 4 \cdot 3 + 2 = 0 \Leftrightarrow 14 = 0$ ψευδής
 άρα $(3, 0) \notin \Gamma_f$.

Έστω $(-3, 0) \in \Gamma_f \Leftrightarrow f(-3) = 0 \Leftrightarrow 4(-3) + 2 = 0 \Leftrightarrow -10 = 0$ ψευδής
 άρα $(-3, 0) \notin \Gamma_f$.

Επομένως, τα σημεία $(3, 0)$ και $(-3, 0)$ δεν ανήκουν στη γραφική παράσταση της f .

(γ) Έχουμε, $A_f = A_g = \mathbb{R}$. Στα κοινά σημεία των Γ_f και Γ_g έχουμε ίσες συντεταγμένες, οπότε με $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 4x + 2 = x^2 - 9 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 11 = 0$$

$$\text{Είναι, } \Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-11) = 16 + 44 = 60 > 0,$$

$$\text{οπότε } x_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{60}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 2\sqrt{15}}{2} = 2 \pm \sqrt{15} \begin{cases} x_1 = 2 + \sqrt{15} \\ x_2 = 2 - \sqrt{15} \end{cases}$$

$$\cdot f(2 + \sqrt{15}) = 4(2 + \sqrt{15}) + 2 = 8 + 4\sqrt{15} + 2 = 10 + 4\sqrt{15}.$$

$$\cdot f(2 - \sqrt{15}) = 4(2 - \sqrt{15}) + 2 = 8 - 4\sqrt{15} + 2 = 10 - 4\sqrt{15}.$$

Άρα, οι Γ_f και Γ_g τέμνονται στα σημεία

$$\Gamma(2 + \sqrt{15}, 10 + 4\sqrt{15}) \text{ και } \Delta(2 - \sqrt{15}, 10 - 4\sqrt{15})$$

Όμως, τα ευθεία Γ και Δ δεν ανήκουν σε κάποιον από τους άξονες. Άρα, οι l_7 και l_9 δεν έχουν κοινό ευθείο πάνω σε κάποιον από τους άξονες.

(δ) Η γραφική παράσταση της h είναι ευθεία, άρα είναι της μορφής: $h(x) = ax + \beta$.

$$\cdot A(0,3) \in (h \Leftrightarrow h(0) = 3 \Leftrightarrow a \cdot 0 + \beta = 3 \Leftrightarrow \beta = 3.$$

Για $\beta = 3$ έχουμε: $h(x) = ax + 3$.

Επίσης, η $(h$ τέμνει τη l_9 σε ευθείο του ημιάξονα Ox , δηλαδή στο $A(3,0)$ λόγω (α)

$$\text{Δηλαδή, } A(3,0) \in (h \Leftrightarrow h(3) = 0 \Leftrightarrow a \cdot 3 + 3 = 0 \Leftrightarrow 3a = -3 \Leftrightarrow a = -1. \text{ Επομένως, } h(x) = -x + 3.$$

ΘΕΜΑ 4 / 13107

Δίνεται το τριώνυμο: $f(x) = \lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)x + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ (Μονάδες 8)

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το άθροισμα $S = x_1 + x_2$ συναρτήσει του $\lambda \neq 0$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου $P = x_1 \cdot x_2$ των ριζών.

(Μονάδες 5)

γ) Αν $\lambda > 0$ το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 6)

δ) Αν $0 < \lambda \neq 1$ και x_1, x_2 με $x_1 < x_2$, είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου, τότε να βρείτε το πρόσημο του γινομένου $f(0) \cdot f(\kappa) \cdot f(\mu)$, όπου κ, μ είναι αριθμοί τέτοιοι ώστε $x_1 < \kappa < x_2 < \mu$.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4 | 13107

(α) Έχουμε, $\Delta = [-(\lambda^2+1)]^2 - 4 \cdot \lambda \cdot \lambda = (\lambda^2+1)^2 - 4\lambda^2 =$
 $= (\lambda^2+1)^2 - (2\lambda)^2 = (\lambda^2+1-2\lambda)(\lambda^2+1+2\lambda) = (\lambda-1)^2(\lambda+1)^2 =$
 $= [(\lambda-1)(\lambda+1)]^2 = (\lambda^2-1)^2 \geq 0$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Άρα, το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

(β) Με τη βοήθεια των τύπων Vietta, έχουμε:

$$\bullet S = x_1 + x_2 = -\frac{-(\lambda^2+1)}{\lambda} = \frac{\lambda^2+1}{\lambda}$$

$$\bullet P = x_1 x_2 = \frac{\lambda}{\lambda} = 1$$

(γ) Αν $\lambda > 0$, τότε έχουμε ότι:

• $\Delta \geq 0$, άρα το τριώνυμο έχει δύο πραγματικές ρίζες x_1, x_2

• $S = x_1 x_2 = 1 > 0$, άρα οι x_1, x_2 είναι αριθμοί ομόσημοι

• $P = x_1 + x_2 = \frac{\lambda^2+1}{\lambda} > 0$, άρα οι x_1, x_2 είναι θετικοί ομόσημοι.

(δ) Με $0 < \lambda \neq 1$, έχουμε:

x	$-\infty$	0	x_1	κ	x_2	μ	$+\infty$
$f(x)$		+	0	-	0	+	

άρα $f(\kappa) < 0$, $f(\mu) > 0$. Επίσης, $0 < x_1$, διότι

$x_1 > 0$ άρα $f(0) > 0$

Επομένως, $f(0)f(\kappa)f(\mu) < 0$

ΘΕΜΑ 4 / 13090

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + 3x + 2$ και $g(x) = x + 1, x \in \mathbb{R}$

α) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, το οποίο στη συνέχεια να προσδιορίσετε. (Μονάδες 10)

β) Δίνεται η συνάρτηση $h(x) = x + \alpha$. Να δείξετε ότι:

i) αν $\alpha > 1$, τότε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, h έχουν δύο κοινά σημεία.

ii) αν $\alpha < 1$, τότε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, h δεν έχουν κοινά σημεία.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 4/13090

(α) Έχουμε, $A_f = \mathbb{R}$ και $A_g = \mathbb{R}$. Στα κοινά σημεία των f και g έχουμε ίσες συντεταγμένες, δηλαδή για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 = x + 1 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -1.$$

$$\text{Είναι, } g(-1) = -1 + 1 = 0$$

Επομένως, οι f και g τέμνονται στο σημείο $A(-1, 0)$.

(β) $A_f = A_h = \mathbb{R}$. Στα κοινά σημεία των f και h έχουμε ίσες συντεταγμένες, δηλαδή

$$f(x) = h(x) \Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 = x + a \Leftrightarrow x^2 + 2x + 2 - a = 0$$

$$\text{Είναι, } \Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (2 - a) = 4 - 8 + 4a = -4 + 4a = 4(-1 + a)$$

(i) Αν $a > 1 \Leftrightarrow a - 1 > 0$, τότε $\Delta > 0$ άρα η εξίσωση $f(x) = h(x)$ έχει δύο ρίζες άνισες. Επομένως, οι f και h έχουν δύο κοινά σημεία.

(ii) Αν $a < 1 \Leftrightarrow a - 1 < 0$, τότε $\Delta < 0$ άρα η εξίσωση $f(x) = h(x)$ είναι αδύνατη. Επομένως, οι f και h δεν έχουν κοινά σημεία.

Δίνεται συνάρτηση $g(x) = \frac{(x^2 - 1)(x^2 - 4)}{x^2 + \kappa x + \lambda}$, η οποία έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R} - \{-2, 1\}$.

α) Να βρείτε τις τιμές των κ και λ . (Μονάδες 9)

β) Για $\kappa = 1$ και $\lambda = -2$:

i) Να απλοποιήσετε τον τύπο της g . (Μονάδες 9)

ii) Να δείξετε ότι $g(\alpha) \cdot g(\beta) > 0$, όταν $\alpha, \beta \in (-1, 1) \cup (1, 2)$ (Μονάδες 7)

(α) Έχουμε, $g(x) = \frac{(x^2-1)(x^2-4)}{x^2+κx+λ}$ με $A_g = \mathbb{R} - \{-2, 1\}$.

Δηλαδή, η εξίσωση $x^2+κx+λ=0$ έχει ρίζες τους αριθμούς: $x_1 = -2, x_2 = 1$. Άρα, οι αριθμοί $x_1 = -2$ και $x_2 = 1$ επαληθεύουν την εξίσωση, δηλαδή

• για $x_1 = -2$, έχουμε $(-2)^2 + κ(-2) + λ = 0 \Leftrightarrow 4 - 2κ + λ = 0$
 $\Leftrightarrow λ = 2κ - 4$ (1)

• για $x_2 = 1$, έχουμε $1^2 + κ \cdot 1 + λ = 0 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} 1 + κ + 2κ - 4 = 0$
 $\Leftrightarrow 3κ = 3 \Leftrightarrow κ = 1$

Για $κ = 1$ η (1) γίνεται: $λ = 2 \cdot 1 - 4 \Leftrightarrow λ = -2$.

(β') Για $κ = 1$ και $λ = -2$ έχουμε $g(x) = \frac{(x^2-1)(x^2-4)}{x^2+x-2} =$
 $= \frac{(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)}{(x+2)(x-1)} \Leftrightarrow g(x) = (x+1)(x-2)$.

(ii) Παρατηρούμε ότι ο απλοποιημένος τύπος της g είναι τριώνυμο με ρίζες $x_1 = -1$ και $x_2 = 2$. Επίσης, ο συντελεστής του x^2 είναι ίσος με $1 > 0$, άρα έχοντας υπόψη ότι $A_g = \mathbb{R} - \{-2, 1\}$, τότε

x	$-\infty$	-2	-1	1	2	$+\infty$
$g(x)$	$+$	$ $	$+$	$-$	$ $	$-$

Αν $α, β \in (-1, 1) \cup (1, 2)$, τότε $g(α) < 0$ και $g(β) < 0$
 άρα $g(α)g(β) > 0$.

ΘΕΜΑ 4 / 13084

Δίνεται συνάρτηση $g(x) = \frac{(x^2 - 1)(x^2 - 4)}{x^2 + kx + \lambda}$, η οποία έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R} - \{-2, 1\}$.

α) Να βρείτε τις τιμές των k και λ . (Μονάδες 9)

β) Για $k = 1$ και $\lambda = -2$,

i) να απλοποιήσετε τον τύπο της g . (Μονάδες 9)

ii) να δείξετε ότι: $g(\alpha+3) > g(\alpha)$, όταν $\alpha \in (-1, 1) \cup (1, 2)$. (Μονάδες 7)

(α) Για να βρω το πεδίο ορισμού της g πρέπει και αρκεί: $x^2 + kx + \lambda \neq 0$ και $A_g = \mathbb{R} - \{-2, 1\}$, άρα η εξίσωση: $x^2 + kx + \lambda = 0$ έχει λύσεις $x_1 = -2$ και $x_2 = 1$.

• Για $x_1 = -2$, έχουμε: $(-2)^2 + k(-2) + \lambda = 0 \Leftrightarrow 4 - 2k + \lambda = 0$
 $\Leftrightarrow \lambda = 2k - 4$ (I)

• Για $x_2 = 1$, έχουμε: $1^2 + k \cdot 1 + \lambda = 0 \Leftrightarrow 1 + k + \lambda = 0$ (II)
 $1 + k + 2k - 4 = 0 \Leftrightarrow 3k = 3 \Leftrightarrow k = 1$

Για $k = 1$ η (I) γίνεται: $\lambda = 2 \cdot 1 - 4 \Leftrightarrow \lambda = -2$

(β) (i) Για $k = 1$ και $\lambda = -2$ έχουμε: $g(x) = \frac{(x^2 - 1)(x^2 - 4)}{x^2 + x - 2} =$

$$= \frac{(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)}{(x+2)(x-1)} \Leftrightarrow g(x) = (x+1)(x-2)$$

(ii) Παρατηρούμε ότι ο απλοποιημένος τύπος της g είναι τριώνυμο με ρίζες $x_1 = -1$ και $x_2 = 2$. Επίσης, ο συντελεστής του x^2 είναι ίσος με $1 > 0$, άρα έχοντας υπόψη ότι $A_g = \mathbb{R} - \{-2, 1\}$, τότε

x	$-\infty$	-2	-1	1	2	$+\infty$
$g(x)$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$

Έχουμε, $a \in (-1, 1) \cup (1, 2)$, άρα $g(a) < 0$ από το παραπάνω πίνακάκι.

Επίσης, $(a+3) \in (2, 3) \cup (4, 5)$, άρα $g(a+3) > 0$ από το παραπάνω πίνακάκι.

Επομένως, $g(a) < g(a+3)$.

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - x + (\lambda - \lambda^2) = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$. (1)

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ (Μονάδες 10)

β) Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες ίσες; (Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε το λ , ώστε η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 - x + \lambda - \lambda^2}$ να έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4/4682

(α) Είναι, $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 (\lambda - \lambda^2) = 1 - 4\lambda + 4\lambda^2 = (2\lambda - 1)^2 \geq 0$

άρα η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

(β) Η (1) έχει δύο ρίζες ίσες, αν και μόνο αν,
 $\Delta = 0 \Leftrightarrow (2\lambda - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow 2\lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow 2\lambda = 1 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}$.

(γ) Η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \sqrt{x^2 - x + \lambda - \lambda^2}$

έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, αν και μόνο αν,
 $x^2 - x + \lambda - \lambda^2 \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (2)

Η σχέση (2) ισχύει, αν και μόνο αν, $\begin{cases} \lambda > 0 \\ \text{και} \\ \Delta_1 \leq 0 \end{cases}$

Είναι, $\Delta_1 = (-1)^2 - 4 \cdot 1 (\lambda - \lambda^2) = 1 - 4\lambda + 4\lambda^2 = (2\lambda - 1)^2 \geq 0$

Όμως, πρέπει $\Delta_1 \leq 0$, άρα πρέπει $\Delta_1 = 0 \Leftrightarrow$

$(2\lambda - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow 2\lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}$.

Δίνεται το τριώνυμο: $f(x) = \lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)x + \lambda$, με $\lambda > 0$

- α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες θετικές για κάθε $\lambda > 0$. (Μονάδες 10)
- β) Αν οι ρίζες του τριωνύμου είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, τότε:
- i) να βρείτε το εμβαδόν του ορθογωνίου. (Μονάδες 4)
- ii) να βρείτε την περίμετρο Π του ορθογωνίου ως συνάρτηση του λ και να αποδείξετε ότι $\Pi \geq 4$ για κάθε $\lambda > 0$. (Μονάδες 8)
- iii) για την τιμή του λ που η περίμετρος γίνεται ελάχιστη, δηλαδή ίση με 4, τι συμπεραίνετε για το ορθογώνιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 3)

ΘΕΜΑ 4/4558

$$\begin{aligned} \text{(α)} \text{ Έχουμε, } \Delta &= [(2^2+1)]^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = (2^2+1)^2 - 4 \cdot 2^2 = \\ &= 2^4 + 2 \cdot 2^2 + 1 - 4 \cdot 2^2 = 2^4 - 2 \cdot 2^2 + 1 = (2^2-1)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\text{Οπότε, } x_{1,2} = \frac{-[-(2^2+1)] \pm \sqrt{(2^2-1)^2}}{2 \cdot 2} = \frac{2^2+1 \pm (2^2-1)}{2 \cdot 2} =$$

$$x_1 = \frac{2^2+1+2^2-1}{2 \cdot 2} = \frac{2 \cdot 2^2}{2 \cdot 2} = 2 > 0$$

$$x_2 = \frac{2^2+1-2^2+1}{2 \cdot 2} = \frac{2}{2 \cdot 2} = \frac{1}{2} > 0$$

(β)(i) Το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι:

$$E = x_1 \cdot x_2 = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 \text{ τ.μ.}$$

(ii) Η περίμετρος του ορθογωνίου είναι:

$$Π = 2x_1 + 2x_2 = 2\left(2 + \frac{1}{2}\right) \geq 4, \text{ για κάθε } 2 > 0, \text{ διότι}$$

$$\text{έστω } 2 + \frac{1}{2} \geq 2 \xrightarrow{2 > 0} 2^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \geq 2 \cdot 2 \Leftrightarrow 2^2 - 2 \cdot 2 + 1 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$(2-1)^2 \geq 0 \text{ που ισχύει.}$$

$$\text{(iii) Είναι, } Π = 4 \Leftrightarrow 2\left(2 + \frac{1}{2}\right) = 4 \Leftrightarrow 2 + \frac{1}{2} = 2 \xrightarrow{2 > 0}$$

$$2^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 2 \cdot 2 \Leftrightarrow 2^2 - 2 \cdot 2 + 1 = 0 \Leftrightarrow (2-1)^2 = 0 \Leftrightarrow 2 = 1.$$

Για $2 = 1$, έχουμε $x_1 = 1$ και $x_2 = 1$, δηλαδή οι πλευρές είναι ίσες, άρα το ορθογώνιο γίνεται τετράγωνο.