ΘΕΜΑ 2 / 508

α) Να βρείτε το άθροισμα των *ν* πρώτων διαδοχικών θετικών ακεραίων 1,2,3,...ν

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε πόσους από τους πρώτους διαδοχικούς θετικούς ακέραιους πρέπει να χρησιμοποιήσουμε για να πάρουμε άθροισμα τον αριθμό 45. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2º/508

ΛΥΣΗ

(α) Παρατηρούμε ότι οι αριθμοί : $1, 2, 3, \dots, \nu$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, έστω (a_ν), με πρώτο όρο : $a_1 = 1$, διαφορά $\omega = 2 - 1 = 1$ και $a_\nu = \nu$.

Ισχύει: $S_\nu = \frac{\nu}{2}\left[2a_1 + (\nu-1)\omega\right]$, άρα

$$S_\nu = \frac{\nu}{2}\left[2 \cdot 1 + (\nu-1)\cdot 1\right] = \frac{\nu}{2}(2+\nu-1) = \frac{\nu}{2}(\nu+1).$$

(β) Έχουμε, $S_\nu = 45 \Leftrightarrow \frac{\nu}{2}(\nu+1) = 45 \Leftrightarrow \nu(\nu+1) = 90$

$\Leftrightarrow \nu^2 + \nu - 90 = 0$. $\quad \Delta = 1^2 - 4(-90) = 361 > 0$

Οπότε, $\nu_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{361}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 19}{2}$ $\nearrow \nu_1 = \frac{-1+19}{2} = 9 \in \mathbb{N}^*$. $\searrow \nu_2 = \frac{-1-19}{2} = -10 \notin \mathbb{N}^*$.

Άρα, πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τους πρώτους 9 διαδοχικούς θετικούς ακέραιους.

ΘΕΜΑ 2 / 4288

α) Να βρείτε, για ποιες τιμές του x, οι αριθμοί $x+4$, $2-x$, $6-x$ με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου. (Μονάδες 13)

β) Αν $x=5$ και ο $6-x$ είναι ο τέταρτος όρος της παραπάνω γεωμετρική προόδου, να βρείτε

i) το λόγο λ της γεωμετρικής προόδου. (Μονάδες 6)

ii) τον πρώτο όρο α_1 της προόδου. (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 2ο / 4288.

ΛΥΣΗ

(α) Οι αριθμοί $x+4, 2-x, 6-x$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, αν και μόνο αν,

$(2-x)^2 = (x+4)(6-x) \Leftrightarrow 4-4x+x^2 = 6x - x^2 + 24 - 4x \Leftrightarrow$

$2x^2 - 6x - 20 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 10 = 0$

$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 (-10) = 49 > 0$, άρα

$x_{1,2} = \dfrac{-(-3) \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 1} = \dfrac{3 \pm 7}{2}$ $\begin{cases} x_1 = \dfrac{3+7}{2} = 5 \\ x_2 = \dfrac{3-7}{2} = -2 \end{cases}$

• Για $x_1 = 5$ οι αριθμοί γίνονται: $9, -3, 1$ διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, έστω (α_ν).

• Για $x_2 = -2$ οι αριθμοί γίνονται: $2, 4, 8$ διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, έστω (β_ν).

(β) Αν $x = 5$, τότε έχουμε: $9, -3, 1$ και $\alpha_4 = 1$

(i) Έχουμε, $\lambda = \dfrac{\alpha_4}{\alpha_3} = \dfrac{1}{-3} = -\dfrac{1}{3}$

(ii) Ισχύει: $\alpha_\nu = \alpha_1 \cdot \lambda^{\nu-1}$, άρα $\alpha_4 = 1 \Leftrightarrow \alpha_1 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^3 = 1$

$\Leftrightarrow \alpha_1 \left(-\dfrac{1}{27}\right) = 1 \Leftrightarrow \alpha_1 = -27$,

ΘΕΜΑ 2 /4300

Σε μία αριθμητική πρόοδο (α_ν) ισχύουν: $\alpha_1 = 2$ και $\alpha_{25} = \alpha_{12} + 39$.

α) Να δείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 3$. (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε ποιός όρος της προόδου είναι ίσος με 152. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2º/4300

ΛΥΣΗ

(α) Ισχύει: $a_ν = a_1 + (ν-1)ω$, άρα

$a_{25} = a_{12} + 39 \Leftrightarrow 2 + 24ω = 2 + 11ω + 39 \Leftrightarrow$

$13ω = 39 \Leftrightarrow ω = 3$.

(β) Έστω $a_ν = 152 \Leftrightarrow 2 + (ν-1)3 = 152 \Leftrightarrow 3(ν-1) = 150$

$\Leftrightarrow ν-1 = 50 \Leftrightarrow ν = 51$

Επομένως, $a_{51} = 152$.

ΘΕΜΑ 2 / 4301

Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_ν) με διαφορά ω.

α) Να δείξετε ότι: $\dfrac{a_{15}-a_9}{a_{10}-a_7}=2$. (Μονάδες 13)

β) Αν $a_{15}-a_9=18$, να βρείτε τη διαφορά ω της προόδου. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2º/4301

ΛΥΣΗ

(α) Ισχύει: $a_\nu = a_1 + (\nu-1)\omega$, άρα

$$\frac{a_{15}-a_9}{a_{10}-a_7} = \frac{a_1+14\omega-(a_1+8\omega)}{a_1+9\omega-(a_1+6\omega)} = \frac{6\omega}{3\omega} = 2$$

(β) Έχουμε, $a_{15}-a_9 = 18 \Leftrightarrow a_1+14\omega-(a_1+8\omega)=18 \Leftrightarrow$

$6\omega = 18 \Leftrightarrow \omega = 3$

Άρα, η διαφορά της προόδου είναι $\omega=3$.

ΘΕΜΑ 2 11301

Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_ν) για την οποία ισχύει: $\alpha_4 - \alpha_2 = 10$

α) Να δείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega=5$. (Μονάδες 12)

β) Αν το άθροισμα των τριών πρώτων όρων της προόδου είναι 33, να βρείτε τον πρώτο όρο της προόδου. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2º/1301

ΛΥΣΗ

(α) Στην αριθμητική πρόοδο (a_v) ισχύει: $a_v = a_1 + (v-1)\omega$

άρα $a_4 - a_2 = 10 \Leftrightarrow a_1 + 3\omega - (a_1 + \omega) = 10 \Leftrightarrow$

$a_1 + 3\omega - a_1 - \omega = 10 \Leftrightarrow 2\omega = 10 \Leftrightarrow \omega = 5$.

(β) Έχουμε, $S_3 = 33$. Ισχύει: $S_v = \frac{v}{2}[2a_1 + (v-1)\omega]$,

άρα $S_3 = 33 \Leftrightarrow \frac{3}{2}[2a_1 + (3-1)\cdot 5] = 33 \Leftrightarrow$

$2a_1 + 10 = \frac{2\cdot 33}{3} \Leftrightarrow 2a_1 + 10 = 22 \Leftrightarrow 2a_1 = 12 \Leftrightarrow a_1 = 6$

ΘΕΜΑ 2 1495

Σε γεωμετρική πρόοδο (α_ν) με θετικό λόγο λ, ισχύει: $\alpha_3=1$ και $\alpha_5=4$.

α) Να βρείτε το λόγο λ της προόδου και τον πρώτο όρο της. (Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι ο ν-οστός όρος της προόδου είναι:

$$\alpha_\nu=2^{\nu-3}.$$ (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2ο / 495

ΛΥΣΗ

(α) Έστω (a_ν) γεωμετρική πρόοδος και $a_\nu = a_1 \cdot \lambda^{\nu-1}$

Οπότε, • $a_5 = 4 \Leftrightarrow a_1 \cdot \lambda^4 = 4$ (1)

• $a_3 = 1 \Leftrightarrow a_1 \cdot \lambda^2 = 1$. (2)

Από τις σχέσεις (1) και (2), έχουμε:

$$\frac{a_1 \lambda^4}{a_1 \lambda^2} = \frac{4}{1} \Leftrightarrow \lambda^2 = 4 \Leftrightarrow \lambda = \pm\sqrt{4} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 2 > 0 \text{ ΔΕΚΤΟ.} \\ \text{ή} \\ \lambda = -2 < 0 \text{ ΑΠΟΡ.} \end{cases}$$

Για $\lambda = 2$ η (2) γίνεται: $a_1 \cdot 2^2 = 1 \Leftrightarrow a_1 = \frac{1}{4}$

(β) Ισχύει: $a_\nu = a_1 \cdot \lambda^{\nu-1}$, άρα $a_\nu = \frac{1}{4} \cdot 2^{\nu-1} = \frac{1}{2^2} \cdot 2^{\nu-1} =$

$= 2^{-2} \cdot 2^{\nu-1} \Leftrightarrow a_\nu = 2^{-2+\nu-1} \Leftrightarrow a_\nu = 2^{\nu-3}$.

ΘΕΜΑ 2 | 474

Θεωρούμε την ακολουθία *($α_ν$)* των θετικών περιττών αριθμών: *1, 3, 5, 7, ...*

α) Να αιτιολογήσετε γιατί η *($α_ν$)* είναι αριθμητική πρόοδος και να βρείτε τον εκατοστό όρο της. (Μονάδες 15)

β) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των *ν* πρώτων περιττών θετικών αριθμών είναι ίσο με το τετράγωνο του πλήθους τους. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2ο / 474

ΛΥΣΗ

(α) Η (a_ν) είναι αριθμητική πρόοδος, διότι κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενό του προσθέτοντας τον ίδιο πάντα αριθμό.

Έχουμε, $a_1 = 1$, $\omega = 3-1 \Leftrightarrow \omega = 2$

Ισχύει: $a_\nu = a_1 + (\nu-1)\omega$, άρα $a_{100} = 1 + 99 \cdot 2 \Leftrightarrow a_{100} = 199$

(β) Ισχύει: $S_\nu = \frac{\nu}{2}[2a_1 + (\nu-1)\omega]$, άρα

$$S_\nu = \frac{\nu}{2}[2 \cdot 1 + (\nu-1)2] = \frac{\nu}{2}(2 + 2\nu - 2) = \frac{\nu}{2} \cdot 2\nu \Leftrightarrow S_\nu = \nu^2.$$

Άρα, το άθροισμα των ν πρώτων περιττών θετικών αριθμών είναι ίσο με το τετράγωνο του πλήθους τους.

ΘΕΜΑ 2 / 480

Ένα μικρό γήπεδο μπάσκετ έχει δέκα σειρές καθισμάτων και κάθε σειρά έχει **α** καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη. Η $7^η$ σειρά έχει 36 καθίσματα και το πλήθος των καθισμάτων του σταδίου είναι 300.

α) Αποτελούν τα καθίσματα του γηπέδου όρους αριθμητικής προόδου; Να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας. (Μονάδες 12)

β) Πόσα καθίσματα έχει κάθε σειρά; (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2ο/480

ΛΥΣΗ

(α) Παρατηρούμε ότι κάθε σειρά έχει α καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη, επομένως τα καθίσματα του γηπέδου αποτελούν όρους αριθμητικής προόδου, με διαφορά $\omega = \alpha$.

(β) Έστω (a_ν) η αριθμητική πρόοδος με $a_7 = 36$ και $S_{10} = 300$

Ισχύουν: $a_\nu = a_1 + (\nu-1)\omega$ και $S_\nu = \frac{\nu}{2}[2a_1 + (\nu-1)\omega]$, άρα

• $a_7 = 36 \Leftrightarrow a_1 + 6\alpha = 36 \Leftrightarrow a_1 = 36 - 6\alpha$ (1)

• $S_{10} = 300 \Leftrightarrow \frac{10}{2}[2a_1 + (10-1)\alpha] = 300 \Leftrightarrow$

$5(2a_1 + 9\alpha) = 300 \Leftrightarrow 2a_1 + 9\alpha = 60 \overset{(1)}{\Longleftrightarrow} 2(36-6\alpha) + 9\alpha = 60$

$\Leftrightarrow 72 - 12\alpha + 9\alpha = 60 \Leftrightarrow -3\alpha = -12 \Leftrightarrow \alpha = 4$

Για $\alpha = 4$ η (1) γίνεται: $a_1 = 36 - 6 \cdot 4 \Leftrightarrow a_1 = 12$

Επομένως, $a_1 = 12$ και $\omega = 4$. , δηλαδή $a_2 = 16$, $a_3 = 20$, $a_4 = 24$, $a_5 = 28$, ...

2/3828

ΘΕΜΑ 2

Οι αριθμοί *κ-2, 2κ* και *7κ+4*, κ∈ℕ είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι μιας γεωμετρικής προόδου $(α_ν)$.

α) Να αποδείξετε ότι *κ=4* και να βρείτε το λόγο *λ* της προόδου. (Μονάδες 12)

β) i) Να εκφράσετε το 2^o όρο, τον 5^o και τον 4^o όρο της παραπάνω γεωμετρικής προόδου ως συνάρτηση του $α_1$. (Μονάδες 6)

ii) Να αποδείξετε ότι $α_2 + α_5 = 4(α_1 + α_4)$. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 2º/3828

ΛΥΣΗ

(α) Οι αριθμοί $\kappa-2, 2\kappa, 7\kappa+4$, $\kappa\in\mathbb{N}$ είναι διαδοχικοί όροι μίας γεωμετρικής προόδου (a_ν), αν και μόνο αν, $(2\kappa)^2=(\kappa-2)(7\kappa+4) \Leftrightarrow 4\kappa^2=7\kappa^2+4\kappa-14\kappa-8 \Leftrightarrow$

$3\kappa^2-10\kappa-8=0$. $\Delta=(-10)^2-4\cdot3(-8)=100+96=196>0$

Οπότε, $\kappa_{1,2}=\dfrac{-(-10)\pm\sqrt{196}}{2\cdot3}=\dfrac{10\pm14}{6}$ $\kappa_1=\dfrac{10+14}{6}=\dfrac{24}{6}=4\in\mathbb{N}$, $\kappa_2=\dfrac{10-14}{6}=-\dfrac{4}{6}=-\dfrac{2}{3}\notin\mathbb{N}$

Αν $\kappa_1=4$, τότε $2, 8, 32$ οι διαδοχικοί όροι της (a_ν).

Επίσης, $\lambda=\dfrac{8}{2}=\dfrac{32}{8}\Leftrightarrow\lambda=4$ ο λόγος της προόδου

(β) (i) Ισχύει: $a_\nu=a_1\cdot\lambda^{\nu-1}$, άρα $\cdot\ a_2=a_1\cdot4 \Leftrightarrow a_2=4a_1$

$\cdot\ a_5=a_1\cdot4^4 \Leftrightarrow a_5=(2^2)^4\cdot a_1 \Leftrightarrow a_5=2^8 a_1$

$\cdot\ a_4=a_1\cdot4^3 \Leftrightarrow a_4=(2^2)^3 a_1 \Leftrightarrow a_4=2^6 a_1$

(ii) Έχουμε, $\cdot\ a_2+a_5=4a_1+a_4\cdot4=4(a_1+a_4)$

$\circ\ a_2+a_5=4a_1+2^8\cdot a_1=4a_1+2^2\cdot2^6\cdot a_1=4a_1+4a_4=4(a_1+a_4)$

ΘΕΜΑ 2 / 1513

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_ν) με $\alpha_1=1$ και $\alpha_3=9$.

α) Να βρείτε τη διαφορά ω της αριθμητικής προόδου. (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε το μικρότερο θετικό ακέραιο ν, ώστε να ισχύει $\alpha_\nu>30$.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2º/1513

ΛΥΣΗ

(α) Ισχύει: $a_\nu = a_1 + (\nu-1)\omega$, άρα $a_3 = 9 \Leftrightarrow a_1 + 2\omega = 9 \Leftrightarrow$

$1 + 2\omega = 9 \Leftrightarrow 2\omega = 8 \Leftrightarrow \omega = 4$

(β) Έχουμε, $a_\nu > 30 \Leftrightarrow 1 + (\nu-1)\cdot 4 > 30 \Leftrightarrow 1 + 4\nu - 4 > 30 \Leftrightarrow$

$4\nu > 33 \Leftrightarrow \nu > \frac{33}{4} = 8{,}25$.

Όμως, ο μικρότερος θετικός ακέραιος που ικανοποιεί τη σχέση $\nu > 8{,}25$ είναι $\nu = 9$.

ΘΕΜΑ 4 /6143

Στην Α΄ τάξη ενός Λυκείου της Καρδίτσας η σύμβουλος των μαθηματικών πρόκειται να πραγματοποιήσει μια δραστηριότητα. Επειδή όμως δεν γνωρίζει το πλήθος των μαθητών της τάξης, συμβουλεύεται το Γυμναστή του σχολείου, που στοιχίζει τους μαθητές για τις παρελάσεις και εκείνος της απαντά με ένα πρόβλημα:

«Μπορώ να τοποθετήσω όλους τους μαθητές σε x σειρές με $x - 1$ μαθητές σε κάθε σειρά. Αν όμως θελήσω να τους τοποθετήσω σε $x+3$ σειρές με $x-3$ μαθητές σε κάθε σειρά, θα μου λείπει ένας μαθητής».

α) Να βρείτε την τιμή του x (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε η Α΄ τάξη έχει 90 μαθητές. (Μονάδες 6)

γ) Η σύμβουλος σκοπεύει να μοιράσει τους παραπάνω 90 μαθητές σε ν ομάδες εργασίας, ώστε στην πρώτη ομάδα να πάνε 2 μαθητές και σε κάθε επόμενη ομάδα να πηγαίνουν 2 παραπάνω κάθε φορά. Να βρείτε την τιμή του ν, δηλαδή πόσες ομάδες εργασίας θα δημιουργηθούν. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 4ο/6143

ΛΥΣΗ

(α) Έχουμε, $x(x-1) = (x+3)(x-3) - 1 \Leftrightarrow x^2 - x = x^2 - 9 - 1 \Leftrightarrow$
$-x = -10 \Leftrightarrow x = 10$

(β) Οπότε, η Α' τάξη έχει συνολικά: $10 \cdot 9 = 90$ μαθητές

(γ) Στην πρώτη ομάδα πάνε 2 μαθητές και σε κάθε επόμενη ομάδα πηγαίνουν 2 παραπάνω κάθε φορά, άρα έχουμε αριθμητική πρόοδο, έστω (a_ν), με πρώτο όρο $a_1 = 2$, διαφορά $\omega = 2$ και $S_\nu = 90$.

Ισχύει: $S_\nu = \frac{\nu}{2}[2a_1 + (\nu-1)\omega]$, άρα

$S_\nu = 90 \Leftrightarrow \frac{\nu}{2}[2 \cdot 2 + (\nu-1)2] = 90 \Leftrightarrow \frac{\nu}{2}(4 + 2\nu - 2) = 90$

$\Leftrightarrow \nu(2 + 2\nu) = 180 \Leftrightarrow 2\nu^2 + 2\nu - 180 = 0 \Leftrightarrow \nu^2 + \nu - 90 = 0$

Έχουμε, $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1(-90) = 1 + 360 = 361 > 0$, άρα

$\nu_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{361}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 19}{2}$ ↗ $\nu_1 = \frac{-1+19}{2} = 9 \in \mathbb{N}$ ΔΕΚΤΟ
↘ $\nu_2 = \frac{-1-19}{2} = -10 \notin \mathbb{N}^*$ ΑΠΟΡ

Άρα, πρέπει να δημιουργηθούν 9 ομάδες εργασίας.

ΘΕΜΑ 4 /2323

Ο Διονύσης γράφει στο τετράδιό του τους αριθμούς 3, 7, 11, 15,... και συνεχίζει προσθέτοντας κάθε φορά το 4. Σταματάει όταν έχει γράψει τους 40 πρώτους από τους αριθμούς αυτούς.

α) Είναι οι παραπάνω αριθμοί διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 4)

β) Να βρείτε το άθροισμα των 40 αυτών αριθμών. (Μονάδες 7)

γ) Είναι ο αριθμός 120 ένας από αυτούς τους 40 αριθμούς; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

δ) Ο Γιώργος πήρε το τετράδιο του Διονύση και συνέχισε να γράφει διαδοχικούς όρους της ίδιας αριθμητικής προόδου, από εκεί που είχε σταματήσει ο Διονύσης μέχρι να εμφανιστεί ο αριθμός 235. Να βρείτε το άθροισμα των αριθμών που έγραψε ο Γιώργος.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4ο/2323

ΛΥΣΗ

(α) Οι αριθμοί: 3, 7, 11, 15, ... είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, έστω (a_ν), διότι κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενό του με πρόσθεση του ίδιου πάντοτε αριθμού.

(β) Ο πρώτος όρος $a_1 = 3$, η διαφορά $\omega = 7-3 = 4$.

Ισχύει: $S_\nu = \frac{\nu}{2}[2a_1 + (\nu-1)\omega]$, άρα

$S_{40} = \frac{40}{2}(2\cdot 3 + 39\cdot 4) = 20\cdot 162 = 3240$

(γ) Έστω $a_\nu = 120 \Leftrightarrow 3 + (\nu-1)4 = 120 \Leftrightarrow 4(\nu-1) = 117 \Leftrightarrow$

$\nu - 1 = \frac{117}{4} \Leftrightarrow \nu = \frac{117}{4} + \frac{4}{4} \Leftrightarrow \nu = \frac{121}{4} \notin \mathbb{N}^*$.

Άρα ο αριθμός 120 δεν ανήκει στους όρους της (a_ν).

(δ) Ο τελευταίος όρος που έγραψε ο Διονύσης είναι ο $a_{40} = 3 + 39\cdot 4 \Leftrightarrow a_{40} = 159$. Επομένως, ο Γιώργος ο πρώτος όρος που έγραψε ήταν ο $a_{41} = 163$.

Έστω $a_\nu = 235 \Leftrightarrow 3 + (\nu-1)4 = 235 \Leftrightarrow 4(\nu-1) = 232 \Leftrightarrow$

$\nu - 1 = 58 \Leftrightarrow \nu = 59 \in \mathbb{N}^*$, άρα $a_{59} = 235$.

Έστω S το άθροισμα των αριθμών που έγραψε ο Γιώργος, τότε

$S = S_{59} - S_{40} = \frac{59}{2}[2\cdot 3 + 58\cdot 4] - \frac{40}{2}(2\cdot 3 + 39\cdot 4) =$

$= \frac{59}{2}\cdot 238 - 20\cdot 162 = 7021 - 3240 = 3781$.

ΘΕΜΑ 4 /2083

Ένα κλειστό στάδιο έχει 25 σειρές καθισμάτων. Στην πρώτη σειρά έχει 12 καθίσματα και καθεμιά από τις επόμενες σειρές έχει δυο καθίσματα παραπάνω από την προηγούμενη.

α) Να βρείτε πόσα καθίσματα έχει η μεσαία και πόσα η τελευταία σειρά. (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε την χωρητικότητα του σταδίου. (Μονάδες 5)

γ) Οι μαθητές ενός Λυκείου προκειμένου να παρακολουθήσουν μια εκδήλωση, κατέλαβαν όλα τα καθίσματα από την $7^η$ μέχρι και την $14^η$ σειρά. Να βρείτε το πλήθος των μαθητών του Λυκείου. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4ο/2083

ΛΥΣΗ

(α) Τα καθίσματα αυξάνονται ανά δύο καθώς πηγαίνουμε στις παραπάνω σειρές, επομένως έχουμε αριθμητική πρόοδο, έστω (a_v), με πρώτο όρο $a_1=12$, διαφορά $\omega=2$ και $v=25$

Η μεσαία σειρά είναι η a_{13}. Ισχύει: $a_v=a_1+(v-1)\omega$ άρα $a_{13}=12+12\cdot 2 \Leftrightarrow a_{13}=36$, δηλαδή 36 άτομα.

Η τελευταία σειρά είναι η $a_{25}=12+24\cdot 2 \Leftrightarrow$ $a_{25}=60$ άτομα.

(β) Ισχύει: $S_v=\frac{v}{2}[2a_1+(v-1)\omega]$, άρα

$$S_{25}=\frac{25}{2}[2\cdot 12+(25-1)\cdot 2]=\frac{25}{2}\cdot 72=900 \text{ άτομα.}$$

(γ) Έστω S το ζητούμενο άθροισμα, τότε

$S=S_{14}-S_6$, δηλαδή

$$S_{14}=\frac{14}{2}(2\cdot 12+13\cdot 2)=7\cdot 50=350$$

$$S_6=\frac{6}{2}(2\cdot 12+5\cdot 2)=3\cdot 34=102$$

Άρα $S=350-102=248$ είναι το πλήθος των μαθητών του Λυκείου.

ΘΕΜΑ 4 /8170

Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος (α_ν) με λόγο λ για την οποία ισχύουν τα ακόλουθα:

$$\alpha_3 = 4\ ,\ \alpha_5 = 16 \text{ και } \lambda > 0$$

α) Να βρείτε τον πρώτο όρο α_1 και το λόγο λ της προόδου. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία (β_ν), με $(\beta_\nu) = \dfrac{1}{\alpha_\nu}$ αποτελεί επίσης γεωμετρική πρόοδο με λόγο τον αντίστροφο του λόγου της (α_ν). (Μονάδες 9)

γ) Αν S_{10} και S'_{10} είναι τα αθροίσματα των 10 πρώτων όρων των προόδων (α_ν) και (β_ν) αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι ισχύει η σχέση:

$$S'_{10} = \frac{1}{2^9} S_{10}$$ (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4º/8170

ΛΥΣΗ

(α) Ισχύουν: $a_\nu = a_1 \cdot \lambda^{\nu-1}$, άρα $a_5 = 16 \Leftrightarrow a_1 \cdot \lambda^4 = 16$ (1)

$a_3 = 4 \Leftrightarrow a_1 \cdot \lambda^2 = 4$ (2).

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$$\frac{a_1 \cdot \lambda^4}{a_1 \cdot \lambda^2} = \frac{16}{4} \Leftrightarrow \lambda^2 = 4 \Leftrightarrow \lambda = \pm\sqrt{4} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 2 > 0 & \text{ΔΕΚΤΟ} \\ \lambda = -2 < 0 & \text{ΑΠΟΡ.} \end{cases}$$

Για $\lambda = 2$ η (2) γίνεται: $a_1 \cdot 2^2 = 4 \Leftrightarrow a_1 = 1$

(β) Θεωρούμε το λόγο: $\dfrac{\beta_{\nu+1}}{\beta_\nu} = \dfrac{\frac{1}{a_{\nu+1}}}{\frac{1}{a_\nu}} = \dfrac{a_\nu}{a_{\nu+1}} = \dfrac{1}{\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}} = \dfrac{1}{\lambda}$

$\Leftrightarrow \dfrac{\beta_{\nu+1}}{\beta_\nu} = \dfrac{1}{2}$. Επομένως, η (β_ν) είναι γεωμετρική πρόοδος με λόγο $\frac{1}{2}$, δηλαδή αντίστροφο του λόγου της (a_ν).

(γ) Ισχύει: $S_\nu = a_1 \dfrac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1}$, με $\lambda \neq 1$, άρα

$$S_{10} = 1 \cdot \frac{2^{10} - 1}{2 - 1} \Leftrightarrow S_{10} = 2^{10} - 1$$

Για τη (β_ν) έχουμε: $\beta_1 = \frac{1}{1} = 1$, άρα

$$S'_{10} = 1 \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{10} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{\frac{1}{2^{10}} - \frac{2^{10}}{2^{10}}}{-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1 - 2^{10}}{2^{10}}}{-\frac{1}{2}} = \frac{-\frac{(2^{10} - 1)}{2^{10}}}{-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{S_{10}}{2^{10}}}{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{2 S_{10}}{2^{10}} \Leftrightarrow S'_{10} = \frac{1}{2^9} \cdot S_{10}.$$

ΘΕΜΑ 4 /4671

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_ν) με διαφορά ω.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha_{20} - \alpha_{10} = 10\omega$. (Μονάδες 6)

β) Αν $\alpha_{20} - \alpha_{10} = 30$ και $\alpha_1 = 1$, να αποδείξετε ότι $\alpha_\nu = 3\nu - 2$. (Μονάδες 6)

γ) Ποιος είναι ο πρώτος όρος της προόδου που ξεπερνάει το 30; (Μονάδες 7)

δ) Πόσοι όροι της παραπάνω προόδου είναι μικρότεροι του 60; (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4ο/4671

ΛΥΣΗ

(α) Η $(a_ν)$ είναι αριθμητική πρόοδος με διαφορά ω και ισχύει: $a_ν = a_1 + (ν-1)ω$, άρα

$a_{20} = a_1 + 19ω$ και $a_{10} = a_1 + 9ω$, άρα

$a_{20} - a_{10} = a_1 + 19ω - (a_1 + 9ω) = a_1 + 19ω - a_1 - 9ω = 10ω$

(β) Από υπόθεση, έχουμε: $a_{20} - a_{10} = 30$ και από

(α) έχουμε: $a_{20} - a_{10} = 10ω$, άρα $10ω = 30 \Rightarrow ω = 3$

Επίσης, $a_1 = 1$, άρα $a_ν = 1 + (ν-1)3 = 1 + 3ν - 3 \Leftrightarrow$

$a_ν = 3ν - 2$.

(γ) Είναι, $a_ν > 30 \overset{(β)}{\Leftrightarrow} 3ν - 2 > 30 \Leftrightarrow 3ν > 32 \Leftrightarrow ν > \frac{32}{3}$

Όμως, $ν \in \mathbb{N}^*$, άρα $ν = 11$ ο ζητούμενος όρος.

(δ) Είναι, $a_ν < 60 \Leftrightarrow 3ν - 2 < 60 \Leftrightarrow 3ν < 62 \Leftrightarrow ν < \frac{62}{3}$

Όμως, $ν \in \mathbb{N}^*$, άρα $1 \le ν \le 20$

Άρα, οι πρώτοι είκοσι όροι είναι μικρότεροι του 60.

ΘΕΜΑ 4 / 7504

Σε μια αριθμητική πρόοδο $(α_ν)$, ο $3^{ος}$ όρος είναι $α_3 = 8$ και ο $8^{ος}$ όρος είναι $α_8 = 23$.

α) Να αποδείξετε ότι ο $1^{ος}$ όρος της αριθμητικής προόδου είναι $α_1 = 2$ και η διαφορά της $ω = 3$. (Μονάδες 9)

β) Να υπολογίσετε τον $31^ο$ όρο της. (Μονάδες 6)

γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα:

$S = (α_1 + 1) + (α_2 + 2) + (α_3 + 3) + \ldots + (α_{31} + 31)$ (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4º/7504

ΛΥΣΗ

(α) Η (a_ν) είναι αριθμητική πρόοδος, άρα

$a_\nu = a_1 + (\nu-1)\omega$, επομένως

$a_3 = 8 \Leftrightarrow a_1 + 2\omega = 8 \Leftrightarrow a_1 = 8 - 2\omega$ (1)

$a_8 = 23 \Leftrightarrow a_1 + 7\omega = 23 \overset{(1)}{\Longleftrightarrow} 8 - 2\omega + 7\omega = 23 \Leftrightarrow$

$5\omega = 15 \Leftrightarrow \omega = 3$

Για $\omega = 3$ η (1) γίνεται: $a_1 = 8 - 2\cdot 3 \Leftrightarrow a_1 = 2$.

(β) Είναι, $a_{31} = 2 + (31-1)\cdot 3 = 2 + 90 \Leftrightarrow a_{31} = 92$.

(γ) Έστω $S = (a_1+1) + (a_2+2) + (a_3+3) + \dots + (a_{31}+31) =$

$= (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{31}) + (1 + 2 + 3 + \dots + 31)$.

Ισχύει: $S_\nu = \frac{\nu}{2}(a_1 + a_\nu)$, άρα

$S_{31} = \frac{31}{2}(2 + 92) = \frac{31}{2}\cdot 94 = 1457$.

Έστω (β_ν) η αριθμητική πρόοδος με πρώτο όρο $\beta_1 = 1$, διαφορά $\omega = 1$ και $\beta_{31} = 31$, τότε

$S'_{31} = \frac{31}{2}(1 + 31) = \frac{31}{2}\cdot 32 = 496$.

Άρα, $S = S_{31} - S'_{31} = 1457 - 496 = 961$.

ΘΕΜΑ 4 / 8458

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_ν), όπου $\nu \in \mathbb{N}^*$ που αποτελείται από ακέραιους αριθμούς για την οποία ισχύει ότι:

$$\alpha_1 = x\,,\ \ \alpha_2 = 2x^2 - 3x - 4\,,\ \ \alpha_3 = x^2 - 2 \quad \text{όπου } \ x \in \mathbb{R}\,.$$

α) Να αποδειχθεί ότι $x = 3$. (Μονάδες 10)

β) Να βρεθεί ο ν-οστός όρος της προόδου και να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει όρος της προόδου που να ισούται με 2014 . (Μονάδες 8)

γ) Να υπολογιστεί το άθροισμα $S=\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \ldots + \alpha_{15}$. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4º/8458

ΛΥΣΗ

(α) Η $(α_ν)$ είναι αριθμητική πρόοδος, οπότε οι όροι $α_1, α_2, α_3$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου

άρα $α_2 = \frac{α_1 + α_3}{2} \Leftrightarrow 2α_2 = α_1 + α_3 \Leftrightarrow$

$2(2x^2 - 3x - 4) = x + x^2 - 2 \Leftrightarrow 4x^2 - 6x - 8 - x - x^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow$

$3x^2 - 7x - 6 = 0$ Έχουμε, $Δ = (-7)^2 - 4 \cdot 3(-6) = 49 + 72 = 121 > 0$

Οπότε, $x_{1,2} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{121}}{2 \cdot 3} = \frac{7 \pm 11}{6}$

$x_1 = \frac{7+11}{6} = \frac{18}{6} = 3$

$x_2 = \frac{7-11}{6} = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$

• Αν $x_1 = 3$, τότε $α_1 = 3$, $α_2 = 2 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 - 4 = 18 - 13 = 5$

$α_3 = 3^2 - 2 = 7$. Δηλαδή, $α_1, α_2, α_3 \in \mathbb{Z}$ άρα $x = 3$ ΔΕΚΤΟ

• Αν $x = -\frac{2}{3}$, τότε $α_1 = -\frac{2}{3}$, $α_2 = 2\left(-\frac{2}{3}\right)^2 - 3\left(-\frac{2}{3}\right) - 4 =$

$= 2\frac{4}{9} + 2 - 4 = \frac{8}{9} - 2 = \frac{8}{9} - \frac{18}{9} = -\frac{10}{9} \notin \mathbb{Z}$ και

$α_3 = \left(-\frac{2}{3}\right)^2 - 2 = \frac{4}{9} - 2 = \frac{4}{9} - \frac{18}{9} = -\frac{14}{9} \notin \mathbb{Z}$

Άρα, $x = -\frac{2}{3}$ ΑΠΟΡΡΙΠΤΕΤΑΙ

(β) Ισχύει: $α_ν = α_1 + (ν-1)ω$, άρα $α_ν = 3 + (ν-1)2$, αφού

$ω = α_2 - α_1 = α_3 - α_2 = 2$

Έστω υπάρχει όρος της προόδου $(α_ν)$ που ισούται με 2014, δηλαδή

$α_ν = 2014 \Leftrightarrow 3 + (ν-1)2 = 2014 \Leftrightarrow 2(ν-1) = 2011 \Leftrightarrow$

$ν - 1 = \frac{2011}{2} \Leftrightarrow ν = \frac{2011}{2} + 1 \Leftrightarrow ν = \frac{2013}{2} \notin \mathbb{Z}$

Άρα, δεν υπάρχει όρος της προόδου που να ισούται με 2014 (γ) Είναι, $a_{15} = 3 + 14 \cdot 2 \Leftrightarrow a_{15} = 31$, επομένως αρκεί να υπολογίσουμε το άθροισμα:

$S = a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{15} = 3 + 7 + 11 + \cdots + 31$

Έστω η αριθμητική πρόοδος (β_ν) με πρώτο όρο $\beta_1 = 3$, διαφορά $\omega = 7 - 3 = 4$ και $\beta_\nu = 31$.

Έχουμε, $\beta_\nu = 31 \Leftrightarrow 3 + (\nu - 1)4 = 31 \Leftrightarrow 4(\nu - 1) = 28 \Leftrightarrow$
$\nu - 1 = 7 \Leftrightarrow \nu = 8 \in \mathbb{N}^*$, δηλαδή $\beta_8 = 31$.

Ισχύει: $S_\nu = \frac{\nu}{2}\left[2\beta_1 + (\nu - 1)\omega\right]$, άρα

$S = S_8 = \frac{8}{2}\left[2 \cdot 3 + (8 - 1)4\right] = 4(6 + 28) = 136.$

ΘΕΜΑ 4 | 4699

Ένα μυρμήγκι περπατάει πάνω σε ένα ευθύγραμμο κλαδί μήκους *1 m*, με τον ακόλουθο τρόπο:

Ξεκινάει από το ένα άκρο του κλαδιού και το *1ο λεπτό* προχωράει 1 cm, το *2ο λεπτό* προχωράει *3 cm* και, γενικά, κάθε λεπτό διανύει απόσταση *κατά 2 cm* μεγαλύτερη από αυτήν που διήνυσε το προηγούμενο λεπτό.

α) Να δείξετε ότι οι αποστάσεις που διανύει το μυρμήγκι κάθε λεπτό της κίνησής του, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και να βρείτε τον ν-οστό όρο α_ν αυτής της προόδου.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τη συνολική απόσταση που κάλυψε το μυρμήγκι τα πρώτα *5 λεπτά* της κίνησής του. (Μονάδες 4)

γ) Να βρείτε σε πόσα λεπτά το μυρμήγκι θα φτάσει στο άλλο άκρο του κλαδιού.

(Μονάδες 4)

δ) Υποθέτουμε τώρα ότι, την ίδια στιγμή που το μυρμήγκι ξεκινάει την πορεία του, από το άλλο άκρο του κλαδιού μία αράχνη ξεκινάει και αυτή προς την αντίθετη κατεύθυνση και με τον ακόλουθο τρόπο: Το *1ο λεπτό* προχωράει 1 cm, το *2ο λεπτό* προχωράει *2 cm*, το *3ο λεπτό* προχωράει *4 cm* και, γενικά, κάθε λεπτό διανύει απόσταση διπλάσια από αυτήν που διήνυσε το προηγούμενο λεπτό.

(i) Να δείξετε ότι οι αποστάσεις που διανύει η αράχνη κάθε λεπτό της κίνησής της, είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου και να βρείτε τον ν-οστό όρο β_ν αυτής της προόδου. (Μονάδες 7)

(ii) Να βρείτε σε πόσα λεπτά το μυρμήγκι και η αράχνη θα βρεθούν αντιμέτωπα σε απόσταση *1 cm*. (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4º/4629

ΛΥΣΗ

(α) Το μυρμήγκι κάθε λεπτό της κίνησής του διανύει 2cm μεγαλύτερη απόσταση από αυτήν που διήνυσε το προηγούμενο λεπτό, άρα οι αποστάσεις που διανύει το μυρμήγκι κάθε λεπτό της κίνησής του είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου $(α_ν)$ με πρώτο όρο $α_1 = 1$ και διαφορά $ω = 2$.

(β) Ισχύει: $S_ν = \frac{ν}{2}[2α_1 + (ν-1)ω]$, άρα $S_5 = \frac{5}{2}[2\cdot 1 + 4\cdot 2] \Leftrightarrow$ $S_5 = 25$. Άρα, το μυρμήγκι κάλυψε 25cm τα πρώτα 5 λεπτά της κίνησής του.

(γ) Έστω $S_ν = 100 \Leftrightarrow \frac{ν}{2}[2\cdot 1 + (ν-1)\cdot 2] = 100 \Leftrightarrow$

$ν(2 + 2ν - 2) = 200 \Leftrightarrow 2ν^2 = 200 \Leftrightarrow ν^2 = 100 \Leftrightarrow ν = \pm\sqrt{100}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} ν = 10 \in \mathbb{N}^* \text{ ΔΕΚΤΟ} \\ \text{ή} \\ ν = -10 \notin \mathbb{N}^* \text{ ΑΠΟΡ.} \end{cases}$

Επομένως, το μυρμήγκι σε δέκα λεπτά θα φτάσει στο άλλο άκρο του κλαδιού.

(δ)(i) Η αράχνη κάθε λεπτό της κίνησής της διανύει διπλάσια απόσταση από αυτήν που διήνυσε το προηγούμενο λεπτό, άρα οι αποστάσεις που διανύει η αράχνη κάθε λεπτό της κίνησής της είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου $(β_ν)$ με πρώτο όρο $β_1 = 1$

και λόγο $\lambda = 2$.

Ισχύει: $\beta_\nu = \beta_1 \cdot \lambda^{\nu-1}$, άρα $\beta_\nu = 1 \cdot 2^{\nu-1} \Leftrightarrow \beta_\nu = 2^{\nu-1}$.

iii) Έστω $S_\nu = \frac{\nu}{2}\left[2\alpha_1 + (\nu-1)\omega\right]$ η συνολική απόσταση που έχει διανύσει το μυρμήγκι σε ν λεπτά και $S'_\nu = \beta_1 \frac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1}$ η συνολική απόσταση που έχει διανύσει η αράχνη σε ν λεπτά, όπου $\nu \in \mathbb{N}^*$.

Οπότε, για να βρεθεί το μυρμήγκι και η αράχνη αντιμέτωπα σε απόσταση 1 cm, θα πρέπει:

$S_\nu + S'_\nu + 1 = 100 \Leftrightarrow S_\nu + S'_\nu = 99 \Leftrightarrow$

$\frac{\nu}{2}\left[2 \cdot 1 + (\nu-1)2\right] + 1 \cdot \frac{2^\nu - 1}{2-1} = 99 \Leftrightarrow$

$\frac{\nu}{2}(2 + 2\nu - 2) + 2^\nu - 1 = 99 \Leftrightarrow \frac{\nu}{2} \cdot 2\nu + 2^\nu = 100 \Leftrightarrow$

$\nu^2 + 2^\nu = 100 \quad (1)$

Παρατηρούμε ότι για $\nu = 6$ η (1) γίνεται αληθής.

Άρα, μετά από 6 λεπτά το μυρμήγκι και η αράχνη θα βρεθούν αντιμέτωπα σε απόσταση 1 cm.

ΘΕΜΑ 4 /9047

Ένας μελισσοκόμος έχει τοποθετήσει 20 κυψέλες σε μια ευθεία η οποία διέρχεται από την αποθήκη του Α. Η πρώτη κυψέλη απέχει 1 μέτρο από την αποθήκη Α, η δεύτερη 4 μέτρα από το Α, η τρίτη 7 μέτρα από το Α και γενικά κάθε επόμενη κυψέλη απέχει από την αποθήκη Α, 3 επιπλέον μέτρα, σε σχέση με την προηγούμενη κυψέλη.

α) Να δείξετε ότι οι αποστάσεις των κυψελών από την αποθήκη Α αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου και να βρείτε το ν^{o} όρο αυτής της προόδου. Τι εκφράζει ο πρώτος όρος της αριθμητικής προόδου και τι η διαφορά της; (Μονάδες 6)

β) Σε πόση απόσταση από την αποθήκη Α είναι η 20^{η} κυψέλη; (Μονάδες 6)

γ) Ο μελισσοκόμος ξεκινώντας από την αποθήκη Α συλλέγει το μέλι, από μία κυψέλη κάθε φορά, και το μεταφέρει πάλι πίσω στην αποθήκη Α.

i) Ποια είναι απόσταση που θα διανύσει ο μελισσοκόμος για να συλλέξει το μέλι από την 3^{η} κυψέλη; (Μονάδες 6)

ii) Ποια είναι η συνολική απόσταση που θα διανύσει ο μελισσοκόμος για να συλλέξει το μέλι και από τις 20 κυψέλες; (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4ο/2047

ΛΥΣΗ

(α) Οι αποστάσεις των κυψελών από την αποθήκη Α αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου αφού κάθε κυψέλη απέχει από την αποθήκη Α, 3 επιπλέον μέτρα, σε σχέση με την προηγούμενη κυψέλη.

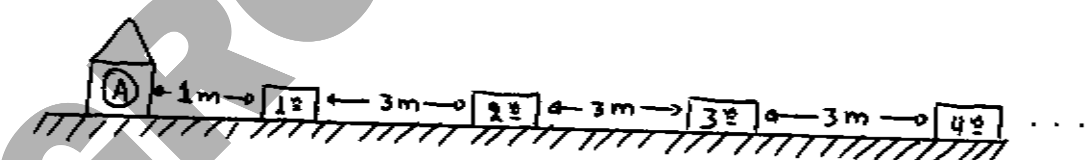
Επίσης, ο πρώτος όρος είναι ίσος με $a_1 = 1$, διαφορά $\omega = 3$ και $\nu = 20$.

Ισχύει: $a_\nu = a_1 + (\nu - 1)\omega$, άρα $a_{20} = 1 + (20-1)\cdot 3 \Leftrightarrow a_{20} = 58$.

Ο πρώτος όρος $a_1 = 1$ εκφράζει την απόσταση της κυψέλης σε μέτρα από την αποθήκη Α και η διαφορά $\omega = 3$ εκφράζει την απόσταση της κάθε κυψέλης από την προηγούμενη.

(β) Από (α) έχουμε $a_{20} = 58$, άρα η 20η κυψέλη απέχει 58 μέτρα από την αποθήκη Α.

(γ)



(i) Η απόσταση που θα διανύσει ο μελισσοκόμος από την αποθήκη Α στην 3η κυψέλη θα είναι ίση με a_3 και στη συνέχεια θα χρειαστεί να επιστρέψει στην αποθήκη Α.

Άρα, η συνολική απόσταση S που θα διανύσει ο μελισσοκόμος είναι $S = 2a_3$.

Επίσης, $a_\nu = a_1 + (\nu - 1)\omega$, άρα $a_3 = 1 + 2\cdot 3 \Leftrightarrow a_3 = 7$

Επομένως, $S = 2a_3 = 2\cdot 7 \Leftrightarrow S = 14$ μέτρα.

(ii) Η απόσταση που θα διανύσει ο μελισσοκόμος για να συλλέξει το μέλι και από τις 20 κυψέλες είναι ίση με $S' = (a_1 + a_1) + (a_2 + a_2) + \dots + (a_{19} + a_{19}) + (a_{20} + a_{20}) =$

$= 2a_1 + 2a_2 + \dots + 2a_{19} + 2a_{20} = 2(a_1 + a_2 + \dots + a_{19} + a_{20}) \Leftrightarrow$

$S' = 2S_{20}$.

Ισχύει: $S_\nu = \frac{\nu}{2}[2a_1 + (\nu-1)\omega]$, άρα $S_{20} = \frac{20}{2}[2\cdot 1 + 19\cdot 3]$

$= 10\cdot 59 \Leftrightarrow S_{20} = 590$.

Επομένως, $S' = 2\cdot S_{20} = 2\cdot 590 \Leftrightarrow S' = 1180$ μέτρα

ΘΕΜΑ 4 / 4858

Μια περιβαλλοντική οργάνωση ξεκινά να καταγράφει τον πληθυσμό των ελαφιών σε μια δασική περιοχή από το 2000 όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

Έτος	2000	2001	2002	2003	2004
Αριθμός ελαφιών	1300	1360	1420	1480	1540

Αν ο πληθυσμός των ελαφιών συνεχίσει να αυξάνεται με τον ίδιο σταθερό ρυθμό και μετά το 2004:

α) Να βρείτε μια σχέση που να επιτρέπει τον υπολογισμό του πληθυσμού των ελαφιών στο τέλος κάθε έτος από το 2000 και μετά. (Μονάδες 6)

β) Με τη βοήθεια της σχέσης αυτής:

i) Να προσδιορίσετε τον πληθυσμό των ελαφιών στο τέλος του 2012. (Μονάδες 6)

ii) Να προβλέψετε το έτος στο τέλος του οποίου ο αρχικός πληθυσμός των 1300 ελαφιών θα αυξηθεί κατά 60%. (Μονάδες 6)

iii) Να προβλέψετε το έτος που ο πληθυσμός των ελαφιών δε θα υπερβεί τα 2600 ελάφια. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4º/4858

ΛΥΣΗ

(α) Παρατηρούμε ότι ο πληθυσμός των ελαφιών αυξάνεται με τον ίδιο ρυθμό κάθε έτος, άρα η παραπάνω ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος.

Έστω (α_ν) η αριθμητική πρόοδος με πρώτο όρο $\alpha_1 = 1300$ ελάφια στο τέλος του έτους 2000 και διαφορά $\omega = 60$. Άρα, $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\omega$

(β)(i) Ο πληθυσμός των ελαφιών στο τέλος του 2012 είναι ίσος με α_{13}, δηλαδή

$\alpha_{13} = 1300 + (13-1)\cdot 60 = 1300 + 12\cdot 60 \Leftrightarrow \alpha_{13} = 2020$

(ii) Ο αρχικός πληθυσμός των 1300 ελαφιών αυξημένος κατά 60% θα είναι $1300 \cdot 1,6 = 2080$.

Έχουμε, $\alpha_\nu = 2080 \Leftrightarrow 1300 + (\nu-1)60 = 2080 \Leftrightarrow$

$(\nu-1)60 = 780 \Leftrightarrow \nu - 1 = 13 \Leftrightarrow \nu = 14 \in \mathbb{N}^*$.

Άρα, στο τέλος του 2013

(iii) Πρέπει $\alpha_\nu < 2600 \Leftrightarrow 1300 + (\nu-1)60 < 2600 \Leftrightarrow$

$(\nu-1)60 < 1300 \Leftrightarrow \nu - 1 < \frac{1300}{60} \Leftrightarrow \nu < \frac{65}{3} + 1 = \frac{3\cdot 21 + 2}{3} + 1 \Leftrightarrow$

$\nu < 21 + \frac{2}{3} + 1 = 22 + \frac{2}{3}$, δηλαδή $\nu = 22$

Άρα, το έτος 2021 ο πληθυσμός των ελαφιών δε θα υπερβεί τα 2600 ελάφια

ΘΕΜΑ 4 /10775

Σε μια αίθουσα θεάτρου με 20 σειρές καθισμάτων, το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς αυξάνει καθώς ανεβαίνουμε από σειρά σε σειρά, κατά τον ίδιο πάντα αριθμό καθισμάτων. Η $1^η$ σειρά έχει 16 καθίσματα και η $7^η$ σειρά έχει 28 καθίσματα.

α) Να δείξετε ότι οι αριθμοί που εκφράζουν το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Να βρείτε τον πρώτο όρο της και τη διαφορά αυτής της προόδου. (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε το γενικό όρο της προόδου. (Μονάδες 4)

γ) Πόσα καθίσματα έχει όλο το θέατρο; (Μονάδες 5)

δ) Αν στην $1^η$ σειρά της αίθουσας αυτής υπάρχουν 6 κενά καθίσματα, στη $2^η$ υπάρχουν 9 κενά καθίσματα, στην $3^η$ υπάρχουν 12 κενά καθίσματα και γενικά, τα κενά καθίσματα κάθε σειράς, από τη $2^η$ και μετά, είναι κατά 3 περισσότερα από αυτά της προηγούμενης, τότε:

i) Να βρείτε από ποια σειρά και πέρα θα υπάρχουν μόνο κενά καθίσματα. (Μονάδες 5)

ii) Να βρείτε πόσοι είναι οι θεατές. (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4º/10775

ΛΥΣΗ

(α) Παρατηρούμε ότι το πλήθος καθισμάτων κάθε σειράς αυξάνει καθώς ανεβαίνουμε από σειρά σε σειρά κατά τον ίδιο πάντα αριθμό.

Έστω (a_ν) η αριθμητική πρόοδος με $\nu=20$, $a_1=16$ και $a_7=28$.

Ισχύει: $a_\nu=a_1+(\nu-1)\omega$, άρα $a_7=28 \Leftrightarrow 16+6\omega=28 \Leftrightarrow$ $6\omega=12 \Leftrightarrow \omega=2$

(β) Έχουμε, $a_\nu=16+(\nu-1)2$

(γ) Ισχύει: $S_\nu=\frac{\nu}{2}[2a_1+(\nu-1)\omega]$, άρα

$$S_{20}=\frac{20}{2}\left[2\cdot 16+(20-1)\cdot 2\right]=10(32+38) \Leftrightarrow S_{20}=700$$

Άρα, το θέατρο έχει συνολικά 700 καθίσματα.

(δ) Παρατηρούμε ότι το πλήθος των κενών καθισμάτων κάθε σειράς αυξάνει καθώς ανεβαίνουμε από σειρά σε σειρά κατά τον ίδιο πάντα αριθμό.

Έστω (β_ν) η αριθμητική πρόοδος με $\beta_1=6$, $\omega=3$ οπότε $\beta_\nu=6+(\nu-1)3$.

(i) Θα πρέπει: $\beta_\nu \geq a_\nu \Leftrightarrow 6+(\nu-1)3 \geq 16+(\nu-1)2 \Leftrightarrow$

$6+3\nu-3 \geq 16+2\nu-2 \Leftrightarrow 3\nu-2\nu \geq 16-2+3-6 \Leftrightarrow \nu \geq 11$

Οπότε, από την ενδέκατη σειρά και πέρα θα υπάρχουν μόνο κενά καθίσματα.

(ii) Επομένως, οι θεατές θα βρίσκονται από την πρώτη έως και τη δέκατη σειρά.

Έστω S_{10} το άθροισμα των θεατών που βρίσκονται από την πρώτη έως και τη δέκατη σειρά, και

S'_{10} το άθροισμα των κενών καθισμάτων από την πρώτη έως και τη δέκατη σειρά.

Αν S το ζητούμενο πλήθος των θεατών, τότε

$$S = S_{10} - S'_{10} = \frac{10}{2}\left[2\cdot 16 + (10-1)2\right] - \frac{10}{2}\left[2\cdot 6 + (10-1)\cdot 3\right] =$$

$$= 5(32+18) - 5(12+27) = 250 - 195 = 55$$

Άρα, οι θεατές είναι 55

ΘΕΜΑ 4 /22340

Μια οικογένεια, προκειμένου να χρηματοδοτήσει τις σπουδές του παιδιού της, έχει να επιλέξει μεταξύ δυο προγραμμάτων που της προτείνονται:

Για το πρόγραμμα *Α* πρέπει να καταθέσει τον *1*^{ο} μήνα *1 ευρώ*, το 2^{ο} μήνα *2 ευρώ*, τον 3^{ο} μήνα *4 ευρώ* και γενικά, κάθε μήνα που περνάει, πρέπει να καταθέτει ποσό διπλάσιο από αυτό που κατέθεσε τον προηγούμενο μήνα.

Για το πρόγραμμα *Β* πρέπει να καταθέσει τον *1*^{ο} μήνα *100 ευρώ*, το 2^{ο} μήνα *110 ευρώ*, τον 3^{ο} μήνα *120 ευρώ* και γενικά, κάθε μήνα που περνάει πρέπει να καταθέτει ποσό κατά *10 ευρώ* μεγαλύτερο από εκείνο που κατέθεσε τον προηγούμενο μήνα.

α) i) Να βρείτε το ποσό α_ν που πρέπει να κατατεθεί στο λογαριασμό το $\nu^{ο}$ μήνα σύμφωνα με το πρόγραμμα *Α*. (Μονάδες 4)

ii) Να βρείτε το ποσό β_ν που πρέπει να κατατεθεί στο λογαριασμό το $\nu^{ο}$ μήνα σύμφωνα με το πρόγραμμα Β. (Μονάδες 4)

iii) Να βρείτε το ποσό A_ν που θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά από ν μήνες σύμφωνα με το πρόγραμμα *Α*. (Μονάδες 5)

iv) Να βρείτε το ποσό B_ν που θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά από ν μήνες σύμφωνα με το πρόγραμμα *Β*. (Μονάδες 5)

β) i) Τι ποσό θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά τους πρώτους *6* μήνες, σύμφωνα με κάθε πρόγραμμα; (Μονάδες 3)

ii) Αν κάθε πρόγραμμα ολοκληρώνεται σε *12* μήνες, με ποιο από τα δύο προγράμματα το συνολικό ποσό που θα συγκεντρωθεί θα είναι μεγαλύτερο; (Μονάδες 4)

ΘΕΜΑ 4º/ 2340

ΛΥΣΗ

(α) Παρατηρούμε ότι το χρηματικό ποσό που πρέπει να καταθέτει η οικογένεια κάθε μήνα ακολουθεί γεωμετρική πρόοδο, έστω α_ν, με $\alpha_1 = 1$ και $\lambda = 2$ για το πρόγραμμα Α. Ενώ, το ποσό για το πρόγραμμα Β ακολουθεί αριθμητική πρόοδο, έστω β_ν, με $\beta_1 = 100$ και $\omega = 10$

(i) Ισχύει: $\alpha_\nu = \alpha_1 \cdot \lambda^{\nu-1}$, άρα $\alpha_\nu = 1 \cdot 2^{\nu-1} \Leftrightarrow \alpha_\nu = 2^{\nu-1}$

(ii) Ισχύει: $\beta_\nu = \beta_1 + (\nu-1)\omega$, άρα $\beta_\nu = 100 + (\nu-1)10 = 100 + 10\nu - 10$
$\Leftrightarrow \beta_\nu = 10\nu + 90$

(iii) Ισχύει: $S_\nu = \alpha_1 \cdot \dfrac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1}$, με $\lambda \neq 1$, άρα $S_\nu = A_\nu = 1 \cdot \dfrac{2^\nu - 1}{2-1} \Leftrightarrow$
$A_\nu = 2^\nu - 1$

(iv) Ισχύει: $S_\nu = \dfrac{\nu}{2}\left[2\beta_1 + (\nu-1)\omega\right]$, άρα $S_\nu = B_\nu = \dfrac{\nu}{2}\left[2 \cdot 100 + (\nu-1)10\right]$
$= \dfrac{\nu}{2}(200 + 10\nu - 10) \Leftrightarrow B_\nu = \dfrac{\nu}{2}(190 + 10\nu)$

(β) (i) Έχουμε, $A_6 = 2^6 - 1 = 64 - 1 \Leftrightarrow A_6 = 63$ ευρώ

$B_6 = \dfrac{6}{2}(190 + 10 \cdot 6) = 3 \cdot 250 = 750$ ευρώ

Αν η οικογένεια αποφασίσει να επιλέξει το πρόγραμμα Α, τότε μετά τους πρώτους 6 μήνες θα έχει δώσει 63 ευρώ, ενώ αν επιλέξει το πρόγραμμα Β τότε μετά τους πρώτους 6 μήνες θα έχει δώσει 750 ευρώ.

(ii) Έχουμε, $A_{12} = 2^{12} - 1 = 4096$ ευρώ

$B_{12} = \dfrac{12}{2}(190 + 10 \cdot 12) = 6 \cdot 310 = 1860$ ευρώ

Οπότε, στο τέλος των 12 μηνών αν η οικογένεια επιλέξει το πρόγραμμα Α θα έχει δώσει περισσότερα χρήματα.

ΘΕΜΑ 4 /4995

Σε αριθμητική πρόοδο είναι $\alpha_2 = \kappa^2$ και $\alpha_3 = (\kappa+1)^2$, κ ακέραιος με $\kappa>1$.

α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά ω της προόδου είναι αριθμός περιττός.

(Μονάδες 8)

β) Αν επιπλέον ο πρώτος όρος της είναι $\alpha_1=2$, τότε:

i) Να βρείτε τον αριθμό κ και να αποδείξετε ότι $\omega=7$. (Μονάδες 8)

ii) Να εξετάσετε αν ο αριθμός 1017 είναι όρος της προόδου. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4ο / 4925

ΛΥΣΗ

(α) Η $(a_ν)$ είναι αριθμητική πρόοδος, οπότε

$ω = a_3 - a_2 = (κ+1)^2 - κ^2 = κ^2 + 2κ + 1 - κ^2 = 2κ + 1$

Άρα, $ω = 2κ+1$, με $κ \in \mathbb{Z}$ και $κ > 1$

(β)(i) Επίσης, $a_2 - a_1 = ω$, άρα $κ^2 - 2 = 2κ + 1 \Leftrightarrow$

$κ^2 - 2κ - 3 = 0 \Leftrightarrow (κ-3)(κ+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} κ - 3 = 0 \\ ή \\ κ + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} κ = 3 & \text{Δεκτό} \\ ή & \\ κ = -1 & \text{ΑΠΟΡ, διότι } κ \in \mathbb{Z} \text{ και } κ > 1 \end{cases}$

Αφού $κ = 3$, τότε $a_2 = 3^2 = 9$ και $a_1 = 2$, άρα

$ω = a_2 - a_1 = 9 - 2 = 7$

(ii) Ισχύει: $a_ν = a_1 + (ν-1)ω$. Έστω υπάρχει $ν \in \mathbb{N}^*$ τέτοιο ώστε $a_ν = 1017 \Leftrightarrow 2 + (ν-1)7 = 1017 \Leftrightarrow 7(ν-1) = 1015$

$\Leftrightarrow ν - 1 = 145 \Leftrightarrow ν = 146 \in \mathbb{N}^*$.

Άρα, ο αριθμός 1017 είναι όρος της προόδου με $a_{146} = 1017$

4/9323

ΘΕΜΑ 4

Ο Διονύσης γράφει στο τετράδιό του τους αριθμούς 3, 7, 11, 15,... και συνεχίζει προσθέτοντας κάθε φορά το 4. Σταματάει όταν έχει γράψει τους 40 πρώτους από τους αριθμούς αυτούς.

α) Είναι οι παραπάνω αριθμοί διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 4)

β) Να βρείτε το άθροισμα των 40 αυτών αριθμών. (Μονάδες 7)

γ) Είναι ο αριθμός 120 ένας από αυτούς τους 40 αριθμούς; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

δ) Ο Γιώργος πήρε το τετράδιο του Διονύση και συνέχισε να γράφει διαδοχικούς όρους της ίδιας αριθμητικής προόδου, από εκεί που είχε σταματήσει ο Διονύσης μέχρι να εμφανιστεί ο αριθμός 235. Να βρείτε το άθροισμα των αριθμών που έγραψε ο Γιώργος.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4ο / 2323

ΛΥΣΗ

(α) Ναι, διότι κάθε όρος προκύπτει από τον προηγούμενό του προσθέτοντας πάντα τον ίδιο σταθερό αριθμό.

(β) Έστω (a_ν) η αριθμητική πρόοδος με πρώτο όρο $a_1 = 3$ και διαφορά $\omega = 7-3 \Leftrightarrow \omega = 4$

Ισχύει: $S_\nu = \frac{\nu}{2}[2a_1 + (\nu-1)\omega]$, άρα

$S_{40} = \frac{40}{2}[2\cdot 3 + (40-1)\cdot 4] = 20(6+39\cdot 4) \Leftrightarrow S_{40} = 3240$

(γ) Έστω $a_\nu = 120$. Ισχύει: $a_\nu = a_1 + (\nu-1)\omega$, άρα

$120 = 3 + (\nu-1)4 \Leftrightarrow 4\nu - 4 = 117 \Leftrightarrow 4\nu = 121 \Leftrightarrow$

$\nu = \frac{121}{4} \notin \mathbb{N}^*$, άρα ο 120 δεν μπορεί να είναι κάποιος όρος της αριθμητικής προόδου (a_ν).

(δ) Έστω $a_\nu = 235$. Ισχύει: $a_\nu = a_1 + (\nu-1)\omega$, άρα

$235 = 3 + (\nu-1)\cdot 4 \Leftrightarrow 4\nu - 4 = 232 \Leftrightarrow 4\nu = 236 \Leftrightarrow \nu = 59 \in \mathbb{N}^*$.

Οπότε, $a_{59} = 235$.

Έστω S το ζητούμενο άθροισμα, τότε

$S_{40} + S = S_{59} \Leftrightarrow S = S_{59} - S_{40}$

Έχουμε, $S_{59} = \frac{59}{2}[2\cdot 3 + (59-1)\cdot 4] = \frac{59}{2}\cdot 238 \Leftrightarrow S_{59} = 7021$

Άρα, $S = 7021 - 3240 \Leftrightarrow S = 3781$