ΘΕΜΑ 2 / 22515.pdf ΕΛΛΕΙΨΗ + ΥΠΕΡΒΟΛΗ

Μια έλλειψη $C_1$ έχει εκκεντρότητα ίση με $\frac{4}{5}$ και τις ίδιες εστίες με την υπερβολή

$C_2 : \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$

α) Να αποδείξετε ότι $C_1 : \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

(Μονάδες 15)

β) Να παραστήσετε γραφικά την έλλειψη $C_1$ και την υπερβολή $C_2$ σε καρτεσιανό επίπεδο $Oxy$

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2 - 22515

ΛΥΣΗ

(α) Η υπερβολή $C_2$ έχει $\alpha^2=4 \Leftrightarrow \alpha=2$, $\beta^2=12 \Leftrightarrow \beta=\sqrt{12}$

$\gamma=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=\sqrt{4+12}=\sqrt{16}=4$, άρα εστίες $E'(-4,0)$, $E(4,0)$

(η μορφή της εξίσωσης της υπερβολής λέει ότι $E', E \in x'x$)

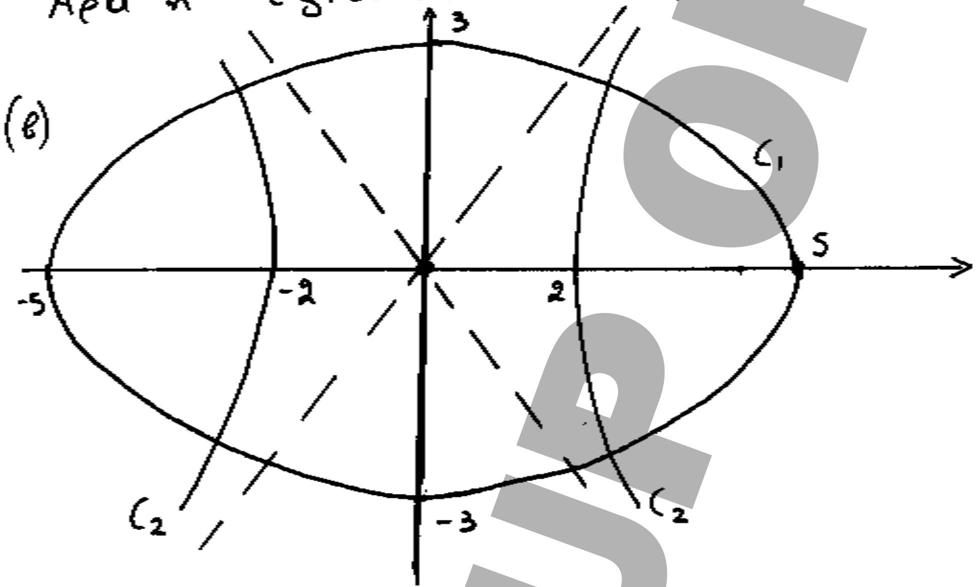
Η έλλειψη $C_1$ έχει εστίες $E'(-4,0)$, $E(4,0)$, $\gamma=4$

και εκκεντρότητα $\varepsilon=\frac{4}{5} \Leftrightarrow \frac{\gamma}{\alpha}=\frac{4}{5} \Leftrightarrow \frac{4}{\alpha}=\frac{4}{5} \Leftrightarrow \alpha=5$

επίσης: $\beta=\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}=\sqrt{5^2-4^2}=\sqrt{25-16}=\sqrt{9}=3$

Άρα η εξίσωση της έλλειψης είναι $C_1: \frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{3^2}=1$

(β)



ΘΕΜΑ 4 / 22591.pdf ΥΠΕΡΒΟΛΗ + ΚΥΚΛΟΣ

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της υπερβολής που τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $A'(-2, 0)$, $A(2, 0)$ και διέρχεται από το σημείο $\Gamma(2\sqrt{5}, 2)$ είναι η $C_1 : \frac{x^2}{4} - y^2 = 1$

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου $C_2$ με διάμετρο το τμήμα $A'A$.

(Μονάδες 5)

γ) Να αποδείξετε ότι οι μοναδικές κοινές εφαπτόμενες της υπερβολής $C_1$ και του κύκλου $C_2$ είναι οι ευθείες $\varepsilon_1 : x = -2$ και $\varepsilon_2 : x = 2$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4 - 22591

ΛΥΣΗ

(α) Η εξίσωση της υπερβολής με άξονα των x την ευθεία E'E και άξονα των y τη μεσοκάθετη του E'E είναι $C_1: \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ με $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$

Αφού $A(2,0) \in x'x$, τότε $\alpha = 2$

$\Gamma(2\sqrt{5}, 2) \in C_1 \Leftrightarrow \frac{(2\sqrt{5})^2}{2^2} - \frac{2^2}{\beta^2} = 1 \Leftrightarrow 5 - \frac{4}{\beta^2} = 1 \Leftrightarrow 4 = \frac{4}{\beta^2} \Leftrightarrow$

$\beta^2 = 1 \overset{\beta>0}{\Longleftrightarrow} \beta = 1$

Άρα $C_1: \frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{1^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4} - y^2 = 1$

(β) Είναι $A'(-2,0)$ και $A(2,0)$ και $AA'$ διάμετρος

Το κέντρο του κύκλου είναι το σημείο $O(0,0)$

και η ακτίνα του ισούται με $(OA) = \rho = 2$

Άρα ο κύκλος έχει εξίσωση $C_2: x^2 + y^2 = 2^2$

(γ) Έστω ε κοινή εφαπτομένη της $C_1$ και του $C_2$ και έστω $M(x_1, y_1)$ το σημείο επαφής. Έχουμε ότι:

- $M \in C_1 \Leftrightarrow \frac{x_1^2}{4} - y_1^2 = 1 \Leftrightarrow x_1^2 - 4y_1^2 = 4$ (1)
- Η ε, ως εφαπτομένη της $C_1$ στο M έχει εξίσωση

$\varepsilon: \frac{x x_1}{4} - y y_1 = 1 \Leftrightarrow x_1 x - 4y_1 y - 4 = 0$

- Η ε εφάπτεται του $C_2$, αν και μόνο αν:

$d(O(0,0), \varepsilon) = \rho \Leftrightarrow \frac{|0 - 0 - 4|}{\sqrt{x_1^2 + (-4y_1)^2}} = 2 \Leftrightarrow 4 = 2\sqrt{x_1^2 + 16y_1^2} \Leftrightarrow$

$2 = \sqrt{x_1^2 + 16y_1^2} \Leftrightarrow x_1^2 + 16y_1^2 = 4$ (2)

Από (1), (2) έχουμε:

$\begin{cases} x_1^2 - 4y_1^2 = 4 \\ x_1^2 + 16y_1^2 = 4 \end{cases} \ldots (x_1, y_1) = (2,0)$ ή $(-2,0)$

Άρα έχουμε δύο εφαπτομένες (κοινές)

την $\varepsilon_1: x = -2$ στο σημείο $M_1(2,0)$ και

την $\varepsilon_2: x = 2$ στο σημείο $M_2(2,0)$