ΘΕΜΑ 2 / 22507.pdf ΚΥΚΛΟΣ

Δίνεται η εξίσωση : $x^2+y^2+10y+16=0 \quad (1)$

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο το σημείο $K(0,-5)$ και ακτίνα $\rho=3$.

(Μονάδες 12)

β) Από τις ευθείες που διέρχονται από την αρχή των αξόνων να προσδιορίσετε εκείνες που εφάπτονται του παραπάνω κύκλου.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2 - 22507

ΛΥΣΗ

(α) (1): $x^2+y^2+10y+16=0 \Leftrightarrow x^2+y^2+2\cdot y\cdot 5+5^2=-16+5^2 \Leftrightarrow$

$x^2+(y+5)^2=9=3^2$

Άρα η (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(0,-5)$ και ακτίνα $\rho=3$.

(β) Από το σημείο $O(0,0)$ διέρχονται οι εξής ευθείες

- Η ευθεία $x=0$, ο άξονας $y'y$, στην οποία δεν ορίζεται κλίση. Η $x=0$ δεν είναι κατακόρυφη εφαπτομένη του κύκλου, αφού οι κατακόρυφες εφαπτόμενες του κύκλου είναι οι ευθείες με εξισώσεις: $x=-3$ και $x=3$
- Οι ευθείες ε, στις οποίες ορίζεται κλίση λ και έχουν μορφή $\varepsilon: y=\lambda x \Leftrightarrow \lambda x-y=0$

Η ε εφάπτεται του κύκλου (1), αν και μόνο αν:

$$d(K,\varepsilon)=\rho \Leftrightarrow \frac{|\lambda\cdot 0-(-5)|}{\sqrt{\lambda^2+(-1)^2}}=3 \Leftrightarrow 5=3\sqrt{\lambda^2+1} \Leftrightarrow 5^2=\left(3\sqrt{\lambda^2+1}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$25=9(\lambda^2+1) \Leftrightarrow 25=9\lambda^2+9 \Leftrightarrow 9\lambda^2=16 \Leftrightarrow \lambda^2=\frac{16}{9} \Leftrightarrow$$

$$\lambda=\pm\sqrt{\frac{16}{9}}=\pm\frac{4}{3}$$

Για $\lambda=-\frac{4}{3}$ έχουμε την ευθεία $\varepsilon_1: y=-\frac{4}{3}x$

Για $\lambda=\frac{4}{3}$ έχουμε την ευθεία $\varepsilon_2: y=\frac{4}{3}x$

ΘΕΜΑ 2 / 22508.pdf ΚΥΚΛΟΣ

Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε κύκλο C που διέρχεται από το σημείο $A(3,10)$ και έχει κέντρο το $K(4,8)$.

α) Να αποδείξετε ότι $C:(x-4)^2+(y-8)^2=5$, και έπειτα να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από τα σημεία O και K.

(Μονάδες 13)

β) Από τα σημεία του κύκλου C να βρείτε τις συντεταγμένες:

i) του σημείου που απέχει τη μικρότερη απόσταση από την αρχή των αξόνων.

(Μονάδες 6)

ii) του σημείου που απέχει τη μεγαλύτερη απόσταση από την αρχή των αξόνων.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 2 - 22508

ΛΥΣΗ

(α) Ο κύκλος έχει ακτίνα:

$\rho = (KA) = \sqrt{(4-3)^2 + (8-10)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

αφού το κέντρο του είναι το σημείο $K(4,8)$, τότε η εξίσωσή του είναι $C: (x-4)^2 + (y-8)^2 = (\sqrt{5})^2 = 5$

Επίσης

$\lambda_{OK} = \dfrac{8-0}{4-0} = \dfrac{8}{4} = 2$, άρα $OK: y = 2x$

(β) Τα κοινά σημεία της ευθείας OK και του κύκλου έχουν συντεταγμένες τη λύση του συστήματος

$$\begin{cases} (x-4)^2 + (y-8)^2 = 5 \\ y = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-4)^2 + (2x-8)^2 = 5 \\ y = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-4)^2 + [2(x-4)]^2 = 5 \\ y = 2x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (x-4)^2 + 4(x-4)^2 = 5 \\ y = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5(x-4)^2 = 5 \\ y = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-4)^2 = 1 \\ y = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x-4 = -1 \\ \text{ή} \\ x-4 = 1 \end{cases} \\ \text{και} \\ y = 2x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \begin{cases} x = 3 \\ \text{ή} \\ x = 5 \end{cases} \\ \text{και} \\ y = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \text{ και } y = 6 \\ \text{ή} \\ x = 5 \text{ και } y = 10 \end{cases}$$

Άρα $M(3,6)$ και $N(5,10)$ είναι τα κοινά σημεία του κύκλου C και της ευθείας ε.

(i) Το σημείο του κύκλου, που απέχει τη μικρότερη απόσταση από το $O(0,0)$ είναι το $M(3,6)$

ii) Το σημείο του κύκλου, που απέχει τη μεγαλύτερη απόσταση από το $O(0,0)$ είναι το $N(5,10)$

ΘΕΜΑ 2 / 22534.pdf ΚΥΚΛΟΣ

Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε τα σημεία $K(2, -1)$ και $A(-6, 5)$.

α) Να αποδείξετε ότι ο κύκλος με κέντρο K που διέρχεται από το A, έχει εξίσωση

$$C : (x-2)^2 + (y+1)^2 = 100$$

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε την εξίσωση κύκλου που εφάπτεται εσωτερικά στον κύκλο C στο σημείο A και έχει ακτίνα ίση με το μισό της ακτίνας του C.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2 - 22534

ΛΥΣΗ

(α) ο κύκλος έχει ακτίνα

$\rho = (KA) = \sqrt{(2+6)^2 + (-1-5)^2} = \sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10.$

Αφού έχει κέντρο το σημείο $K(2,-1)$, τότε έχει εξίσωση

$C: (x-2)^2 + (y+1)^2 = 10^2 = 100$

(β) Έστω C_1 ο ζητούμενος κύκλος με κέντρο K_1 και ακτίνα ρ_1.

Στο σημείο Α φέρουμε την κοινή εφαπτομένη των δύο κύκλων, έστω ε.

Ισχύουν ότι $AK \perp \varepsilon$, $AK_1 \perp \varepsilon$, A, K_1, K είναι συνευθειακά.

Αφού $\rho_1 = \frac{10}{2} = 5$, τότε το τμήμα ΑΚ είναι διάμετρος του κύκλου C_1 και το K_1 είναι το μέσο του τμήματος ΑΚ, οπότε

$K_1\left(\frac{2-6}{2}, \frac{-1+5}{2}\right)$ ή $K_1(-2, 2)$

Άρα $C_1: (x+2)^2 + (y-2)^2 = 5^2$

ΘΕΜΑ 2 / 22536.pdf ΚΥΚΛΟΣ

Σε καρτεσιανό επίπεδο Οxy θεωρούμε τα σημεία $A(1, 0)$, $B(3, -2)$ και την ευθεία $\varepsilon: x+y+1=0$.

Να βρείτε:

α) Την εξίσωση της μεσοκάθετης του τμήματος AB.

(Μονάδες 10)

β) Την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία A, B και έχει το κέντρο του στην ευθεία ε.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2-22536

ΛΥΣΗ

(α) Το τμήμα ΑΒ έχει ως μέσο το σημείο

$M\left(\frac{1+3}{2}, \frac{0-2}{2}\right)$ ή $M(2,-1)$

Η ευθεία ΑΒ έχει κλίση $\lambda_{AB} = \frac{-2-0}{3-1} = \frac{-2}{2} = -1$

Αν ξ είναι η μεσοκάθετη του ΑΒ, τότε:

$\xi \perp AB \Leftrightarrow \lambda_{\xi} \cdot \lambda_{AB} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{\xi} \cdot (-1) = -1 \Leftrightarrow \lambda_{\xi} = 1$

Η ξ έχει κλίση 1 και διέρχεται από το σημείο $M(2,-1)$,

άρα έχει εξίσωση

$\xi: y+1 = 1(x-2) \Leftrightarrow y+1 = x-2 \Leftrightarrow y = x-3$

(β) Αφού ο κύκλος διέρχεται από τα Α, Β, τότε η ΑΒ είναι χορδή του, οπότε το κέντρο του είναι σημείο της μεσοκάθετης της ΑΒ, δηλαδή είναι σημείο της ευθείας $\xi: y = x-3$

Επίσης το κέντρο είναι σημείο της ευθείας $\varepsilon: x+y+1=0$, οπότε οι συντεταγμένες του κέντρου είναι η λύση του συστήματος

$\begin{cases} y = x-3 \\ x+y+1=0 \end{cases} \quad \ldots \quad (x,y) = (1,-2)$

Άρα $K(1,-2)$ είναι το κέντρο του κύκλου.

Αν ρ είναι η ακτίνα, τότε

$\rho = (AK) = \sqrt{(1-1)^2 + (0+2)^2} = 2$

Άρα $C: (x-1)^2 + (y+2)^2 = 2^2$ είναι η εξίσωση του κύκλου.

ΘΕΜΑ 4 / 22557.pdf ΚΥΚΛΟΣ

Έστω η εξίσωση: $(x-\lambda+6)^2+(y-2\lambda)^2=-\lambda^2+8\lambda-12 \quad (1)$, όπου $\lambda\in\mathbb{R}$

α) Τι παριστάνει γεωμετρικά σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy η εξίσωση (1) όταν $\lambda=2$ και τι όταν $\lambda=6$;

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του λ από το διάστημα $(2,6)$ η εξίσωση (1) στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy παριστάνει κύκλο.

(Μονάδες 8)

γ) Καθώς το λ μεταβάλλεται στο διάστημα $(2,6)$, να αποδείξετε ότι τα κέντρα των κύκλων οι οποίοι προκύπτουν από την εξίσωση (1) ανήκουν σε ένα ευθύγραμμο τμήμα από το οποίο εξαιρούνται τα άκρα του.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4 - 22557

<u>ΛΥΣΗ</u>

Έχουμε την εξίσωση

(1): $(x-\lambda+6)^2+(y-2\lambda)^2=-\lambda^2+8\lambda-12 \Leftrightarrow (x-\lambda+6)^2+(y-2\lambda)^2=-(\lambda-6)(\lambda-2)$

(α) • Όταν $\lambda=2$ έχουμε:

(1): $(x+4)^2+(y-4)^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+4=0 \\ \text{και} \\ y-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-4 \\ \text{και} \\ y=4 \end{cases}$

Άρα η (1) παριστάνει το σημείο $A(-4,4)$

• Όταν $\lambda=6$ έχουμε:

(1): $x^2+(y-12)^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ \text{και} \\ y-12=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ \text{και} \\ y=12 \end{cases}$

Άρα η (1) παριστάνει το σημείο $B(0,12)$

(β) Το τριώνυμο $-\lambda^2+8\lambda-12=-(\lambda-6)(\lambda-2)$ έχει ρίζες $\lambda_1=6$, $\lambda=2$ και πρόσημο:

λ	$-\infty$	2		6	$+\infty$
$-\lambda^2+8\lambda-12$	$-$	0	$+$	0	$-$

αν $\lambda\in(2,6)$, τότε $-\lambda^2+8\lambda-12>0$

οπότε με $\lambda\in(2,6)$ η (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(\lambda-6,2\lambda)$ και ακτίνα $\rho=\sqrt{-(\lambda-6)(\lambda-2)}$

(γ) Έστω $K(x,y)$ σημείο που ανήκει σε κέντρο των κύκλων (1). Έχουμε ότι

$\begin{cases} x=\lambda-6 & (1) \\ y=2\lambda & (2) \\ 2<\lambda<6 & (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=2\lambda-12 \\ y=2\lambda \\ 2-6<\lambda-6<6-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y=2\lambda-12-2\lambda \\ -4<x<0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} 2x-y+12=0 \\ -4<x<0 \end{cases}$ Ο γ.τ. των κέντρων των κύκλων (1) είναι το τμήμα της ευθείας $\varepsilon: 2x-y+12=0$ που ορίζεται από τα σημεία $A(-4,4)$, $B(0,12)$, χωρίς τα άκρα A, B.

Δηλαδή ευθ. τμήμα, χωρίς τα άκρα του.

ΘΕΜΑ 4 / 22558.pdf ΚΥΚΛΟΣ

Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε τον κύκλο $C_1: x^2+y^2=4$ και μία τυχούσα διάμετρό του AB με $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$.

α) Να δικαιολογήσετε γιατί ισχύει $x_2=-x_1$ και $y_2=-y_1$;

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $N(\kappa,\lambda)$ για τα οποία ισχύει $\overrightarrow{NA}\cdot\overrightarrow{NB}=5$ είναι ο κύκλος $C_2: x^2+y^2=9$.

(Μονάδες 12)

γ) Στο καρτεσιανό επίπεδο να προσδιορίσετε τη θέση των σημείων $M(x,y)$ για τα οποία ισχύει: $4\le x^2+y^2\le 9$.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4 - 22558

ΛΥΣΗ

(α) Έχουμε τον κύκλο $C_1: x^2+y^2=4 \Leftrightarrow x^2+y^2=2^2$

με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho_1=2$

Η ΑΒ με $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$ είναι μία διάμετρος του κύκλου. Το σημείο $O(0,0)$ είναι μέσο του ευθ. τμήματος ΑΒ, οπότε ισχύει:

$$\begin{cases} 0=\frac{x_1+x_2}{2} \\ 0=\frac{y_1+y_2}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2=0 \\ y_1+y_2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2=-x_1 \\ y_2=-y_1 \end{cases}$$

(β) Έχουμε ότι:

$A(x_1,y_1)\in C_1 \Leftrightarrow x_1^2+y_1^2=4$, $B(x_2,y_2)\in C_1 \Leftrightarrow x_2^2+y_2^2=4$

$\vec{NA}\cdot\vec{NB}=5 \Leftrightarrow (x_1-\kappa, y_1-\lambda)\cdot(x_2-\kappa)(y_2-\lambda)=5 \Leftrightarrow$

$(x_1-\kappa)(x_2-\kappa)+(y_1-\lambda)(y_2-\lambda)=5 \overset{(\alpha)}{\Leftrightarrow}$

$(x_1-\kappa)(-x_1-\kappa)+(y_1-\lambda)(-y_1-\lambda)=5 \Leftrightarrow$

$-(x_1-\kappa)(x_1+\kappa)-(y_1-\lambda)(y_1+\lambda)=5 \Leftrightarrow -(x_1^2-\kappa^2)-(y_1^2-\lambda^2)=5 \Leftrightarrow$

$-(x_1^2+y_1^2)+\kappa^2+\lambda^2=5 \Leftrightarrow -4+\kappa^2+\lambda^2=5 \Leftrightarrow \kappa^2+\lambda^2=9$

τα σημεία $N(\kappa,\lambda)$ επαληθεύουν την εξίσωση $C_2: x^2+y^2=9$, άρα ο γ.τ. των σημείων Ν είναι ο κύκλος C_2 με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho_2=3$

(γ) Η σχέση $x^2+y^2\geq 4$ παριστάνει τα εξωτερικά σημεία του κύκλου C_1 και τα σημεία του κύκλου C_1.

Η σχέση $x^2+y^2\leq 9$ παριστάνει τα εσωτερικά σημεία του κύκλου C_2 και τα σημεία του κύκλου C_2.

Άρα η σχέση $4\leq x^2+y^2\leq 9$ παριστάνει τα σημεία $M(x,y)$ του κυκλικού δακτυλίου μεταξύ των κύκλων C_1, C_2 μαζί με τα σημεία των κύκλων C_1, C_2.

ΘΕΜΑ 4 / 22581.pdf ΚΥΚΛΟΣ

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Η εξίσωση παριστάνει κύκλο C του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

(Μονάδες 8)

β) Ο κύκλος C εφάπτεται στον άξονα $x'x$ και να προσδιορίσετε το σημείο επαφής τους.

(Μονάδες 7)

γ) Το σημείο $M(2, -1)$ βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που τέμνει τον κύκλο σε δυο σημεία A, B ώστε η χορδή AB του κύκλου να έχει μέσο το Μ.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4 - 22581

ΛΥΣΗ

(α) $C: x^2+y^2-2x+4y+1=0 \Leftrightarrow x^2-2\cdot x\cdot 1+1^2+y^2+2\cdot y\cdot 2+2^2=-1+1^2+2^2 \Leftrightarrow$

$(x-1)^2+(y+2)^2=-1+1+4 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y+2)^2=2^2$

Αρα η C παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(1,-2)$ και ακτίνα $\rho=2$

(β) Είναι $d(K(1,-2),x'x) \underset{0x+1y+0=0}{\overset{x'x:\ y=0}{=}} \dfrac{|0\cdot 1+1(-2)+0|}{\sqrt{0^2+1^2}} = \dfrac{|-2|}{1} = 2 = \rho$

Αρα ο κύκλος C εφάπτεται του άξονα $x'x$

(γ) Είναι $(KM)=\sqrt{(1-2)^2+(-2+1)^2}=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2}<2=\rho$

Αρα το Μ είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου.

Η ευθεία ΚΜ έχει κλίση $\lambda_{KM}=\dfrac{-2+1}{1-2}=\dfrac{-1}{-1}=1$

Κάθε ευθεία ε, ώστε $\varepsilon \perp KM$ έχει:

$\varepsilon \perp KM \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon \cdot \lambda_{KM}=-1 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon \cdot 1=-1 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon=-1$

Η ευθεία με κλίση $\lambda_\varepsilon=-1$, που διέρχεται από το σημείο $M(2,-1)$ έχει εξίσωση

$\varepsilon: y+1=-1(x-2) \Leftrightarrow y=-x+1$

Αν η ε τέμνει τον κύκλο στα σημεία Α, Β, τότε είναι η ζητούμενη, αφού το τμήμα ΚΜ είναι απόστημα της χορδής ΑΒ, άρα το Μ είναι το μέσο του τμήματος ΑΒ.

ΘΕΜΑ 4 / 22584.pdf ΚΥΚΛΟΣ + ΕΥΘΕΙΑ

Δίνονται οι εξισώσεις

$$(x+y-1)(x+y+1)=2xy \quad (1) \quad \text{και} \quad (\lambda-1)x+(2\lambda+3)y+2\lambda-5=0 \quad (2) \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο C με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho=1$.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση (2) παριστάνει ευθεία. Κατόπιν να αποδείξετε ότι οι ευθείες που προκύπτουν από την (2) για τις διάφορες τιμές του λ διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο να προσδιορίσετε.

(Μονάδες 10)

γ) Έστω Α και Β τα σημεία τομής του κύκλου C με τους θετικούς ημιάξονες Ox και Oy αντίστοιχα. Να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του λ, ώστε η ευθεία ΑΒ να προκύπτει από την εξίσωση (2).

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4- 22584

ΛΥΣΗ

(α) (1): $(x+y-1)(x+y+1)=2xy \Leftrightarrow (x+y)^2-1^2=2xy \Leftrightarrow$ $x^2+2xy+y^2-1=2xy \Leftrightarrow x^2+y^2=1$. Έστω $C: x^2+y^2=1$

Άρα η εξίσωση (1) παριστάνει τον κύκλο με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho=1$ (μοναδιαίος κύκλος)

(β) (2): $(\lambda-1)x+(2\lambda+3)y+2\lambda-5=0,\ \lambda\in R$

Δεν υπάρχει $\lambda\in R$, που να μηδενίζει ταυτόχρονα τις παραστάσεις $\lambda-1$ και $2\lambda+3$.

Άρα η (2) παριστάνει ευθεία, για κάθε $\lambda\in R$

Στη (2) για $\lambda=1$ έχουμε την ευθεία με εξίσωση

$\varepsilon_1: 5y+2-5=0 \Leftrightarrow y=\frac{3}{5}$

Στη (2) για $\lambda=-\frac{3}{2}$ έχουμε την ευθεία με εξίσωση

$\varepsilon_2: \left(-\frac{3}{2}-1\right)x+2\left(-\frac{3}{2}\right)-5=0 \Leftrightarrow -\frac{5}{2}x-3-5=0 \Leftrightarrow -\frac{5}{2}x=8 \Leftrightarrow x=-\frac{16}{5}$

Οι ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνονται στο σημείο $K\left(-\frac{16}{5},\frac{3}{5}\right)$

Έχουμε ότι

$K\left(-\frac{16}{5},\frac{3}{5}\right)\in(2) \Leftrightarrow (\lambda-1)\left(-\frac{16}{5}\right)+(2\lambda+3)\frac{3}{5}+2\lambda-5=0 \Leftrightarrow$

$-16(\lambda-1)+3(2\lambda+3)+10\lambda-25=0 \Leftrightarrow -16\lambda+16+6\lambda+9+10\lambda-25=0 \Leftrightarrow$

$0=0$ αληθής.

Άρα οι ευθείες (2) συντρέχουν στο σημείο $K\left(-\frac{16}{5},\frac{3}{5}\right)$

(γ) Στην (1) για $x=0$: $y^2=1 \overset{y>0}{\Longleftrightarrow} y=1$

Στην (1) για $y=0$: $x^2=1 \overset{x>0}{\Longleftrightarrow} x=1$

Άρα ο μοναδιαίος κύκλος C τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία $A(1,0)$ και $B(0,1)$ αντίστοιχα.

Η ευθεία AB έχει

κλίση $\lambda_{AB}=\frac{1-0}{0-1}=-1$, εξίσωση AB: $y-0=-1(x-1) \Leftrightarrow y=-x+1$.

Ξέρουμε ότι οι ευθείες (2) διέρχονται από το σημείο K

Έχουμε ότι

$K\left(-\frac{16}{5},\frac{3}{5}\right)\in AB \Leftrightarrow \frac{3}{5}=-\left(-\frac{16}{5}\right)+1 \Leftrightarrow \frac{3}{5}=\frac{16}{5}+\frac{5}{5} \Leftrightarrow \frac{3}{5}=\frac{21}{5}$ ψευδής

Άρα, δεν υπάρχει $\lambda\in R$, ώστε η ευθεία AB να προκύπτει από την εξίσωση (2).

ΘΕΜΑ 4 / 22586.pdf ΚΥΚΛΟΣ

Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε την εξίσωση $x^2+y^2-(3\alpha+2)x+\alpha^2-4=0$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$, η εξίσωση παριστάνει κύκλο. Κατόπιν, να βρείτε για ποιες τιμές του α, ο κύκλος διέρχεται από την αρχή Ο.

(Μονάδες 10)

β) Έστω C ο κύκλος που προκύπτει από την παραπάνω εξίσωση όταν $\alpha=2$ και $y=\lambda x, \lambda\in\mathbb{R}$ μια ευθεία που τέμνει τον κύκλο C σε σημείο Α διαφορετικό από το Ο.

i. Να βρείτε τις συντεταγμένες του Α συναρτήσει του λ.

(Μονάδες 10)

ii. Να αποδείξετε ότι το μέσο Μ του τμήματος ΟΑ κινείται σε κύκλο σταθερής ακτίνας ο οποίος διέρχεται από το Ο.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4 - 22586

ΛΥΣΗ

(α) $x^2+y^2-(3\alpha+2)x+\alpha^2-4=0$, $\alpha\in R$ (1)

Με $A=-(3\alpha+2)$, $B=0$, $\Gamma=\alpha^2-4$ έχουμε:

$A^2+B^2-4\Gamma=[-(3\alpha+2)]^2+0^2-4(\alpha^2-4)=9\alpha^2+12\alpha+4-4\alpha^2+16=$

$=5\alpha^2+12\alpha+20$

Το τριώνυμο $5\alpha^2+12\alpha+20$ έχει

$\Delta=12^2-4\cdot5\cdot20=144-400=-256<0$ και $\alpha=5>0$, οπότε

$5\alpha^2+12\alpha+20>0$, για κάθε $\alpha\in R \Leftrightarrow A^2+B^2-4\Gamma>0$, για κάθε $\alpha\in R \Leftrightarrow$

η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο, για κάθε $\alpha\in R$.

Εχουμε ότι

$O(0,0)\in(1) \Leftrightarrow 0+0-0+\alpha^2-4=0 \Leftrightarrow \alpha^2=4 \Leftrightarrow \alpha=\pm\sqrt{4} \Leftrightarrow \alpha=-2$ ή $\alpha=2$

(β)(i) Για $\alpha=2$ έχουμε τον κύκλο

$C: x^2+y^2-8x=0 \Leftrightarrow x^2-2\cdot x\cdot4+4^2+y^2=4^2 \Leftrightarrow (x-4)^2+y^2=4^2$

Άρα έχουμε τον κύκλο C με κέντρο $K(4,0)$ και ακτίνα $\rho=4$.

Τα κοινά σημεία του κύκλου C και της ευθείας

$\varepsilon: y=\lambda x, \lambda\in R$ προκύπτουν από τη λύση του συστήματος:

$$\begin{cases} y=\lambda x \\ x^2+y^2-8x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\lambda x \\ x^2+\lambda^2x^2-8x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\lambda x \\ x(x+\lambda^2x-8)=0 \end{cases}$$

Οπότε:

$$x(x+\lambda^2x-8)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ \text{ή} \\ x(1+\lambda^2)-8=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{8}{1+\lambda^2}$$

• Για $x=0$ είναι $y=\lambda\cdot0=0$, άρα $(x,y)=(0,0)$

Το ένα κοινό σημείο είναι το $O(0,0)$, που δεν είναι δεκτό.

• Για $x=\frac{8}{1+\lambda^2}$ είναι $y=\lambda\frac{8}{1+\lambda^2}=\frac{8\lambda}{1+\lambda^2}$

Το άλλο κοινό σημείο είναι το $A\left(\frac{8}{1+\lambda^2},\frac{8\lambda}{1+\lambda^2}\right)$

(ii) Εχουμε τα σημεία $O(0,0)$ και $A\left(\frac{8}{1+\lambda^2},\frac{8\lambda}{1+\lambda^2}\right)$

ΘΕΜΑ 4 - 22586

ΛΥΣΗ (συνέχεια)

Έστω $M(x_M, y_M)$ το μέσο του τμήματος ΟΑ.

Τότε

$$x_M = \frac{x_A+0}{2} \Leftrightarrow x_A = 2x_M \quad , \quad y_M = \frac{y_A+0}{2} \Leftrightarrow y_A = 2y_M$$

Όμως: $A \in C \Leftrightarrow (x_A-4)^2 + y_A^2 = 4^2 \Leftrightarrow (2x_M-4)^2 + (2y_M)^2 = 16 \Leftrightarrow$

$$[2(x_M-2)]^2 + 4y_M^2 = 16 \Leftrightarrow 4(x_M-2)^2 + 4y_M^2 = 16 \Leftrightarrow$$

$$(x_M-2)^2 + y_M^2 = 4$$

Τα σημεία $M(x_M, y_M)$ επαληθεύουν την εξίσωση

$C_1: (x-2)^2 + y^2 = 4 = 2^2$, άρα κινούνται σε κύκλο C_1 με κέντρο $K_1(2,0)$ και ακτίνα $\rho_1 = 2$

Επίσης έχουμε ότι:

$O(0,0) \in C_1 \Leftrightarrow (-2)^2 + 0^2 = 4 \Leftrightarrow 4 = 4$ αληθής.

Άρα ο κύκλος C_1 διέρχεται από το σημείο $O(0,0)$.

ΘΕΜΑ 4 / 22587.pdf ΚΥΚΛΟΣ

Σε καρτεσιανό σύστημα Oxy, θεωρούμε τα σημεία $M(x, y)$, $A(-25, 0)$ και $B(-1, 0)$ για τα οποία ισχύει $|\overrightarrow{AM}| = 5|\overrightarrow{BM}|$.

α) Να αποδείξετε ότι το σημείο Μ ανήκει στον κύκλο $C: \ x^2 + y^2 = 25$.

(Μονάδες 10)

β) Θεωρούμε το σημείο $\Sigma(7, 1)$.

i. Να εξετάσετε αν το σημείο Σ βρίσκεται στο εσωτερικό ή το εξωτερικό του κύκλου C.

(Μονάδες 5)

ii. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες, από το σημείο Σ προς τον κύκλο, είναι μεταξύ τους κάθετες.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4 - 22587

ΛΥΣΗ

(α) $\vec{AM}=(x+25,\ y-0)=(x+25,\ y)$, $\vec{BM}=(x+1,\ y-0)=(x+1,\ y)$

$|\vec{AM}|=5|\vec{BM}| \Leftrightarrow \sqrt{(x+25)^2+y^2}=5\sqrt{(x+1)^2+y^2} \Leftrightarrow$

$(x+25)^2+y^2=25\left[(x+1)^2+y^2\right] \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow x^2+y^2=5^2$

Άρα τα σημεία $M(x,y)$ κινούνται στον κύκλο C με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho=5$

(β) (i) $(O\Sigma)=\sqrt{(7-0)^2+(1-0)^2}=\sqrt{49+1}=\sqrt{50}>5=\rho$

Άρα το Σ είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου.

(ii) Από το Σ διέρχονται οι εξής ευθείες.

- Η ευθεία $\varepsilon_1: x=7$ στην οποία δεν ορίζεται κλίση. Η $x=7$ δεν αποτελεί λύση, αφού οι κατακόρυφες εφαπτόμενες του κύκλου C είναι οι ευθείες $x=-5$, $x=5$.
- Οι ευθείες ε, στις οποίες ορίζεται κλίση λ και έχουν εξίσωση

$\varepsilon: y-1=\lambda(x-7) \Leftrightarrow y-1=\lambda x-7\lambda \Leftrightarrow \lambda x-y+1-7\lambda=0$

Έχουμε ότι η ε εφάπτεται του κύκλου C, αν και μόνο αν:

$$d(O(0,0),\varepsilon)=\rho \Leftrightarrow \frac{|\lambda\cdot 0-0+1-7\lambda|}{\sqrt{\lambda^2+(-1)^2}}=5 \Leftrightarrow |1-7\lambda|=5\sqrt{\lambda^2+1} \Leftrightarrow$$

$$\overset{\text{μη αρνητικά}}{\Longleftrightarrow} |1-7\lambda|^2=\left(5\sqrt{\lambda^2+1}\right)^2 \Leftrightarrow (1-7\lambda)^2=25(\lambda^2+1) \Leftrightarrow$$

$$1-14\lambda+49\lambda^2=25\lambda^2+25 \Leftrightarrow 24\lambda^2-14\lambda-24=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda=\frac{4}{3} \\ \text{ή} \\ \lambda=-\frac{3}{4} \end{cases}$$

Άρα έχουμε δύο εφαπτόμενες από το σημείο Σ προς τον κύκλο C.

Την ε_2 με κλίση $\frac{4}{3}$ και την ε_3 με κλίση $-\frac{3}{4}$

Είναι $\lambda_{\varepsilon_2}\cdot\lambda_{\varepsilon_3}=\frac{4}{3}\left(-\frac{3}{4}\right)=-1$, άρα $\varepsilon_1\perp\varepsilon_2$

ΘΕΜΑ 4 / 22589.pdf ΚΥΚΛΟΣ

Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε τα σημεία $M(x, y)$, $A(-2, 0)$ και $B(2, 0)$ ώστε να ισχύει

$$\overrightarrow{AM}^2 + \overrightarrow{BM}^2 = 3\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM}$$

α) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ είναι ο κύκλος

$$C: x^2 + y^2 = 20.$$

(Μονάδες 10)

β) Έστω Γ, Δ σημεία του κύκλου C ώστε

$$\left(\frac{\Gamma\Delta}{4}\right)^2 = 5$$

i. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Γ, Δ και η αρχή των αξόνων O, είναι συνευθειακά.

(Μονάδες 10)

ii. Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{M\Gamma} \cdot \overrightarrow{M\Delta}$ όταν το M κινείται στον κύκλο.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4 - 22589

ΛΥΣΗ

(α) $\vec{AM}=(x+2,y)$, $\vec{BM}=(x-2,y)$

οπότε:

$\vec{AM}^2+\vec{BM}^2=3\vec{AM}\cdot\vec{BM} \Rightarrow \vec{AM}\cdot\vec{AM}+\vec{BM}\cdot\vec{BM}=3\vec{AM}\cdot\vec{BM} \Rightarrow$

$(x+2)^2+y^2+(x-2)^2+y^2=3\left((x+2)(x-2)+y^2\right) \Rightarrow$

$x^2+4x+4+y^2+x^2-4x+4+y^2=3x^2-12+3y^2 \Rightarrow$

$x^2+y^2=20$

Αρα ο γ.τ των σημείων M είναι ο κύκλος C με κέντρο O(0,0) και ακτίνα $\rho=\sqrt{20}$

(β)(i) Εχουμε ότι Γ,Δ είναι σημεία του κύκλου με:

$\left(\frac{Γ\Delta}{4}\right)^2=5 \Leftrightarrow \frac{(Γ\Delta)^2}{16}=5 \Leftrightarrow (Γ\Delta)^2=16\cdot5 \Leftrightarrow (Γ\Delta)^2=4\cdot20 \Leftrightarrow$

$(Γ\Delta)=\sqrt{4\cdot20}=2\sqrt{20}=2\rho$

Οπότε τα σημεία Γ,Δ είναι αντιδιαμετρικά, συνεπώς τα σημεία Γ,Ο,Δ είναι συνευθειακά (αφού το O(0,0) είναι το κέντρο του κύκλου)

(ii) Η ΓΟΔ είναι διάμετρος του κύκλου και το σημείο M ανήκει στον κύκλο, οπότε η γωνία $Γ\hat{M}\Delta$ είναι εγγεγραμμένη και βαίνει σε διάμετρο, άρα είναι ορθή, επομένως $\vec{MΓ}\perp\vec{M\Delta} \Rightarrow$

$\vec{MΓ}\cdot\vec{M\Delta}=0$, για κάθε θέση του M στον κύκλο.

ΘΕΜΑ 4 / 22590.pdf ΚΥΚΛΟΣ

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - (\lambda - 1)x - (\lambda - 7)y + \lambda = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε τιμή του λ, με $\lambda \neq 5$, παριστάνει κύκλο. Κατόπιν να βρείτε τι παριστάνει η εξίσωση, όταν $\lambda = 5$.

(Μονάδες 12)

β) Έστω C_1, C_2 οι κύκλοι που προκύπτουν από την παραπάνω εξίσωση όταν $\lambda = 3$ και $\lambda = 9$ αντίστοιχα.

i. Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι C_1 και C_2 εφάπτονται εξωτερικά.

(Μονάδες 6)

ii. Να βρείτε το σημείο επαφής των κύκλων.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4- 22590

ΛΥΣΗ

(α) $C: x^2+y^2-(\lambda-1)x-(\lambda-7)y+\lambda=0,\ \lambda\in R$

Με $A=-(\lambda-1)$, $B=-(\lambda-7)$, $\Gamma=\lambda$ έχουμε:

$$A^2+B^2-4\Gamma=[(\lambda-1)]^2+[-(\lambda-7)]^2-4\lambda=\lambda^2-2\lambda+1+\lambda^2-14\lambda+49-4\lambda=$$
$$=2\lambda^2-20\lambda+50=2[\lambda^2-10\lambda+25]=2(\lambda-5)^2$$

αν $\lambda\in R-\{5\}$, τότε η C παριστάνει κύκλο με κέντρο $K\left(\frac{\lambda-1}{2},\frac{\lambda-7}{2}\right)$ και ακτίνα $\rho=\frac{\sqrt{2(\lambda-5)^2}}{2}=\frac{\sqrt2}{2}|\lambda-5|$

αν $\lambda=5$, τότε η C παριστάνει το σημείο $K\left(\frac{5-1}{2},\frac{5-7}{2}\right)$ ή $K(2,-1)$

(β)(i) Αν $\lambda=3$, τότε έχουμε τον κύκλο C_1 με κέντρο $K_1(1,-2)$, ακτίνα $\rho_1=\frac{\sqrt2}{2}|3-5|=\sqrt2$

εξίσωση $C_1: (x-1)^2+(y+2)^2=2$

Αν $\lambda=9$, τότε έχουμε τον κύκλο C_2 με κέντρο $K_2(4,1)$, ακτίνα $\rho_2=\frac{\sqrt2}{2}|9-5|=2\sqrt2$

εξίσωση $C_2: (x-4)^2+(y-1)^2=8$

Η διάκεντρος K_1K_2 έχει μήκος

$$(K_1K_2)=\sqrt{(4-1)^2+(1+2)^2}=\sqrt{3^2+3^2}=\sqrt{2\cdot3^2}=3\sqrt2=\sqrt2+2\sqrt2=\rho_1+\rho_2$$

Άρα οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά.

(ii) Το κοινό σημείο των C_1, C_2 έχει ως συντεταγμένες τη λύση του συστήματος

$$\begin{cases}(x-1)^2+(y+2)^2=2\\(x-4)^2+(y-1)^2=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2-2x+4y=-3\\x^2+y^2-8x-2y=-9\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}x^2+y^2-2x+4y=-3\\(x^2+y^2-2x+4y)-(x^2+y^2-8x-2y)=-3+9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2-2x+4y=-3\\6x+6y=6\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}x^2+(-x+1)^2-2x+4(-x+1)=-3\\y=-x+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+x^2-2x+1-2x-4x+4+3=0\\y=-x+1\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}x^2-4x+4=0\\y=-x+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-2)^2=0\\y=-x+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-2=0\\y=-x+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2 \text{ διπλή ρίζα}\\y=-2+1=-1\end{cases}$$

Άρα $\Delta(2,-1)$ είναι το σημείο επαφής.