ΘΕΜΑ 2 / 22509.pdf ΕΛΛΕΙΨΗ

Δίνονται οι ελλείψεις $C_1 : x^2 + 4y^2 = 20$ και $C_2 : 4x^2 + y^2 = 20$

α) Να αποδείξετε ότι οι ελλείψεις C_1 και C_2 έχουν την ίδια εκκεντρότητα.

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι τα σημεία τομής των ελλείψεων C_1 και C_2 ανήκουν στον κύκλο $C : x^2 + y^2 = 8$

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2 - 22509

ΛΥΣΗ

(α) $C_1: x^2+4y^2=20 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{20}+\dfrac{4y^2}{20}=\dfrac{20}{20} \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{20}+\dfrac{y^2}{5}=1$

Με: $\alpha^2=20 \Leftrightarrow \alpha=\sqrt{20}$, $\beta^2=5 \Leftrightarrow \beta=\sqrt{5}$, $\gamma=\sqrt{\alpha^2-\beta^2}=\sqrt{20-5}=\sqrt{15}$

η έλλειψη C_1 έχει εκκεντρότητα:

$\varepsilon_1=\dfrac{\gamma}{\alpha}=\dfrac{\sqrt{15}}{\sqrt{20}}=\dfrac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$C_2: 4x^2+y^2=20 \Leftrightarrow \dfrac{4x^2}{20}+\dfrac{y^2}{20}=\dfrac{20}{20} \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{20}=1$

Με $\alpha^2=20 \Leftrightarrow \alpha=\sqrt{20}$, $\beta^2=5 \Leftrightarrow \beta=\sqrt{5}$, $\gamma=\sqrt{\alpha^2-\beta^2}=\sqrt{20-5}=\sqrt{15}$

η έλλειψη C_2 έχει εκκεντρότητα:

$\varepsilon_2=\dfrac{\gamma}{\alpha}=\dfrac{\sqrt{15}}{\sqrt{20}}=\dfrac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Άρα, οι ελλείψεις C_1 και C_2 έχουν την ίδια εκκεντρότητα.

(β) Έστω $M(x_0,y_0)$ κοινό σημείο των ελλείψεων. Τότε οι συντεταγμένες του επαληθεύουν και τις δύο εξισώσεις, οπότε έχωμε:

$x_0^2+4y_0^2=20$ και $4x_0^2+y_0^2=20$

Με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει:

$5x_0^2+5y_0^2=40 \Leftrightarrow x_0^2+y_0^2=8$

Τα σημεία (x_0,y_0) επαληθεύουν την εξίσωση $x^2+y^2=8$, άρα ανήκουν στον κύκλο με την εξίσωση $C: x^2+y^2=8$

ΘΕΜΑ 2 / 22510.pdf ΚΥΚΛΟΣ + ΕΛΛΕΙΨΗ

Δίνονται ο κύκλος $C_1: x^2+y^2=20$, η έλλειψη $C_2: \frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1$ και η κατακόρυφη ευθεία $\varepsilon: x=4$

Αν Γ και Δ είναι τα σημεία του πρώτου τεταρτημορίου στα οποία η ευθεία ε τέμνει τον κύκλο C_1 και την έλλειψη C_2 αντίστοιχα, τότε:

α) να βρείτε τις συντεταγμένες των Γ και Δ.

(Μονάδες 11)

β) να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου C_1 στο σημείο του Γ και της έλλειψης C_2 στο σημείο της Δ, καθώς και το σημείο τομής των εφαπτομένων αυτών.

(Μονάδες 14)

ΘΕΜΑ 2- 22510

ΛΥΣΗ

(α) Έχουμε τον κύκλο $C_1: x^2+y^2=20=(2\sqrt{5})^2$

με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho=2\sqrt{5}$

Έχουμε την έλλειψη $C_2: \frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1$

με $\alpha^2=20$, $\beta^2=5$, $\gamma^2=\alpha^2-\beta^2 \Leftrightarrow \gamma=\sqrt{\alpha^2-\beta^2}=\sqrt{20-5}=\sqrt{15}$

Τα σημεία τομής της $\varepsilon: x=4$ και του κύκλου C_1, προκύπτουν

από τη λύση του συστήματος:

$$\begin{cases} x=4 \\ x^2+y^2=20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ 4^2+y^2=20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=-2 \text{ ή } y=2 \end{cases}$$

Η ε τέμνει τον κύκλο στα σημεία $(4,-2)$ και $(4,2)$

Άρα $\Gamma(4,2)$

τα σημεία τομής της $\varepsilon: x=4$ και της έλλειψης C_2, προκύπτουν

από τη λύση του συστήματος:

$$\begin{cases} x=4 \\ \frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ \frac{4^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ \frac{4}{5}+\frac{y^2}{5}=\frac{5}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=-1 \text{ ή } y=1 \end{cases}$$

Η ε τέμνει την έλλειψη στα σημεία $(4,-1)$ και $(4,1)$

Άρα $\Delta(4,1)$

(β) Η εφαπτομένη του κύκλου C_1 στο σημείο του Γ είναι:

$\varepsilon_1: x\cdot 4+y\cdot 2=20 \Leftrightarrow 2x+y=10 \Leftrightarrow y=-2x+10$

Η εφαπτομένη της έλλειψης C_2 στο σημείο της Δ είναι:

$\varepsilon_2: \frac{x\cdot 4}{20}+\frac{y\cdot 1}{5}=1 \Leftrightarrow \frac{x}{5}+\frac{y}{5}=\frac{5}{5} \Leftrightarrow x+y=5 \Leftrightarrow y=-x+5$

Το σημείο τομής των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ προκύπτει:

$$\begin{cases} y=-2x+10 \\ y=-x+5 \end{cases} \ldots (x,y)=(5,0)$$

Άρα ε_1 και ε_2 τέμνονται στο σημείο $E(5,0)$

ΘΕΜΑ 2 / 22516.pdf ΕΛΛΕΙΨΗ

Θεωρούμε την έλλειψη με εστίες τα σημεία $E'\left(-\sqrt{5},0\right)$, $E\left(\sqrt{5},0\right)$ και μεγάλο άξονα μήκους 6 μονάδων.

α) Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης.

(Μονάδες 10)

β) Αν M είναι σημείο της έλλειψης για το οποίο ισχύει $ME' = 2 \cdot ME$, τότε:

i) να βρείτε τα μήκη των ευθυγράμμων τμημάτων ME' και ME

(Μονάδες 9)

ii) να αποδείξετε ότι η γωνία $E'ME$ είναι ορθή.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 2 – 22516

ΛΥΣΗ

(α) Η έλλειψη έχει εστίες στον άξονα $x'x$, οπότε έχει εξίσωση $C: \frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ με $2\alpha=6$ και $2\gamma=2\sqrt{5}$, οπότε

$2\alpha=6 \Leftrightarrow \alpha=3$, $2\gamma=2\sqrt{5} \Leftrightarrow \gamma=\sqrt{5}$

$\beta^2=\alpha^2-\gamma^2 \Leftrightarrow \beta=\sqrt{3^2-(\sqrt{5})^2}=\sqrt{9-5}=\sqrt{4}=2$

Άρα $C: \frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{2^2}=1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$

(β) (i) Για το σημείο Μ ισχύει $(ME')=2(ME)$ (1)

από τον ορισμό ισχύει: $(ME')+(ME)=6$ (2)

από (1), (2) έχουμε:

$2(ME)+(ME)=6 \Leftrightarrow 3(ME)=6 \Leftrightarrow (ME)=2$, οπότε $(ME')=2\cdot 2=4$

(ii) Έχουμε ότι:

$(E'E)^2=(2\gamma)^2=(2\sqrt{5})^2=4\cdot 5=20$

$(ME)^2+(ME')^2=2^2+4^2=4+16=20$

ισχύει ότι $(E'E)^2=(ME)^2+(ME')^2$, δηλαδή στο τρίγωνο $E'\hat{M}E$ ισχύει το Πυθαγόρειο θεώρημα, άρα είναι ορθογώνιο τρίγωνο με τη γωνία $E'\hat{M}E=90^\circ$

ΘΕΜΑ 4 / 22592.pdf ΚΥΚΛΟΣ + ΕΛΛΕΙΨΗ

Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε τα σημεία $M(x,y)$ για τα οποία ισχύει η ισότητα $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}+\frac{16}{9}\left(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}\right)=0$, όπου $A(-3,0)$ και $B(3,0)$.

α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία M ανήκουν στον κύκλο $C_1: x^2+y^2=25$

(Μονάδες 11)

β) Αν Γ και Δ είναι τα σημεία τομής του κύκλου C_1 με τον άξονα $x'x$, τότε:

i) να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης C_2 η οποία έχει μεγάλο άξονα το ευθύγραμμο τμήμα $\Gamma\Delta$ και εστίες τα σημεία A και B.

(Μονάδες 10)

ii) να παραστήσετε γραφικά τον κύκλο C_1 και την έλλειψη C_2

(Μονάδες 4)

ΘΕΜΑ 4 - 22592

ΛΥΣΗ

(α) $\vec{AM}=(x+3,y)$, $\vec{BM}=(x-3,y)$, $\vec{OA}=(-3,0)$, $\vec{OB}=(3,0)$

οπότε:

$\vec{AM}\cdot\vec{BM}+\frac{16}{9}(\vec{OA}\cdot\vec{OB})=0 \Rightarrow (x+3)(x-3)+y^2+\frac{16}{9}(-9+0)=0 \Rightarrow$

$x^2-9+y^2-16=0 \Rightarrow x^2+y^2=25$

Άρα ο γ.τ. των σημείων $M(x,y)$ είναι ο κύκλος C_1 με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho_1=5$

(β) (i) Στην εξίσωση C_1 για $y=0$ είναι: $x^2=25 \Leftrightarrow y=\pm\sqrt{25}=\pm 5$

Άρα $\Gamma(5,0)$ και $\Delta(-5,0)$ είναι τα σημεία τομής του κύκλου C_1 με τον άξονα $x'x$.

Η έλλειψη με μεγάλο άξονα το τμήμα $\Gamma\Delta$ έχει $2\alpha=(\Gamma\Delta) \Leftrightarrow 2\alpha=10 \Leftrightarrow \alpha=5$. Επίσης έχει εστίες τα σημεία $A(-3,0)$, $B(3,0)$, άρα $2\gamma=6 \Leftrightarrow \gamma=3$

οπότε $\beta^2=\alpha^2-\gamma^2 \Leftrightarrow \beta=\sqrt{5^2-3^2}=\sqrt{25-9}=\sqrt{16}=4$

Η έλλειψη, σε σύστημα Oxy, με άξονα των x την ευθεία $\Gamma\Delta$ και άξονα των y τη μεσοκάθετη του τμήματος $\Gamma\Delta$ έχει εξίσωση

$C_2: \frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{4^2}=1$

ii)