ΘΕΜΑ 2 / 996.pdf

Δίνεται η παράσταση: $A=|x-1|+|y-3|$, με x, y πραγματικούς αριθμούς, για τους οποίους ισχύει: $1<x<4$ και $2<y<3$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $A=x-y+2$. (Μονάδες 12)

β) $0<A<4$. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2/996

(α) Έχουμε, • $1 < x < 4 \Rightarrow 1 < x \Leftrightarrow x - 1 > 0$

άρα $|x-1| = x - 1$

Έχουμε, • $2 < y < 3 \Rightarrow y < 3 \Leftrightarrow y - 3 < 0$

άρα $|y-3| = -(y-3) = -y + 3$.

Άρα, $A = |x-1| + |y-3| = x - 1 - y + 3 = x - y + 2$

(β) •

• $2 < y < 3 \Leftrightarrow -2 > -y > -3 \Leftrightarrow$

$$\begin{array}{r} 1 < x < 4 \\ -3 < -y < -2 \\ \hline -2 < x - y < 2 \end{array} \quad (+) \quad \Leftrightarrow$$

$-2 + 2 < x - y + 2 < 2 + 2 \Leftrightarrow 0 < A < 4$

ΘΕΜΑ 2 / 991.pdf

Αν ο πραγματικός αριθμός x ικανοποιεί τη σχέση: $|x+1|<2$,

α) να δείξετε ότι $x\in(-3,1)$ (Μονάδες 12)

β) να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης: $K=\dfrac{|x+3|+|x-1|}{4}$ είναι αριθμός ανεξάρτητος του x.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2/991

(α) Έχουμε, $|x+1|<2 \iff -2<x+1<2 \iff -3<x<1$

Οπότε, $x \in (-3,1)$.

(β) Από το (α) έχουμε: $-3<x<1$

- $-3<x \iff x+3>0$, άρα $|x+3| = x+3$
- $x<1 \iff x-1<0$, άρα $|x-1| = -(x-1)$

Οπότε, $K = \dfrac{|x+3|+|x-1|}{4} = \dfrac{x+3-(x-1)}{4} = \dfrac{x+3-x+1}{4} = 1.$

ΘΕΜΑ 2 / 955.pdf

Δίνονται οι αριθμοί: $A=\left(\sqrt{2}\right)^6$ και $B=\left(\sqrt[3]{2}\right)^6$

α) Να δείξετε ότι: $A-B=4$ (Μονάδες 13)

β) Να διατάξετε από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τους αριθμούς:

$$\sqrt{2}\,,\quad 1,\quad \sqrt[3]{2}$$ (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2/955

(α) Έχουμε, $A - B = (\sqrt{2})^6 - (\sqrt[3]{2})^6 = 2^3 - 2^2 = 8 - 4 = 4$

(β) Από το (α) έχουμε: $A - B = 4 \Leftrightarrow (\sqrt{2})^6 - (\sqrt[3]{2})^6 = 4 > 0$

$\Rightarrow (\sqrt{2})^6 - (\sqrt[3]{2})^6 > 0 \Leftrightarrow (\sqrt{2})^6 > (\sqrt[3]{2})^6 \Leftrightarrow \sqrt{2} > \sqrt[3]{2}$

Έστω $1 \geq \sqrt[3]{2} \xLeftrightarrow{\text{μον}} 1^3 \geq (\sqrt[3]{2})^3 \Leftrightarrow 1 \geq 2$ ΑΤΟΠΟ

Άρα, $1 < \sqrt[3]{2}$, επομένως $1 < \sqrt[3]{2} < \sqrt{2}$.

ΘΕΜΑ 2 / 952.pdf

Δίνεται η παράσταση: $B = \sqrt[5]{(x-2)^5}$

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση B; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x υπό μορφή διαστήματος. (Μονάδες 13)

β) Για $x=4$, να αποδείξετε ότι: $B^2+6B=B^4$ (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2/952

(α) Για να ορίζεται η παράσταση Β πρέπει και αρκεί: $(x-2)^5 \geq 0 \Leftrightarrow x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$

Άρα, η παράσταση Β ορίζεται για κάθε $x \in [2, +\infty)$

(β) Για $x=4$, η παράσταση γίνεται:

$B = \sqrt[5]{(4-2)^5} = 2$

Οπότε, • $B^2 + 6B \overset{B=2}{=\!=} 2^2 + 6 \cdot 2 = 4 + 12 = 16$

• $B^4 \overset{B=2}{=\!=} 2^4 = 16$

Άρα, $B^2 + 6B = B^4$.

ΘΕΜΑ 2 / 950.pdf

Δίνεται η παράσταση: $A=\sqrt{1-x}-\sqrt[4]{x^4}$

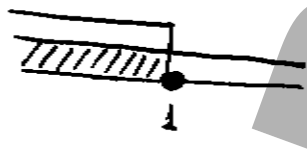
α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος. (Μονάδες 13)

β) Αν $x=-3$, να αποδείξετε ότι: $A^3+A^2+A+1=0$ (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2/950

(α) Για να ορίζεται η παράσταση Α πρέπει και αρκεί: $\begin{cases} 1-x \geq 0 \\ \text{και} \\ x^4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ \text{και} \\ x^4 \geq 0 \end{cases}$ που ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Συναλήθευση:



Άρα, η παράσταση Α ορίζεται για κάθε $x \in (-\infty, 1]$.

(β) Αν $x=-3$, τότε η παράσταση Α γίνεται:

$A = \sqrt{1-(-3)} - \sqrt[4]{(-3)^4} = \sqrt{4} - |-3| = 2-3 = -1.$

Οπότε, $A^3 + A^2 + A + 1 = A^2(A+1) + A+1 = (A+1)(A^2+1) \xlongequal{A=-1}$

$= (-1+1)((-1)^2+1) = 0 \cdot 2 = 0$

ΘΕΜΑ 2 / 947.pdf

Δίνεται η παράσταση: $A=\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x-4}$

α) Για ποιες τιμές του *x* ορίζεται η παράσταση *A*; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του *x* σε μορφή διαστήματος. (Μονάδες 12)

β) Αν *x=4*, να αποδείξετε ότι: $A^2-A=2\cdot(10-\sqrt{5})$ (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2/947

(α) Η παράσταση A ορίζεται, αν και μόνο αν,

$$\begin{cases} x^2+4 \geq 0 \\ x-4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \geq -4 & \text{που ισχύει για κάθε } x \in \mathbb{R}. \\ x \geq 4 \end{cases}$$

Άρα, η παράσταση A ορίζεται για κάθε $x \in [4, +\infty)$

(β) Αν $x=4$, τότε η παράσταση A γίνεται:

$$A = \sqrt{4^2+4} - \sqrt{4-4} = \sqrt{20} = \sqrt{4}\cdot\sqrt{5} \Leftrightarrow A = 2\sqrt{5}$$

Οπότε, $A^2 - A \overset{A=2\sqrt{5}}{=\!=} (2\sqrt{5})^2 - 2\sqrt{5} = 4\cdot 5 - 2\sqrt{5} =$

$= 20 - 2\sqrt{5} = 2(10-\sqrt{5})$.

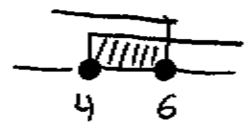
ΘΕΜΑ 2 / 944.pdf

Δίνεται η παράσταση: $A=\sqrt{x-4}+\sqrt{6-x}$

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος. (Μονάδες 13)

β) Για $x=5$, να αποδείξετε ότι: $A^2+A-6=0$ (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2/944

(α) Για να ορίζεται η παράσταση Α πρέπει και αρκεί: $\begin{cases} x-4 \geq 0 \\ 6-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ x \leq 6 \end{cases}$ Συναλήθευση: 

Οπότε, η παράσταση Α ορίζεται για κάθε $x \in [4,6]$.

(β) Για $x=5$, έχουμε: $A = \sqrt{5-4} + \sqrt{6-5} = \sqrt{1} + \sqrt{1} = 2\sqrt{1}$

$\Leftrightarrow A = 2$, δηλαδή

$A^2 + A - 6 \overset{A=2}{=\!=} 2^2 + 2 - 6 = 0$

ΘΕΜΑ 2 / 938.pdf

α) Να δείξετε ότι: $3<\sqrt[3]{30}<4$ (Μονάδες 12)

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\sqrt[3]{30}$ και $6-\sqrt[3]{30}$ (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2/938

(α) Έστω $3 < \sqrt[3]{30} < 4 \xLeftrightarrow{\mu\alpha\nu} 3^3 < \left(\sqrt[3]{30}\right)^3 < 4^3 \Leftrightarrow$

$27 < 30 < 64$ που ισχύει

(β) Έστω $\sqrt[3]{30} \leq 6 - \sqrt[3]{30} \Leftrightarrow \sqrt[3]{30} + \sqrt[3]{30} \leq 6 \Leftrightarrow$

$2\sqrt[3]{30} \leq 6 \Leftrightarrow \sqrt[3]{30} \leq 3 \xLeftrightarrow{\mu o \nu} \left(\sqrt[3]{30}\right)^3 \leq 3^3 \Leftrightarrow 30 \leq 27$

ΑΤΟΠΟ, άρα $\sqrt[3]{30} > 6 - \sqrt[3]{30}$

ΘΕΜΑ 2 / 936.pdf

Δίνεται η παράσταση: $A=\left(\sqrt{x-4}+\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x-4}-\sqrt{x+1}\right)$

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

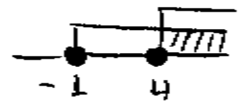
(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι η παράσταση A είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2/936

(α) Για να ορίζεται η παράσταση Α πρέπει και αρκεί: $\begin{cases} x-4 \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ x \geq -1 \end{cases}$ Συναληθευση:



Άρα η παράσταση Α ορίζεται για κάθε $x \in [4, +\infty)$

(β) Για κάθε $x \in [4, +\infty)$, έχουμε:

$$A = \left(\sqrt{x-4} + \sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x-4} - \sqrt{x+1}\right) = \left(\sqrt{x-4}\right)^2 - \left(\sqrt{x+1}\right)^2 =$$

$$= x-4-(x+1) = x-4-x-1 = -5$$

ΘΕΜΑ 2 / 8173.pdf

Στον πίνακα της τάξης σας είναι γραμμένες οι παρακάτω πληροφορίες (προσεγγίσεις):

$\sqrt{2} \cong 1{,}41$

$\sqrt{3} \cong 1{,}73$

$\sqrt{5} \cong 2{,}24$

$\sqrt{7} \cong 2{,}64$

α) Να επιλέξετε έναν τρόπο, ώστε να αξιοποιήσετε τα παραπάνω δεδομένα (όποια θεωρείτε κατάλληλα) και να υπολογίσετε με προσέγγιση εκατοστού τους αριθμούς $\sqrt{20}$, $\sqrt{45}$ και $\sqrt{80}$ (Μονάδες 12)

β) Αν δεν υπήρχαν στον πίνακα οι προσεγγιστικές τιμές των ριζών πώς θα μπορούσατε να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\dfrac{3\cdot\sqrt{20}+\sqrt{80}}{\sqrt{45}-\sqrt{5}}$; (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2/8173

(α) Είναι, $\sqrt{20} = \sqrt{4}\cdot\sqrt{5} = 2\sqrt{5} = 2\cdot 2,24 = 4,48$

Είναι, $\sqrt{45} = \sqrt{5}\cdot\sqrt{9} = 3\sqrt{5} = 3\cdot 2,24 = 6,72$

Είναι, $\sqrt{80} = \sqrt{5}\cdot\sqrt{16} = 4\sqrt{5} = 4\cdot 2,24 = 8,96$

(β) Έχουμε, $\dfrac{3\sqrt{20}+\sqrt{80}}{\sqrt{45}-\sqrt{5}} = \dfrac{3\cdot\sqrt{4}\cdot\sqrt{5}+\sqrt{5}\cdot\sqrt{16}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{9}-\sqrt{5}} =$

$= \dfrac{6\sqrt{5}+4\sqrt{5}}{3\sqrt{5}-\sqrt{5}} = \dfrac{10\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \dfrac{10}{2} = 5.$

ΘΕΜΑ 2 / 7521.pdf

α) Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις και να παραστήσετε τις λύσεις τους στον άξονα των πραγματικών αριθμών:

i) $|1-2x|<5$ και (Μονάδες 9)

ii) $|1-2x| \geq 1$ (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τις ακέραιες τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 2/7521

(α) (i) $|1-2x|<5 \Leftrightarrow -5<1-2x<5 \Leftrightarrow -6<-2x<4 \Leftrightarrow$

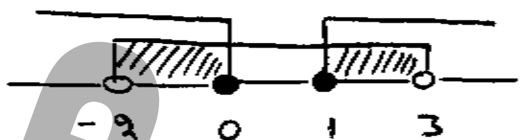
$6>2x>-4 \Leftrightarrow -4<2x<6 \Leftrightarrow -2<x<3$

Δηλαδή,

(ii) $|1-2x|\geq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-2x\geq 1 \\ \text{ή} \\ 1-2x\leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x\leq 0 \\ \text{ή} \\ 2\leq 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\leq 0 \\ \text{ή} \\ x\geq 1 \end{cases}$

Δηλαδή,

(β) Συναλήθευση:



Οπότε, οι ανισώσεις συναληθεύουν για κάθε $x\in(-2,0]\cup[1,3)$ εκ των οποίων ακέραιοι αριθμοί είναι: $x=-1,\ x=0,\ x=1,\ x=2$

ΘΕΜΑ 2 / 4318.pdf

Αν για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει $|2x-1|<1$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $0<x<1$ (Μονάδες 15)

β) Να διατάξετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τους αριθμούς:

$$1, \quad x, \quad x^2$$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2/4318

(α) Έχουμε, $|2x-1|<1 \Leftrightarrow -1<2x-1<1 \Leftrightarrow 0<2x<2 \Leftrightarrow$

$0<x<1$

(β) Είναι, $0<x<1 \Rightarrow 0<x<1 \xRightarrow{x>0} 0<x^2<x$. Επίσης, από

το (α) έχουμε: $0<x<1$, άρα $0<x^2<x<1$

ΘΕΜΑ 2/4316

(α) Έχουμε, $A \cdot B = (2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3}) = 2^2 - (\sqrt{3})^2 = 4-3 = 1.$

(β) Είναι, $A^2 + B^2 = (A+B)^2 - 2A \cdot B \overset{(\alpha)}{=}$

$$= (2-\sqrt{3}+2+\sqrt{3})^2 - 2 \cdot 1 = 4^2 - 2 = 16-2 = 14$$

ΘΕΜΑ 2 / 4314.pdf

Αν είναι $A=\sqrt[3]{5}$, $B=\sqrt{3}$, $\Gamma=\sqrt[6]{5}$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $A \cdot B \cdot \Gamma = \sqrt{15}$ (Μονάδες 15)

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς Α, Β . (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2/4314

(α) Έχουμε, $A \cdot B \cdot \Gamma = \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt[6]{5}$ $\quad$ ε.κ.π$(2,3,6)=6$

$= \sqrt[6]{5^2} \cdot \sqrt[6]{3^3} \cdot \sqrt[6]{5} = \sqrt[6]{5^2 \cdot 3^3 \cdot 5} = \sqrt[6]{5^3 \cdot 3^3} = \sqrt[6]{(5\cdot 3)^3} = \sqrt{15}$

(β) Έχουμε, $\cdot\, A = \sqrt[3]{5} = \sqrt[6]{5^2} = \sqrt[6]{25}$

$\cdot\, B = \sqrt{3} = \sqrt[6]{3^3} = \sqrt[6]{27}$

Οπότε, $A < B$.

ΘΕΜΑ 2 / 4311.pdf

Δίνονται οι παραστάσεις: $A=\sqrt{(x-2)^2}$ και $B=\sqrt[3]{(2-x)^3}$, όπου x πραγματικός αριθμός

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A; (Μονάδες 7)

β) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση B; (Μονάδες 8)

γ) Να δείξετε ότι, για κάθε $x\leq 2$, ισχύει A=B. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2/4311

(α) Για να ορίζεται η παράσταση $A=\sqrt{(x-2)^2}$ θα πρέπει: $(x-2)^2 \geq 0$ που ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα, η παράσταση A ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(β) Για να ορίζεται η παράσταση $B=\sqrt[3]{(2-x)^3}$ θα πρέπει: $(2-x)^3 \geq 0 \iff 2-x \geq 0 \iff x \leq 2$

(γ) • Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$A=\sqrt{(x-2)^2}=|x-2|=\begin{cases} x-2, & \text{αν } x>2 \\ -(x-2), & \text{αν } x \leq 2 \end{cases} = \begin{cases} x-2, & \text{αν } x>2 \\ 2-x, & \text{αν } x \leq 2 \end{cases}$$

Οπότε, αν $x \leq 2$, τότε $A=2-x$

• Αν $x \leq 2$, τότε $B=\sqrt[3]{(2-x)^3}=2-x$

Άρα, με $x \leq 2$ έχουμε $A=B$.

ΘΕΜΑ 2 / 4305.pdf

α) Να λύσετε τις ανισώσεις και να παραστήσετε τις λύσεις τους στον άξονα των πραγματικών αριθμών:

i) $|2x-3|\le 5$ (Μονάδες 9)

ii) $|2x-3|\ge 1$ (Μονάδες 9)

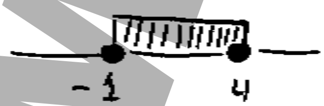
β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 2/4305

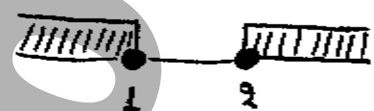
(α) (i) Έχουμε, $|2x-3| \le 5 \Leftrightarrow -5 \le 2x-3 \le 5 \Leftrightarrow -2 \le 2x \le 8$

$\Leftrightarrow -1 \le x \le 4$, δηλαδή

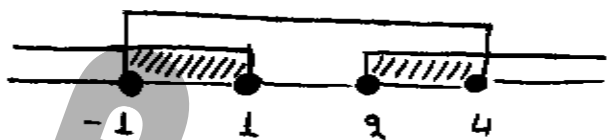


(ii) Έχουμε, $|2x-3| \ge 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3 \ge 1 \\ \text{ή} \\ 2x-3 \le -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \ge 4 \\ \text{ή} \\ 2x \le 2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x \ge 2 \\ \text{ή} \\ x \le 1 \end{cases}$, δηλαδή



(β) Συναλήθευση:



Επομένως, οι ανισώσεις ικανοποιούνται για κάθε $x \in [-1,1] \cup [2,4]$.

ΘΕΜΑ 2 / 4295.pdf

Δίνονται πραγματικοί αριθμοί *y*, για τους οποίους ισχύει: $|y-2|<1$.

α) Να αποδείξετε ότι: $y \in (1, 3)$ (Μονάδες 12)

β) Να απλοποιήσετε την παράσταση: $K=\dfrac{|y-1|+|y-3|}{2}$ (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2/4295

(α) Έχουμε, $|y-2|<1 \Leftrightarrow -1<y-2<1 \Leftrightarrow 1<y<3$

άρα $y \in (1,3)$

(β) Από (α) έχουμε:

- $1<y<3 \Rightarrow 1<y \Rightarrow y-1>0$, άρα $|y-1| = y-1$.
- $1<y<3 \Rightarrow y<3 \Rightarrow y-3<0$, άρα $|y-3| = -(y-3)$

Οπότε, $K = \dfrac{|y-1|+|y-3|}{2} = \dfrac{y-1-(y-3)}{2} = \dfrac{y-1-y+3}{2} \Leftrightarrow$

$K = 1$.

ΘΕΜΑ 2 / 3382.pdf

Δίνεται η παράσταση: $A=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

α) Να δείξετε ότι: $A=4$. (Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την εξίσωση: $|x+A|=1$. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2/3382

(α) Έχουμε, $A = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{5}+\sqrt{3}) + \sqrt{5}(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})} =$

$= \frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{5} + (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{5})^2 - \sqrt{3}\cdot\sqrt{5}}{(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{3+5}{5-3} = \frac{8}{2} = 4$

(β) Έχουμε, $|x+A| = 1 \overset{(\alpha)}{\Longleftrightarrow} |x+4| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x+4=1 \\ \text{ή} \\ x+4=-1. \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x=-3 \\ \text{ή} \\ x=-5 \end{cases}$

ΘΕΜΑ 2 / 2702.pdf

Δίνονται οι παραστάσεις:

$A=|2x-4|$ και $B=|x-3|$, όπου ο x είναι πραγματικός αριθμός.

α) Για κάθε $2\leq x<3$ να αποδείξετε ότι $A+B=x-1$. (Μονάδες 16)

β) Υπάρχει $x\in(2,3)$ ώστε να ισχύει $A+B=2$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 2/2702

(α) • Έχουμε, $2 \le x < 3 \Leftrightarrow 4 \le 2x < 6 \Leftrightarrow 0 \le 2x-4 < 2 \Rightarrow$

$2x-4 \ge 0$, άρα $|2x-4| = 2x-4$.

• Έχουμε, $2 \le x < 3 \Leftrightarrow 2-3 \le x-3 < 3-3 \Leftrightarrow -1 \le x-3 < 0$

$\Rightarrow x-3 < 0$, άρα $|x-3| = -(x-3)$.

Είναι, $A+B = |2x-4| + |x-3| = 2x-4-(x-3) = x-1$

(β) Από το (α) έχουμε ότι για κάθε $x \in [2,3)$ ισχύει: $A+B = x-1$. Οπότε, για να ισχύει $A+B=2$, πρέπει $x-1=2 \Leftrightarrow x=3$, όμως $x \in [2,3)$

Άρα, δεν υπάρχει $x \in [2,3)$ τέτοιο ώστε $A+B=2$

ΘΕΜΑ 2 / 1096.pdf

Η απόσταση *y (σε χιλιόμετρα)* ενός αυτοκινήτου από μια πόλη Α, μετά από *x λεπτά*, δίνεται από τη σχέση: $y=35+0,8x$

α) Ποια θα είναι η απόσταση του αυτοκινήτου από την πόλη Α μετά από 25 λεπτά;

(Μονάδες 12)

β) Πόσα λεπτά θα έχει κινηθεί το αυτοκίνητο, όταν θα απέχει 75 χιλιόμετρα από την πόλη Α;

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2/1096

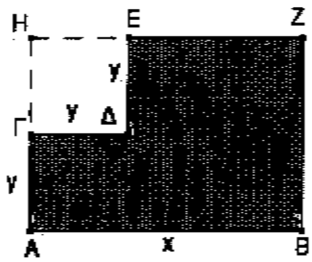
(α) Για $x = 25$, έχουμε: $y = 35 + 0,8 \cdot 25 = 35 + 20 \Leftrightarrow y = 55$ χλμ.

(β) Για $y = 75$, έχουμε: $75 = 35 + 0,8 \cdot x \Leftrightarrow 40 = 0,8 \cdot x \Leftrightarrow x = \frac{40}{0,8} \Leftrightarrow x = 50$ λεπτά

ΘΕΜΑ 2 / 1092.pdf

Από το ορθογώνιο ΑΒΖΗ αφαιρέθηκε το τετράγωνο ΓΔΕΗ *πλευράς y*.

α) Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του γραμμοσκιασμένου σχήματος ΕΖΒΑΓΔ που απέμεινε δίνεται από τη σχέση: $\Pi = 2x + 4y$



(Μονάδες 10)

β) Αν ισχύει $5<x<8$ και $1<y<2$, να βρείτε μεταξύ ποιών αριθμών βρίσκεται η τιμή της περιμέτρου του παραπάνω γραμμοσκιασμένου σχήματος. (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2/1092

(α) Έχουμε, • $(ZB) = (E\Delta) + (\Gamma A) = y + y = 2y$

• $(EZ) = (AB) - (\Gamma\Delta) = x - y$

Οπότε, $\Pi = (EZ) + (ZB) + (BA) + (A\Gamma) + (\Gamma\Delta) + (\Delta E) =$

$= x - y + 2y + x + y + y + y \Leftrightarrow \Pi = 2x + 4y.$

(β) Είναι, • $5 < x < 8 \Leftrightarrow 10 < 2x < 16$

• $1 < y < 2 \Leftrightarrow 4 < 4y < 8$ (+)

$14 < 2x + 4y < 24 \Leftrightarrow 14 < \Pi < 24.$

ΘΕΜΑ 2 / 1091.pdf

Δίνεται η παράσταση: $A=|x-1|-|x-2|$

α) Για $1<x<2$, να δείξετε ότι: $A=2x-3$ (Μονάδες 13)

β) Για $x<1$, να δείξετε ότι η παράσταση A έχει σταθερή τιμή (ανεξάρτητη του x), την οποία και να προσδιορίσετε. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2/1091

(α) Έχουμε, • $1<x<2 \Rightarrow 1<x \Leftrightarrow x-1>0$

• $1<x<2 \Rightarrow x<2 \Leftrightarrow x-2<0$

Οπότε, $A=|x-1|-|x-2| = x-1+(x-2) = 2x-3$

(β) Έχουμε, • $x<1 \Leftrightarrow x-1<0$

• $x<1 \Leftrightarrow x-2<1-2 \Leftrightarrow x-2<-1<0$

Οπότε, $A=|x-1|-|x-2| = -(x-1)+(x-2) = -x+1+x-2=-1$

ΘΕΜΑ 2 / 1089.pdf

Για κάθε πραγματικό αριθμό x με την ιδιότητα $5 < x < 10$,

α) να γράψετε τις παραστάσεις $|x-5|$ και $|x-10|$ χωρίς απόλυτες τιμές.

(Μονάδες 10)

β) να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{|x-5|}{x-5} + \frac{|x-10|}{x-10}$$

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2/1089

(α) Έχουμε, • $5 < x < 10 \Rightarrow 5 < x \Rightarrow x - 5 > 0$

• $5 < x < 10 \Rightarrow x < 10 \Rightarrow x - 10 < 0$

Οπότε, $|x-5| = x-5$ και $|x-10| = -(x-10)$

(β) Έχουμε, $A = \dfrac{|x-5|}{x-5} + \dfrac{|x-10|}{x-10} \overset{(\alpha)}{=}$

$= \dfrac{x-5}{x-5} + \dfrac{-(x-10)}{x-10} = 1 - 1 = 0$

ΘΕΜΑ 2 / 1080.pdf

Έστω *x, y* πραγματικοί αριθμοί ώστε να ισχύει: $\frac{4x+5y}{x-4y}=-2$

α) Να αποδείξετε ότι: *y=2x.* (Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A=\frac{2x^2+3y^2+xy}{xy}$$ (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2/1080

(α) Έχουμε, $\frac{4x+5y}{x-4y} = -2 \Leftrightarrow 4x+5y = -2(x-4y) \Leftrightarrow$

$4x+5y = -2x+8y \Leftrightarrow 6x = 3y \Leftrightarrow y = 2x$

(β) Είναι, $A = \frac{2x^2+3y^2+xy}{xy} \overset{(\alpha)}{=\!=} \frac{2x^2+3(2x)^2+x\cdot(2x)}{x\cdot(2x)} =$

$= \frac{2x^2+3\cdot 4x^2+2x^2}{2x^2} = \frac{4x^2+12x^2}{2x^2} = \frac{16x^2}{2x^2} = 8.$

ΘΕΜΑ 2 / 1005.pdf

Δίνονται οι παραστάσεις $A=\frac{1+x}{x-1}$ και $B=\frac{2}{x^2-x}$, όπου ο x είναι πραγματικός αριθμός.

α) Να αποδείξετε ότι για να ορίζονται ταυτόχρονα οι παραστάσεις *A, B* πρέπει:

$x\neq 1$ *και* $x\neq 0$. (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $A=B$. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2/1005

(α) Για να ορίζεται η παράσταση Α θα πρέπει:

$x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$

Για να ορίζεται η παράσταση Β θα πρέπει:

$$x^2 - x \neq 0 \Leftrightarrow x(x-1) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ \text{και} \\ x-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ \text{και} \\ x \neq 1 \end{cases}$$

Οπότε, για να ορίζονται ταυτόχρονα οι παραστάσεις Α και Β θα πρέπει $x \neq 0$ και $x \neq 1$.

(β) Με $x \neq 0$ και $x \neq 1$ έχουμε:

$$A = B \Leftrightarrow \frac{1+x}{x-1} = \frac{2}{x^2-x} \Leftrightarrow (1+x)(x^2-x) = 2(x-1) \Leftrightarrow$$

$$x(x+1)(x-1) - 2(x-1) = 0 \Leftrightarrow (x-1)\left[x(x+1) - 2\right] = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-1)(x^2+x-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = 0 \\ \text{ή} \\ x^2+x-2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 & \underline{\text{ΑΠΟΡ}} \\ \text{ή} \\ x = -2 & \underline{\text{ΔΕΚΤΟ}} \\ \text{ή} \\ x = 1 & \underline{\text{ΑΠΟΡ}} \end{cases}$$

Άρα, για $x = -2$ έχουμε $A = B$.

ΘΕΜΑ 2 / 1077.pdf

α) Να λύσετε την ανίσωση: $|x-5|<4$. (Μονάδες 10)

β) Αν κάποιος αριθμός α επαληθεύει την παραπάνω ανίσωση, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1}{9}<\frac{1}{\alpha}<1$$

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2/1077

(α) Έχουμε, $|x-5|<4 \Leftrightarrow -4<x-5<4 \Leftrightarrow$

$-4+5<x-5+5<4+5 \Leftrightarrow 1<x<9$

(β) Η παραπάνω ανίσωση ικανοποιείται για κάθε $x\in(1,9)$

Οπότε, ο α εφόσον επαληθεύει την παραπάνω ανίσωση, έχουμε $\alpha\in(1,9)$, δηλαδή $1<\alpha<9$.

$$\overset{(1)}{\Longleftrightarrow} \frac{1}{1} > \frac{1}{\alpha} > \frac{1}{9} \Leftrightarrow \frac{1}{9} < \frac{1}{\alpha} < 1$$

(1): Αν α,β ομόσημοι, να δείξετε ότι: $\alpha<\beta \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta}$

<u>Απόδειξη</u>

Οι α,β είναι ομόσημοι άρα $\alpha\beta>0$, άρα

$$\frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta} \overset{\alpha\beta>0}{\Longleftrightarrow} \alpha\beta\frac{1}{\alpha} > \alpha\beta\frac{1}{\beta} \Leftrightarrow \beta>\alpha \Leftrightarrow \alpha<\beta.$$

ΘΕΜΑ 2 / 13152

Δίνονται οι παραστάσεις: $K=2\alpha^2+\beta^2$ και $\Lambda=2\alpha\beta$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

α) Να δείξετε ότι: $K \geq \Lambda$, για κάθε τιμή των α, β . (Μονάδες 12)

β) Για ποιες τιμές των α, β ισχύει η ισότητα $K = \Lambda$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2/13152

(α) Έστω $K \geq \Lambda \Leftrightarrow 2\alpha^2+\beta^2 \geq 2\alpha\beta \Leftrightarrow 2\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow \alpha^2+\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2 \geq 0 \Leftrightarrow \alpha^2+(\alpha-\beta)^2 \geq 0$ που ισχύει,

διότι $\cdot\ \alpha^2 \geq 0$

$\cdot\ (\alpha-\beta)^2 \geq 0 \quad (+)$

$\alpha^2+(\alpha-\beta)^2 \geq 0$, για κάθε $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$.

(β) Έστω $K=\Lambda \Leftrightarrow 2\alpha^2+\beta^2=2\alpha\beta \Leftrightarrow 2\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=0$

$\Leftrightarrow \alpha^2+\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=0 \Leftrightarrow \alpha^2+(\alpha-\beta)^2=0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \alpha^2=0 \\ \text{και} \\ (\alpha-\beta)^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=0 \\ \text{και} \\ \alpha-\beta=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=0 \\ \text{και} \\ \alpha=\beta. \end{cases} \Leftrightarrow \alpha=\beta=0$$

Επομένως, η ισότητα $K=\Lambda$ ισχύει, αν και μόνο αν, $\alpha=\beta=0$.

ΘΕΜΑ 2 / 1062.pdf

α) Να βρείτε για ποιες πραγματικές τιμές του y ισχύει : $|y-3|<1$.

(Μονάδες 12)

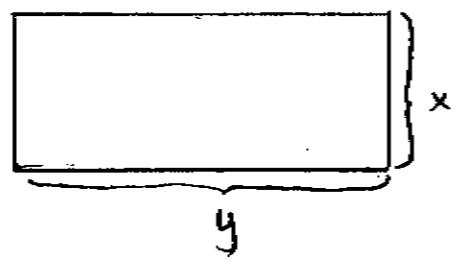
β) Αν x, y είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, με $1<x<3$ και $2<y<4$, τότε να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή του εμβαδού E του ορθογωνίου. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2/1062

(α) Έχουμε, $|y-3|<1 \Leftrightarrow -1<y-3<1 \Leftrightarrow$

$-1+3<y-3+3<1+3 \Leftrightarrow 2<y<4$

(β) Το εμβαδόν Ε του διπλανού ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι ίσο με $E = x \cdot y$. (1)



Είναι,

$$\begin{array}{l} \bullet\ 1<x<3 \\ \bullet\ 2<y<4 \quad (\cdot) \\ \hline 2<xy<12 \end{array} \xLeftrightarrow{(1)} 2<E<12$$

ΘΕΜΑ 2 / 1039.pdf

α) Να λύσετε την ανίσωση $|x-1| \geq 5$. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τους αριθμούς x που απέχουν από το 5 απόσταση μικρότερη του 3. (Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των (α) και (β). (Μονάδες 8)

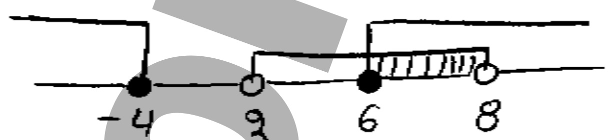
ΘΕΜΑ 2/1039

(α) Έχουμε, $|x-1| \geq 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 5 \\ ή \\ x-1 \leq -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 6 \\ ή \\ x \leq -4 \end{cases}$

(β) Έχουμε, $d(x,5) < 3 \Leftrightarrow |x-5| < 3 \Leftrightarrow -3 < x-5 < 3$

$\Leftrightarrow -3+5 < x-5+5 < 3+5 \Leftrightarrow 2 < x < 8$

(γ) <u>Συναλήθευση</u>:



Επομένως, οι παραπάνω ανισώσεις ικανοποιούνται συγχρόνως <u>ή</u> γίνονται αληθείς συγχρόνως για κάθε $x \in [6,8)$

ΘΕΜΑ 2 / 1009.pdf

Δίνεται η παράσταση: $A=|3x-6|+2$, όπου ο x είναι πραγματικός αριθμός.

α) Να αποδείξετε ότι

i) για κάθε $x\geq 2$, $A=3x-4$

ii) για κάθε $x<2$, $A=8-3x$. (Μονάδες 12)

β) Αν για τον x ισχύει ότι $x\geq 2$ να αποδείξετε ότι:

$$\frac{9x^2-16}{|3x-6|+2}=3x+4$$

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2/1009

(α) Έστω η παράσταση: $A = |3x-6| + 2$.

Η τιμή που μηδενίζει το απόλυτο είναι το 2, δηλαδή

(ii) Αν $x < 2$, τότε η παράσταση Α γίνεται:

$$A = -(3x-6) + 2 = -3x + 6 + 2 = -3x + 8$$

(i) Αν $x \geq 2$, τότε η παράσταση Α γίνεται:

$$A = (3x-6) + 2 = 3x - 4$$

(β) Αφού $x \geq 2$, τότε $A = 3x-4$ από (α), άρα

$$\frac{9x^2-16}{|3x-6|+2} = \frac{9x^2-16}{A} \underset{(\alpha)}{\overset{x\geq 2}{=}} \frac{9x^2-16}{3x-4} = \frac{(3x)^2-4^2}{3x-4} =$$

$$= \frac{(3x-4)(3x+4)}{3x-4} = 3x+4$$

ΘΕΜΑ 2 / 1074.pdf

α) Να βρείτε για ποιες πραγματικές τιμές του *y* ισχύει : $|y-3|<1$. (Μονάδες 12)

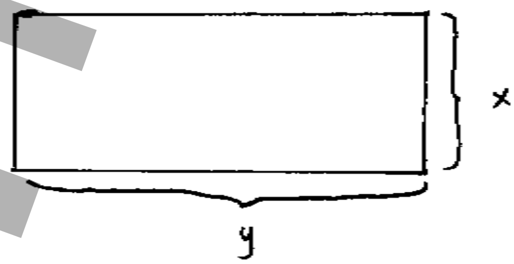
β) Αν *x, y* είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, με $1<x<3$ και $2<y<4$, τότε να αποδείξετε ότι: $6<\Pi<14$, όπου *Π* είναι η περίμετρος του ορθογωνίου. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2/1074

(α) Έχουμε, $|y-3|<1 \Leftrightarrow -1<y-3<1 \Leftrightarrow -1+3<y-3+3<1+3$

$\Leftrightarrow 2<y<4$

(β) Η περίμετρος Π του διπλανού ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι ίση με $\Pi = x+x+y+y = 2x+2y \Leftrightarrow \Pi = 2(x+y)$ (1)



Δηλαδή,
$$\begin{array}{l} \bullet\ 1<x<3 \\ \bullet\ 2<y<4 \quad (+) \\ \hline 3<x+y<7 \Leftrightarrow 2\cdot 3 < 2(x+y) < 2\cdot 7 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \\ 6<\Pi<14 \end{array}$$

ΘΕΜΑ 4 / 8453.pdf

Για τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι

- $|\alpha - 2| < 1$
- $|\beta - 3| \leq 2$

α) Να αποδειχθεί ότι $1 < \alpha < 3$. (Μονάδες 4)

β) Να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται ο β . (Μονάδες 5)

γ) Να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η παράσταση $2\alpha - 3\beta$.

(Μονάδες 7)

δ) Να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η παράσταση $\frac{\alpha}{\beta}$.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4/8453

(α) Έχουμε, $|\alpha-2|<1 \Leftrightarrow -1<\alpha-2<1 \Leftrightarrow 1<\alpha<3$

(β) Έχουμε, $|\beta-3| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq \beta-3 \leq 2 \Leftrightarrow 1 \leq \beta \leq 5$

(γ) • $1<\alpha<3 \Leftrightarrow$

$$2<2\alpha<6$$

• $1 \leq \beta \leq 5 \Leftrightarrow -3 \geq -3\beta \geq -15 \Leftrightarrow$

$$-15 \leq -3\beta \leq -3 \quad (+)$$

$$-13 < 2\alpha-3\beta < 3$$

(δ) (*) <u>Πρόταση</u>: Αν α,β ομόσημοι αριθμοί, να δείξετε ότι $\alpha<\beta \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta}$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>

Οι α,β είναι ομόσημοι, άρα $\alpha\beta>0$, οπότε

$$\frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta} \xLeftrightarrow{\alpha\beta>0} \alpha\beta\frac{1}{\alpha} > \alpha\beta\frac{1}{\beta} \Leftrightarrow \beta > \alpha$$

• $1 < \alpha < 3$

• $1 \leq \beta \leq 5 \xLeftrightarrow{(*)} \frac{1}{1} \geq \frac{1}{\beta} \geq \frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{1}{5} \leq \frac{1}{\beta} \leq 1 \quad (\times)$

$$\frac{1}{5} < \frac{\alpha}{\beta} < 3$$

ΘΕΜΑ 4 / 8443.pdf

α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύει $|x-4|<2$.

(Μονάδες 10)

β) Θεωρούμε πραγματικό αριθμό x που η απόστασή του από το 4 στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι μικρότερη από 2.

i) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του τριπλάσιου του αριθμού αυτού από το 4 είναι μεγαλύτερη του 2 και μικρότερη του 14.

(Μονάδες 5)

ii) Να βρείτε μεταξύ ποιων ορίων περιέχεται η τιμή της απόστασης του $3x$ από το 19.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4/8443

(α) Έχουμε, $|x-4|<2 \Leftrightarrow -2<x-4<2 \Leftrightarrow$
$-2+4<x-4+4<2+4 \Leftrightarrow 2<x<6$

(β) Θεωρούμε πραγματικό αριθμό x που η απόστασή του από το 4 στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι μικρότερη από 2, άρα
$d(x,4)<2 \Leftrightarrow |x-4|<2$.

(i) Έχουμε, $|x-4|<2 \overset{(α)}{\Leftrightarrow} 2<x<6 \Leftrightarrow 3\cdot 2<3x<3\cdot 6 \Leftrightarrow$
$6<3x<18 \Leftrightarrow 6-4<3x-4<18-4 \Leftrightarrow 2<3x-4<14$.

Οπότε, $3x-4>0$ (1)

Έχουμε, $d(3x,4)=|3x-4| \overset{(1)}{=} 3x-4$ (2)

Άρα, $2<3x-4<14 \Leftrightarrow 2<d(3x,4)<14$

(ii) Έχουμε, $|x-4|<2 \overset{(α)}{\Leftrightarrow} 2<x<6 \Leftrightarrow 3\cdot 2<3\cdot x<3\cdot 6 \Leftrightarrow$
$6<3x<18 \Leftrightarrow 6-19<3x-19<18-19 \Leftrightarrow -13<3x-19<-1$.

Οπότε, $3x-19<0$ (3)

Έχουμε, $d(3x,19)=|3x-19| \overset{(3)}{=} -(3x-19) \Leftrightarrow -d(3x,19)=3x-19$

Άρα, $-13<3x-19<-1 \Leftrightarrow -13<-d(3x,19)<-1 \Leftrightarrow$
$13>d(3x,19)>1 \Leftrightarrow 1<d(3x,19)<13$.

ΘΕΜΑ 4 / 7791.pdf

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α και β για τους οποίους ισχύει η ανίσωση:

$$(\alpha-1)(1-\beta)>0$$

α) Να αποδείξετε ότι το *1* είναι μεταξύ των *α, β*. (Μονάδες 13)

β) Αν επιπλέον $|\beta - \alpha| = 4$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$K= |\alpha - 1| + |1 - \beta|$$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας είτε γεωμετρικά είτε αλγεβρικά (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 4/7791

(α) Έχουμε, $(\alpha-1)(1-\beta)>0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \begin{cases} \alpha-1>0 \\ \text{και} \\ 1-\beta>0 \end{cases} \quad (1) \\ \text{ή} \\ \begin{cases} \alpha-1<0 \\ \text{και} \\ 1-\beta<0 \end{cases} \quad (2) \end{array}\right.$

• Η (1) γίνεται: $\begin{cases} \alpha-1>0 \\ \text{και} \\ 1-\beta>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha>1 \\ \text{και} \\ \beta<1 \end{cases}$ Άρα, $\beta<1<\alpha$

• Η (2) γίνεται: $\begin{cases} \alpha-1<0 \\ \text{και} \\ 1-\beta<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha<1 \\ \text{και} \\ \beta>1 \end{cases}$ Άρα, $\alpha<1<\beta$

Επομένως, το 1 είναι μεταξύ των α και β.

(β) <u>Αλγεβρικά</u>:

► Αν $\beta<1<\alpha$, τότε ...

• $1<\alpha \Leftrightarrow \alpha-1>0$, άρα $|\alpha-1|=\alpha-1$ (1)

• $\beta<1 \Leftrightarrow 1-\beta>0$, άρα $|1-\beta|=1-\beta$. (2)

• $\beta<\alpha \Leftrightarrow \beta-\alpha<0$, άρα $|\beta-\alpha|=-(\beta-\alpha)$, δηλαδή

$|\beta-\alpha|=4 \Leftrightarrow -(\beta-\alpha)=4 \Leftrightarrow \alpha-\beta=4$ (3)

Άρα, $K=|\alpha-1|+|1-\beta| \overset{(1)}{\underset{(2)}{=}} \alpha-1+1-\beta=\alpha-\beta \overset{(3)}{=} 4$

► Αν $\alpha<1<\beta$, τότε

• $\alpha<1 \Leftrightarrow \alpha-1<0$, άρα $|\alpha-1|=-(\alpha-1)$ (4)

• $1<\beta \Leftrightarrow 1-\beta<0$, άρα $|1-\beta|=-(1-\beta)$ (5)

• $\alpha<\beta \Leftrightarrow \beta-\alpha>0$, άρα $|\beta-\alpha|=\beta-\alpha$, δηλαδή

$|\beta-\alpha| = 4 \iff \beta-\alpha = 4 \quad (6)$

Άρα, $K = |\alpha-1| + |1-\beta| \overset{(4)}{\underset{(5)}{=}} -(\alpha-1) - (1-\beta) = -\alpha+1-1+\beta =$

$$= \beta - \alpha \overset{(6)}{=} 4$$

<u>Γεωμετρικά</u>:

- Έστω $\alpha < 1 < \beta$ και ότι αντιστοιχίζονται στα σημεία A, M, B αντίστοιχα.

Τότε $(AB) = (AM) + (MB) \iff d(\alpha,\beta) = d(\alpha,1) + d(1,\beta) \iff$

$|\beta-\alpha| = |1-\alpha| + |\beta-1| \iff |\beta-\alpha| = |\alpha-1| + |\beta-1| \iff$

$4 = K$, δηλαδή $K = 4$

- Ομοίως, αν $\beta < 1 < \alpha$ ...

ΘΕΜΑ 4 / 2287.pdf

Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός x που ικανοποιεί τη σχέση: $d(x, 5) \leq 9$.

α) Να αποδώσετε την παραπάνω σχέση λεκτικά. (Μονάδες 5)

β) Με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών, να παραστήσετε σε μορφή διαστήματος το σύνολο των δυνατών τιμών του x. (Μονάδες 5)

γ) Να γράψετε τη σχέση με το σύμβολο της απόλυτης τιμής και να επιβεβαιώσετε με αλγεβρικό τρόπο το συμπέρασμα του ερωτήματος (β). (Μονάδες 10)

δ) Να χρησιμοποιήσετε το συμπέρασμα του ερωτήματος (γ) για να δείξετε ότι:

$$|x+4| + |x-14| = 18$$ (Μονάδες 5)

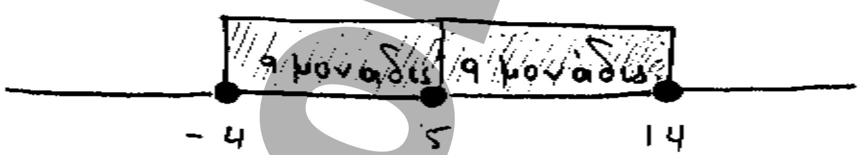
ΘΕΜΑ 4/2287

(α) Η απόσταση του x από το 5 είναι μικρότερη ή ίση του 9.

(β),(γ) Έχουμε, $d(x,5) \le 9 \Leftrightarrow |x-5| \le 9 \Leftrightarrow -9 \le x-5 \le 9 \Leftrightarrow$

$-9+5 \le x-5+5 \le 9+5 \Leftrightarrow -4 \le x \le 14$

ή αλλιώς:



(δ) Από το (γ) έχουμε: $-4 \le x \le 14$

- $-4 \le x \Leftrightarrow x+4 \ge 0$, άρα $|x+4| = x+4$
- $x \le 14 \Leftrightarrow x-14 \le 0$, άρα $|x-14| = -(x-14)$

Οπότε, $|x+4|+|x-14| = x+4-(x-14) = x+4-x+14 = 18$.

ΘΕΜΑ 4 / 2234.pdf

Για τη μέτρηση θερμοκρασιών χρησιμοποιούνται οι κλίμακες βαθμών Κελσίου (Celsius), Φαρενάιτ (Fahrenheit) και Κέλβιν (Kelvin). Οι μετατροπές της θερμοκρασίας από Κελσίου σε Φαρενάιτ και από Κελσίου σε Κέλβιν, περιγράφονται από τις προτάσεις Π1 και Π2:

Π1: *Για να μετατρέψουμε τη θερμοκρασία από βαθμούς Κελσίου (^0C) σε βαθμούς Φαρενάιτ (^0F), πολλαπλασιάζουμε τους βαθμούς Κελσίου με 1,8 και προσθέτουμε 32.*

Π2: *Για να μετατρέψουμε τη θερμοκρασία από βαθμούς Κελσίου (^0C) σε βαθμούς Κέλβιν (^0K), προσθέτουμε στους βαθμούς Κελσίου (^0C) το 273.*

α) Να εκφράσετε συμβολικά τη σχέση που περιγράφει η κάθε πρόταση.

(Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση που παριστάνει τη σχέση μεταξύ της θερμοκρασίας σε βαθμούς Κέλβιν (^0K) και της θερμοκρασίας σε βαθμούς Φαρενάιτ (^0F) είναι η:

$$K = \frac{F-32}{1,8} + 273$$

(Μονάδες 7)

γ) Στη διάρκεια μιας νύχτας η θερμοκρασία σε μια πόλη κυμάνθηκε από *278* ^0K μέχρι *283* ^0K. Να βρείτε το διάστημα μεταβολής της θερμοκρασίας σε ^0F.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4/2234

(α) Έχουμε, $F = 1{,}8 \cdot C + 32$ (1) (βαθμοί Φαρενάιτ)

$K = C + 273$ (2) (βαθμοί Κέλβιν).

(β) Από την (1) έχουμε: $F = 1{,}8 \cdot C + 32 \Leftrightarrow 1{,}8C = F - 32$

$\Leftrightarrow C = \dfrac{F-32}{1{,}8}$ (3)

Οπότε, $K = C + 273 \xrightarrow{(3)} K = \dfrac{F-32}{1{,}8} + 273.$

(γ) Έχουμε, $278 \leq K \leq 283 \overset{(\beta)}{\Leftrightarrow} 278 \leq \dfrac{F-32}{1{,}8} + 273 \leq 283$

$\Leftrightarrow 5 \leq \dfrac{F-32}{1{,}8} \leq 10 \Leftrightarrow 5 \cdot 1{,}8 \leq 1{,}8 \, \dfrac{F-32}{1{,}8} \leq 10 \cdot 1{,}8 \Leftrightarrow$

$9 \leq F - 32 \leq 18 \Leftrightarrow 32 + 9 \leq F - 32 + 32 \leq 18 + 32 \Leftrightarrow$

$41 \leq F \leq 50$