ΘΕΜΑ 2 / 18575 ΕΥΘΕΙΑ

Δίνονται τα σημεία $A(1,2)$ και $B(5,6)$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία A και B.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι η μεσοκάθετος ε του ευθυγράμμου τμήματος AB έχει εξίσωση την $\psi=-\chi+7$

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2 18575

ΛΥΣΗ

α) Η ευθεία ΑΒ έχει κλίση $\lambda_{AB} = \frac{6-2}{5-1} = \frac{4}{4} = 1$

και εξίσωση ΑΒ: $y-2 = 1(x-1) \Leftrightarrow y = x+1$

β) Το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ έχει μέσο το σημείο

$M\left(\frac{1+5}{2}, \frac{2+6}{2}\right)$ ή $M(3,4)$

Η μεσοκάθετη ε είναι κάθετη στην ΑΒ, οπότε:

$\varepsilon \perp AB \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon \cdot \lambda_{AB} = -1 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon \cdot 1 = -1 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = -1$

Η ε με κλίση -1, που διέρχεται από το σημείο

$M(3,4)$ έχει εξίσωση

$\varepsilon: y-4 = -1(x-3) \Leftrightarrow y = -x+7$

ΘΕΜΑ 2 / 18584 ΕΥΘΕΙΑ

Δίνονται οι παράλληλες ευθείες $\varepsilon_1: \chi-2\psi-8=0$, $\varepsilon_2: 2\chi-4\psi+10=0$ και το σημείο A της ε_1 που έχει τετμημένη το 4.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου A.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε η οποία διέρχεται από το σημείο A και είναι κάθετη στην ευθεία ε_1

(Μονάδες 10)

γ) Αν B είναι το σημείο τομής των ευθειών ε και ε_2, τότε να βρείτε τις συντεταγμένες του B.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2-18584

ΛΥΣΗ

(α) Εστω $A(4, y_A)$

Εχουμε ότι: $A \in \varepsilon_1 \Leftrightarrow 4-2y_A-8=0 \Leftrightarrow -2y_A=4 \Leftrightarrow y_A=-2$

Αρα $A(4,-2)$

(β) $\varepsilon_1: x-2y-8=0 \Leftrightarrow -2y=-x+8 \Leftrightarrow y=\frac{1}{2}x-4$ με $\lambda_{\varepsilon_1}=\frac{1}{2}$

Εχουμε ότι:

$\varepsilon \perp \varepsilon_1 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon \cdot \lambda_{\varepsilon_1}=-1 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon \cdot \frac{1}{2}=-1 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon=-2$

Η ευθεία ε με κλίση −2, που διέρχεται από το σημείο $A(4,-2)$ έχει εξίσωση

$\varepsilon: y+2=-2(x-4) \Leftrightarrow y+2=-2x+8 \Leftrightarrow y=-2x+6$

(γ) Οι συντεταγμένες του Β προκύπτουν από τη λύση του συστήματος, που ορίζουν οι εξισώσεις των ευθειών ε και ε_2, δηλαδή

$$\begin{cases} y=-2x+6 \\ 2x-4y+10=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2x+6 \\ 2x-4(-2x+6)+10=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y=-2x+6 \\ 2x+8x-24+10=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2x+6 \\ 10x=14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2\frac{7}{5}+6=-\frac{14}{5}+\frac{30}{5}=\frac{16}{5} \\ x=\frac{7}{5} \end{cases}$$

Αρα $B\left(\frac{7}{5},\frac{16}{5}\right)$

ΘΕΜΑ 2 / 18587 ΕΥΘΕΙΑ

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : \chi - 8\psi + 16 = 0$ και $\varepsilon_2 : 2\chi + \psi + 15 = 0$ οι οποίες τέμνονται στο σημείο M.

Αν οι ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνουν τον άξονα $\psi'\psi$ στα σημεία A και B αντίστοιχα, τότε:

α) να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων M, A και B

(Μονάδες 10)

β) αν K είναι το μέσο του τμήματος AB, να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης του διανύσματος $\overrightarrow{MK}$

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2 18587

ΛΥΣΗ

α) Το σημείο τομής των ε_1 και ε_2 έχει ως συντεταγμένες τη λύση του συστήματος:

$$\begin{cases} x-8y+16=0 \\ 2x+y+15=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-8y=-16 \\ 2x+y=-15 \end{cases}$$

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -8 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=1+16=17, \quad D_x=\begin{vmatrix} -16 & -8 \\ -15 & 1 \end{vmatrix}=-16-120=-136$$

$$D_y=\begin{vmatrix} 1 & -16 \\ 2 & -15 \end{vmatrix}=-15+32=17$$

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{-136}{17}=-8, \quad y=\frac{D_y}{D}=\frac{17}{17}=1 \qquad (x,y)=(-8,1)$$

Άρα $M(-8,1)$ είναι το σημείο τομής των ε_1 και ε_2.

- Στην ε_1 για $x=0$ έχουμε: $-8y+16=0 \Leftrightarrow y=2$, άρα $A(0,2)$
- Στην ε_2 για $x=0$ έχουμε: $y+15=0 \Leftrightarrow y=-15$, άρα $B(0,-15)$

β) Είναι $K\left(\frac{0+0}{2}, \frac{2-15}{2}\right)$ ή $K\left(0,-\frac{13}{2}\right)$

Άρα $\vec{MK}=\left(0+8,-\frac{13}{2}-1\right)=\left(8,-\frac{15}{2}\right)$

ΘΕΜΑ 2 / 18589 ΕΥΘΕΙΑ

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : 8\chi + \psi - 28 = 0$ και $\varepsilon_2 : \chi - \psi + 1 = 0$ οι οποίες τέμνονται στο σημείο M.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου M και, στη συνέχεια, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το M και είναι κάθετη στον άξονα $\chi'\chi$.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες που διέρχονται από το M και έχουν συντελεστή διεύθυνσης λ έχουν εξίσωση την: $\lambda\chi - \psi - 3\lambda + 4 = 0$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2 18589

ΛΥΣΗ

α) Το σημείο τομής των ε_1 και ε_2 έχει ως συντεταγμένες τη λύση του συστήματος:

$$\begin{cases} 8x+y-28=0 \\ x-y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x+y-28+x-y+1=0+0 \\ x-y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 9x=27 \\ x-y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ 3-y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases} \quad (x,y)=(3,4)$$

Άρα $M(3,4)$

Η ευθεία που διέρχεται από το M και είναι κάθετη στον άξονα $x'x$ έχει εξίσωση $\varepsilon: x=3$

β) Οι ευθείες με συντελεστή διεύθυνσης λ, που διέρχονται από το M έχουν εξίσωση:

$$y-4=\lambda(x-3) \Leftrightarrow y-4=\lambda x-3\lambda \Leftrightarrow \lambda x-y-3\lambda+4=0$$

ΘΕΜΑ 2 / 18592 ΕΥΘΕΙΑ

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : \chi - 3\psi + 5 = 0$ και $\varepsilon_2 : 3\chi + \psi - 5 = 0$

α) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι κάθετες μεταξύ τους.

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής A των ευθειών ε_1 και ε_2

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο A και την αρχή O των αξόνων.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 2 18592

ΛΥΣΗ

α) $\varepsilon_1: x-3y+5=0 \Leftrightarrow -3y=-x-5 \Leftrightarrow y=\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$

$\varepsilon_2: 3x+y-5=0 \Leftrightarrow y=-3x+5$

Έχουμε ότι:

$\lambda_{\varepsilon_1}\cdot\lambda_{\varepsilon_2}=\frac{1}{3}(-3)=-1$, άρα $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$

β) Το σημείο τομής των ε_1 και ε_2 έχει ως συντεταγμένες τη λύση του συστήματος:

$$\begin{cases} y=\frac{1}{3}x+\frac{5}{3} \\ y=-3x+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{3}x+\frac{5}{3}=-3x+5 \\ y=-3x+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+5=-9x+15 \\ \dots \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 10x=10 \\ \dots \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-3\cdot1+5=2 \end{cases} \quad \text{οπότε } (x,y)=(1,2)$$

Άρα ε_1 και ε_2 τέμνονται στο σημείο $A(1,2)$

γ) Η ζητούμενη ευθεία ε, που διέρχεται από τα σημεία $A(1,2)$ και $O(0,0)$

έχει κλίση $\lambda_1=\frac{2-0}{1-0}=2$

και εξίσωση $\varepsilon: y=2x$

ΘΕΜΑ 2 / 18595 ΕΥΘΕΙΑ

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : 3\chi + \psi + 3 = 0$ και $\varepsilon_2 : \chi + 2\psi - 4 = 0$

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής A των ευθειών ε_1 και ε_2

(Μονάδες 8)

β) Αν η ευθεία ε_1 τέμνει τον άξονα $\psi'\psi$ στο σημείο B και η ευθεία ε_2 τέμνει τον άξονα $\chi'\chi$ στο σημείο Γ, τότε:

i) να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων B και Γ.

(Μονάδες 8)

ii) να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία B και Γ έχει εξίσωση την $3\chi - 4\psi - 12 = 0$

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 2 18595

ΛΥΣΗ

α) Το σημείο τομής των ε_1 και ε_2 έχει ως συντεταγμένες τη λύση του συστήματος:

$$\begin{cases} 3x+y+3=0 \\ x+2y-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+y=-3 \\ x+2y=4 \end{cases}$$

$D=\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=6-1=5$, $D_x=\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}=-6-4=-10$, $D_y=\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}=12+3=15$

$x=\dfrac{D_x}{D}=\dfrac{-10}{5}=-2$, $y=\dfrac{D_y}{D}=\dfrac{15}{5}=3$, οπότε $(x,y)=(-2,3)$

Άρα ε_1 και ε_2 τέμνονται στο σημείο $A(-2,3)$

β) i) • Στην ε_1 για $x=0$ προκύπτει: $y+3=0 \Leftrightarrow y=-3$

Άρα $B(0,-3)$

• Στην ε_2 για $y=0$ προκύπτει: $x-4=0 \Leftrightarrow x=4$

Άρα $\Gamma(4,0)$

ii) Η ευθεία ΒΓ έχει κλίση $\lambda_{B\Gamma}=\dfrac{0+3}{4-0}=\dfrac{3}{4}$ και διέρχεται από το σημείο $\Gamma(4,0)$, άρα έχει εξίσωση

$B\Gamma:\ y-0=\dfrac{3}{4}(x-4) \Leftrightarrow 4y=3x-12 \Leftrightarrow 3x-4y-12=0$

ΘΕΜΑ 2 / 18600 ΕΥΘΕΙΑ

Θεωρούμε την ευθεία ε_1 που τέμνει τους άξονες $\chi'\chi$ και $\psi'\psi$ στα σημεία $A(3,0)$ και $B(0,6)$ αντίστοιχα.

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε_1

(Μονάδες 8)

β) Αν ε_2 είναι η ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και είναι κάθετη στην ε_1, τότε να βρείτε:

i) την εξίσωση της ευθείας ε_2

(Μονάδες 9)

ii) τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών ε_1 και ε_2

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 2 18600

ΛΥΣΗ

α) Η ευθεία $ε_1$ έχει κλίση $λ_{ε_1}=\frac{6-0}{0-3}=\frac{6}{-3}=-2$

και διέρχεται από το σημείο $A(3,0)$, άρα έχει εξίσωση

$ε_1: y-0=-2(x-3) \Leftrightarrow y=-2x+6$

β) i) Έχουμε ότι:

$ε_1 \perp ε_2 \Leftrightarrow λ_{ε_1}\cdot λ_{ε_2}=-1 \Leftrightarrow -2\cdot λ_{ε_2}=-1 \Leftrightarrow λ_{ε_2}=\frac{1}{2}$

Η $ε_2$ διέρχεται από το $O(0,0)$, άρα έχει εξίσωση

$ε_2: y=\frac{1}{2}x$

ii) Το κοινό σημείο των $ε_1$ και $ε_2$ έχει συντεταγμένες τη λύση του συστήματος

$$\begin{cases} y=-2x+6 \\ y=\frac{1}{2}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{1}{2}x \\ -2x+6=\frac{1}{2}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cdots\cdots \\ -4x+12=x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{1}{2}x \\ -5x=-12 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y=\frac{1}{2}\cdot\frac{12}{5}=\frac{6}{5} \\ x=\frac{12}{5} \end{cases}$$ οπότε $(x,y)=\left(\frac{12}{5},\frac{6}{5}\right)$

Άρα $ε_1$ και $ε_2$ τέμνονται στο σημείο $Γ\left(\frac{12}{5},\frac{6}{5}\right)$

ΘΕΜΑ 2 / 18601 ΕΥΘΕΙΑ

Έστω $M(3,5)$ το μέσο ευθυγράμμου τμήματος AB με $A(1,1)$.

α) Να βρείτε:

i) τις συντεταγμένες του σημείου B.

(Μονάδες 6)

ii) την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία A και B.

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες σημείου K του άξονα $x'x$ έτσι, ώστε να ισχύει $(KA)=(KB)$.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2 18601

ΛΥΣΗ

α) i) Έστω $B(x_B, y_B)$. Τότε έχουμε:

$$\begin{cases} \dfrac{1+x_B}{2}=3 \\ \dfrac{1+y_B}{2}=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+x_B=6 \\ 1+y_B=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B=5 \\ y_B=9 \end{cases}$$

Άρα $B(5,9)$

ii) Η ευθεία ΑΒ έχει κλίση: $\lambda_{AB}=\dfrac{9-1}{5-1}=\dfrac{8}{4}=2$

και διέρχεται από το σημείο $A(1,1)$, άρα έχει εξίσωση

$AB: \ y-1=2(x-1) \Leftrightarrow y=2x-1$

β) Έστω $K(x_0,0)\in x'x$. Τότε έχουμε:

$(KA)=(KB) \Leftrightarrow \sqrt{(x_0-1)^2+(0-1)^2}=\sqrt{(x_0-5)^2+(0-9)^2} \Leftrightarrow$

$x_0^2-2x_0+1+1=x_0^2-10x_0+25+81 \Leftrightarrow 8x_0=104 \Leftrightarrow$

$x_0=\dfrac{104}{8} \Leftrightarrow x_0=13$

ΘΕΜΑ 2 / 18602 ΕΥΘΕΙΑ

Δίνεται η ευθεία (ε): $y+x=1$ και το σημείο $A(2,-4)$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το Α και είναι κάθετη στην (ε).

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε την προβολή του σημείου Α πάνω στην ευθεία (ε). (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2 18602

ΛΥΣΗ

α) $\varepsilon: y+x=1 \Leftrightarrow y=-x+1$

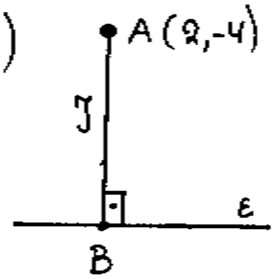
Έστω ζ η ζητούμενη ευθεία.

Έχουμε ότι: $\zeta \perp \varepsilon \Leftrightarrow \lambda_\zeta \cdot \lambda_\varepsilon = -1 \Leftrightarrow \lambda_\zeta (-1) = -1 \Leftrightarrow \lambda_\zeta = 1$

Οπότε η ευθεία ζ με κλίση 1, που διέρχεται από το σημείο $A(2,-4)$ έχει εξίσωση

$\zeta: y+4 = 1(x-2) \Leftrightarrow y = x-6$

β)



Έστω B η προβολή του A στην ευθεία ε.
Οι συντεταγμένες του B προκύπτουν από τη λύση του συστήματος:

$$\begin{cases} y=-x+1 \\ y=x-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x+1 \\ 2y=-x+1+x-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x+1 \\ 2y=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{5}{2}=-x+1 \\ y=-\frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -5=-2x+2 \\ y=-\frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{7}{2} \\ y=-\frac{5}{2} \end{cases}$$

Άρα $B\left(\frac{7}{2}, -\frac{5}{2}\right)$

ΘΕΜΑ 4 / 18610 ΕΥΘΕΙΑ

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : 2\chi - \psi - 10\lambda + 16 = 0$ και $\varepsilon_2 : 10\chi + \psi - 2\lambda - 4 = 0$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή της παραμέτρου λ οι ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνονται, και να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής τους M

(Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή της παραμέτρου λ το σημείο M ανήκει στην ευθεία $\varepsilon : 8\chi + \psi - 6 = 0$

(Μονάδες 7)

γ) Αν η ευθεία ε τέμνει τους άξονες $\chi'\chi$ και $\psi'\psi$ στα σημεία A και B αντίστοιχα, τότε:

i) να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ζ που διέρχεται από την αρχή O των αξόνων και είναι παράλληλη προς την ευθεία AB

(Μονάδες 5)

ii) αν K είναι τυχαίο σημείο της ευθείας ζ, να αποδείξετε ότι $(KAB) = \frac{9}{4}$

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4 18610

ΛΥΣΗ

α) Το κοινό σημείο των ευθειών ε_1 και ε_2 έχει ως συντεταγμένες τη λύση του συστήματος

$$\begin{cases} 2x-y-10\lambda+16=0 \\ 10x+y-2\lambda-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y=10\lambda-16 \\ 10x+y=2\lambda+4 \end{cases}$$

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 10 & 1 \end{vmatrix}=2+10=12\neq 0$$

Το σύστημα έχει μοναδική λύση, για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$, άρα για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ οι ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνονται

$$D_x=\begin{vmatrix} 10\lambda-16 & -1 \\ 2\lambda+4 & 1 \end{vmatrix}=10\lambda-16+2\lambda+4=12\lambda-12=12(\lambda-1)$$

$$D_y=\begin{vmatrix} 2 & 10\lambda-16 \\ 10 & 2\lambda+4 \end{vmatrix}=4\lambda+8-100\lambda+160=-96\lambda+168=12(-8\lambda+14)$$

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{12(\lambda-1)}{12}=\lambda-1\ ,\quad y=\frac{D_y}{D}=\frac{12(-8\lambda+14)}{12}=-8\lambda+14$$

Άρα $M(\lambda-1,-8\lambda+14)$ είναι το σημείο τομής.

β) Έστω $M(x,y)$ σημείο του γεωμετρικού τόπου. Τότε:

$$\begin{cases} x=\lambda-1 \\ y=-8\lambda+14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x=8\lambda-8 \\ y=-8\lambda+14 \end{cases}$$

Με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει:

$$8x+y=6 \Leftrightarrow 8x+y-6=0$$

Άρα, για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ ο γ.τ. των σημείων M είναι η ευθεία $\varepsilon: 8x+y-6=0$

γ) Στην ε για $x=0$ είναι $y-6=0 \Leftrightarrow y=6$, άρα $B(0,6)$

Στην ε για $y=0$ είναι $8x-6=0 \Leftrightarrow x=\frac{3}{4}$, άρα $A(\frac{3}{4},0)$

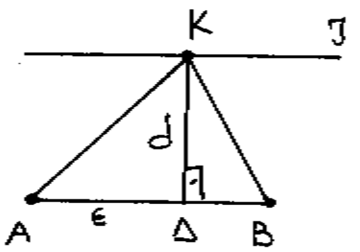
i) Η ευθεία AB έχει κλίση $\lambda_{AB}=\dfrac{6-0}{0-\frac{3}{4}}=-\dfrac{6\cdot 4}{3}=-8=\lambda_\varepsilon$

Η ευθεία ζ με κλίση $\lambda_\zeta=\lambda_{AB}=-8$, που διέρχεται από το $O(0,0)$ έχει εξίσωση $\zeta: y=-8x$

ΘΕΜΑ 4 18610

ΛΥΣΗ (συνέχεια)

ii)



Έχουμε τις ευθείες AB, δηλαδή $\varepsilon: 8x+y-6=0 \Leftrightarrow y=-8x+6$ και $\zeta: y=-8x$

Η απόστασή τους ισούται με

$$d(\varepsilon,\zeta)=\frac{|6-0|}{\sqrt{1+(-8)^2}}=\frac{6}{\sqrt{65}}$$

Έστω K τυχαίο σημείο της ευθείας ζ.

Φέρουμε $K\Delta \perp AB$. Τότε:

$$(KAB)=\frac{1}{2}(AB)\cdot(K\Delta)$$

Έχουμε ότι:

$$(AB)=\sqrt{\left(\frac{3}{4}-0\right)^2+(0-6)^2}=\sqrt{\frac{9}{16}+36}=\sqrt{\frac{9+576}{16}}=\frac{\sqrt{585}}{\sqrt{16}}=\frac{\sqrt{9\cdot 65}}{4}=$$

$$=\frac{3\sqrt{65}}{4}$$

$$(K\Delta)=d(\varepsilon,\zeta)=\frac{6}{\sqrt{65}}$$

Επομένως: $(KAB)=\frac{1}{2}\cdot\frac{3\sqrt{65}}{4}\cdot\frac{6}{\sqrt{65}}=\frac{3\cdot 6}{2\cdot 4}=\frac{9}{4}$

ΘΕΜΑ 4 / 18611 ΕΥΘΕΙΑ

Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: \chi - 4\psi - 7 = 0$ και τα σημεία $A(-2,4)$ και $B(2,6)$

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες σημείου M της ευθείας ε το οποίο ισαπέχει από τα σημεία A και B

(Μονάδες 7)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου MAB

(Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι τα σημεία $K(\chi,\psi)$ για τα οποία ισχύει $(KAB) = (MAB)$ ανήκουν στις ευθείες με εξισώσεις τις: $\chi - 2\psi - 5 = 0$ και $\chi - 2\psi + 25 = 0$

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4 18611

ΛΥΣΗ

α) Έστω σημείο $M(x_0, y_0) \in \varepsilon$. Τότε ισχύει: $x_0 - 4y_0 - 7 = 0$ (1)

Θέλουμε:

$$(MA)=(MB) \Leftrightarrow \sqrt{(x_0+2)^2+(y_0-4)^2} = \sqrt{(x_0-2)^2+(y_0-6)^2} \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$$

$$(4y_0+7+2)^2+(y_0-4)^2 = (4y_0+7-2)^2+(y_0-6)^2 \Leftrightarrow$$

$$(4y_0+9)^2+(y_0-4)^2 = (4y_0+5)^2+(y_0-6)^2 \Leftrightarrow$$

$$16y_0^2+72y_0+81+y_0^2-8y_0+16 = 16y_0^2+40y_0+25+y_0^2-12y_0+36 \Leftrightarrow$$

$$72y_0-8y_0-40y_0+12y_0 = 25+36-81-16 \Leftrightarrow$$

$$36y_0 = -36 \Leftrightarrow y_0 = -1$$

Τότε (1): $x_0 - 4(-1) - 7 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 3$

Άρα $M(3,-1)$ είναι το ζητούμενο σημείο

β) γ)

Βλέπε τις ασκήσεις: ΘΕΜΑ 4 18614 και ΘΕΜΑ 4 18615

ΘΕΜΑ 4 / 18612 ΕΥΘΕΙΑ

Δίνεται η εξίσωση: $\chi^2+2\chi\psi+\psi^2-6\chi-6\psi+8=0$

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση παριστάνει γεωμετρικά δύο ευθείες γραμμές ε_1 και ε_2 οι οποίες είναι παράλληλες μεταξύ τους.

(Μονάδες 7)

β) Αν $\varepsilon_1:\chi+\psi-2=0$ και $\varepsilon_2:\chi+\psi-4=0$, να βρείτε την εξίσωση της μεσοπαράλληλης ε των ε_1 και ε_2

(Μονάδες 8)

γ) Αν A είναι σημείο της ευθείας ε_1 με τεταγμένη το 2 και B σημείο της ευθείας ε_2 με τετμημένη το 1, τότε:

i) να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A και B

(Μονάδες 2)

ii) να βρείτε τις συντεταγμένες δύο σημείων Γ και Δ της ευθείας ε έτσι, ώστε το τετράπλευρο $A\Gamma B\Delta$ να είναι τετράγωνο.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4 18612

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε την εξίσωση:

$$x^2+2xy+y^2-6x-6y+8=0 \Leftrightarrow x^2+(2y-6)x+y^2-6y+8=0$$

Το 1ο μέλος, ως τριώνυμο 2ου βαθμού με άγνωστο το x έχει:

$$\Delta=(2y-6)^2-4\cdot 1\cdot(y^2-6y+8)=4y^2-24y+36-4y^2+24y-32=4$$

ρίζες $x_{1,2}=\dfrac{-(2y-6)\pm\sqrt{4}}{2}=\dfrac{-2y+6\pm 2}{2}$ $\begin{cases} x_1=\dfrac{-2y+6+2}{2}=-y+4 \\ x_2=\dfrac{-2y+6-2}{2}=-y+2 \end{cases}$

οπότε έχουμε:

$$1\,(x-(-y+4))(x-(-y+2))=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-4=0 \\ \text{ή} \\ x+y-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x+4 \\ \text{ή} \\ y=-x+2 \end{cases}$$

Άρα η εξίσωση παριστάνει τις ευθείες $\varepsilon_1: y=-x+2$ και $\varepsilon_2: y=-x+4$, οι οποίες έχουν $\lambda_{\varepsilon_1}=\lambda_{\varepsilon_2}=-1$, οπότε είναι παράλληλες μεταξύ τους.

β) Έχουμε $\varepsilon_1: x+y-2=0$, $\varepsilon_2: x+y-4=0$ και έστω $M(x,y)$ σημείο της μεσοπαράλληλης ευθείας ε των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$. Τότε έχουμε:

$$M(x,y)\in\varepsilon \Leftrightarrow d(M,\varepsilon_1)=d(M,\varepsilon_2) \Leftrightarrow \frac{|x+y-2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|x+y-4|}{\sqrt{1^2+1^2}} \Leftrightarrow$$

$$|x+y-2|=|x+y-4| \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x+y-2=x+y-4 \\ \text{ή} \\ x+y-2=-(x+y-4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2=-4 \text{ αδύνατη} \\ \text{ή} \\ x+y-2=-x-y+4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x+2y-6=0 \Leftrightarrow x+y-3=0 \Leftrightarrow y=-x+3$$

Άρα $\varepsilon: x+y-3=0$ είναι η εξίσωση της ζητούμενης ευθείας.

ΘΕΜΑ 4 18612

ΛΥΣΗ (συνέχεια)

γ) i) Έστω σημείο $A(x_A, y_A) \in \varepsilon_1$ με $y_A = 2$. Τότε ισχύει:

$x_A + y_A - 2 = 0 \Leftrightarrow x_A + 2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x_A = 0$, άρα $A(0,2)$

Έστω σημείο $B(x_B, y_B) \in \varepsilon_2$ με $x_B = 1$. Τότε ισχύει:

$x_B + y_B - 4 = 0 \Leftrightarrow 1 + y_B - 4 = 0 \Leftrightarrow y_B = 3$, άρα $B(1,3)$

ii) Η ευθεία AB έχει συντελεστή διεύθυνσης

$\lambda_{AB} = \dfrac{3-2}{1-0} = 1$, οπότε $\lambda_{AB} \cdot \lambda_\varepsilon = 1(-1) = -1$

Άρα η AB είναι κάθετη στις ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon$.

Η απόσταση των παραλλήλων ε_1 και ε_2 ισούται με

$d = \dfrac{|2-4|}{\sqrt{1+(-1)^2}} = \dfrac{|-2|}{\sqrt{1+1}} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

και αυτό το d είναι το μήκος της διαγωνίου AB.

Οπότε $d(\varepsilon_1, \varepsilon) = d(\varepsilon_2, \varepsilon) = \dfrac{1}{2} d = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Το κέντρο του τετραγώνου είναι το σημείο τομής της AB με την ε, που είναι το μέσο της διαγωνίου AB, δηλαδή είναι το σημείο

$M\left(\dfrac{0+1}{2}, \dfrac{2+3}{2}\right)$ ή $M\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{5}{2}\right)$

Αν $\Gamma(x_\Gamma, y_\Gamma)$, τότε

$\Gamma \in \varepsilon \Leftrightarrow x_\Gamma + y_\Gamma - 3 = 0$ (1)

$(M\Gamma) = \dfrac{d}{2} \Leftrightarrow \sqrt{\left(x_\Gamma - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y_\Gamma - \frac{5}{2}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Longleftrightarrow (\quad)^2 = (\quad)^2 \Leftrightarrow$

$\left(x_\Gamma - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(3 - x_\Gamma - \frac{5}{2}\right)^2 = \dfrac{2}{4} \Leftrightarrow \left(x_\Gamma - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(-x_\Gamma + \frac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\left(x_\Gamma - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(x_\Gamma - \frac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 2\left(x_\Gamma - \frac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left(x_\Gamma - \frac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow$

$$x_\Gamma - \frac{1}{2} = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} \Leftrightarrow \begin{cases} x_\Gamma - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x_\Gamma = \frac{1}{4} \\ \text{ή} \\ x_\Gamma - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x_\Gamma = 0 \end{cases}$$

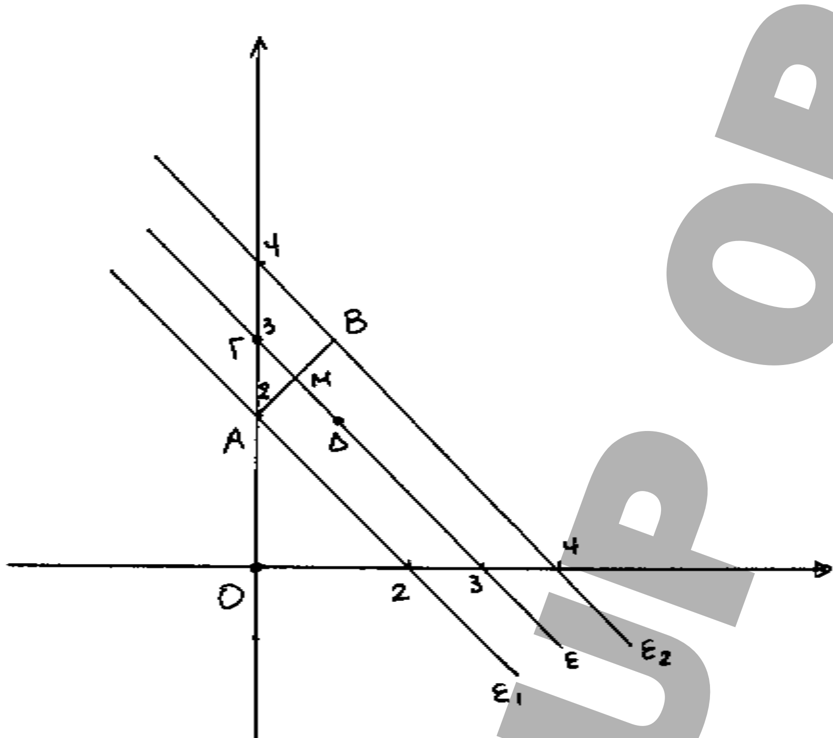
ΘΕΜΑ 4 18612

<u>ΛΥΣΗ</u> (συνέχεια)

Για $x_\Gamma = \frac{1}{4}$ είναι $(1): \frac{1}{4} + y_\Gamma - 3 = 0 \Leftrightarrow y_\Gamma = \frac{11}{4}$

Για $x_\Gamma = 0$ είναι $(1): 0 + y_\Gamma - 3 = 0 \Leftrightarrow y_\Gamma = 3$

Οπότε $\Gamma\left(\frac{1}{4}, \frac{11}{4}\right)$ και $\Delta(0,3)$ ή $\Gamma(0,3)$ και $\Delta\left(\frac{1}{4}, \frac{12}{4}\right)$



<u>2ος ΤΡΟΠΟΣ</u> Τα σημεία Γ, Δ είναι η τομή της ευθείας ε και του κύκλου με κέντρο Μ και ακτίνα $\frac{d}{2}$. Οπότε τα Γ, Δ έχουν ως συντεταγμένες τη λύση του συστήματος:

$$\begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \end{cases}$$

ΘΕΜΑ 4 / 18613 ΕΥΘΕΙΑ

Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2-2xy-3λx+3λy+2λ^2=0$, με λ διαφορετικό του 0.

α) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει στο επίπεδο, δύο ευθείες παράλληλες μεταξύ τους, καθεμιά από τις οποίες έχει κλίση ίση με 1.

(Μονάδες 12)

β) Αν το εμβαδόν του τετραγώνου του οποίου οι δύο πλευρές βρίσκονται πάνω στις ευθείες του ερωτήματος α) είναι ίσο με 2, να βρείτε την τιμή του λ.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 4 18613

ΛΥΣΗ

α) $x^2+y^2-2xy-3\lambda x+3\lambda y+2\lambda^2=0 \Leftrightarrow y^2+(3\lambda-2x)y+x^2-3\lambda x+2\lambda^2=0$

Το 1ο μέλος, ως τριώνυμο 2ου βαθμού με άγνωστο το y, έχει:

$\Delta=(3\lambda-2x)^2-4\cdot1\cdot(x^2-3\lambda x+2\lambda^2)=9\lambda^2-12\lambda x+4x^2-4x^2+12\lambda x-8\lambda^2=$

$=\lambda^2\geq0$

ρίζες $y_{1,2}=\dfrac{-(3\lambda-2x)\pm\sqrt{\lambda^2}}{2\cdot1}=\dfrac{-3\lambda+2x\pm\lambda}{2}$ $\begin{cases} y_1=\dfrac{-3\lambda+2x+\lambda}{2}=-\lambda+x \\ y_2=\dfrac{-3\lambda+2x-\lambda}{2}=-2\lambda+x \end{cases}$

οπότε έχουμε:

$1\cdot(y-y_1)(y-y_2)=0 \Leftrightarrow (y-(-\lambda+x))(y-(-2\lambda+x))=0 \Leftrightarrow$

$\begin{cases} y+\lambda-x=0 \\ \text{ή} \\ y+2\lambda-x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x-\lambda \\ y=x-2\lambda \end{cases}$

Αρα η εξίσωση παριστάνει τις ευθείες $\varepsilon_1: y=x-\lambda$ και $\varepsilon_2: y=x-2\lambda$, οι οποίες έχουν κλίση 1, άρα είναι παράλληλες μεταξύ τους.

β) Το τετράγωνο, του οποίου οι δύο πλευρές ανήκουν στις παράλληλες ευθείες ε_1 και ε_2 έχει πλευρά

$\alpha=d(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=\dfrac{|-\lambda+2\lambda|}{\sqrt{1+1^2}}=\dfrac{|\lambda|}{\sqrt2}$

Εχουμε ότι

$E_{τετρ}=2 \Leftrightarrow \alpha^2=2 \Leftrightarrow \left(\dfrac{|\lambda|}{\sqrt2}\right)^2=2 \Leftrightarrow \dfrac{\lambda^2}{2}=2 \Leftrightarrow \lambda^2=4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lambda=\pm\sqrt4 \Leftrightarrow \lambda=-2$ ή $\lambda=2$

ΘΕΜΑ 4 / 18614 ΕΥΘΕΙΑ

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : 3\chi + \psi + 3 = 0$ και $\varepsilon_2 : \chi + 2\psi - 4 = 0$

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής A των ευθειών ε_1 και ε_2

(Μονάδες 5)

β) Αν η ευθεία ε_1 τέμνει τον άξονα $\psi'\psi$ στο σημείο B και η ευθεία ε_2 τέμνει τον άξονα $\chi'\chi$ στο σημείο Γ, τότε:

i) να βρείτε εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία B και Γ

(Μονάδες 5)

ii) να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$

(Μονάδες 5)

γ) Να αποδείξετε ότι τα σημεία $K(\chi,\psi)$ για τα οποία ισχύει $(KB\Gamma) = (AB\Gamma)$ ανήκουν σε δύο παράλληλες ευθείες, των οποίων να βρείτε τις εξισώσεις.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4 18614

ΛΥΣΗ

α) Το σημείο τομής των ε_1 και ε_2 έχει ως συντεταγμένες τη λύση του συστήματος

$$\begin{cases} 3x+y+3=0 \\ x+2y-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+y=-3 \\ x+2y=4 \end{cases} \ \ldots \ (x,y)=(-2,3)$$

Άρα ε_1 και ε_2 τέμνονται στο σημείο $A(-2,3)$

β) i) Στην ε_1 για $x=0$ έχουμε: $y+3=0 \Leftrightarrow y=-3$ Άρα $B(0,-3)$

Στην ε_2 για $y=0$ έχουμε: $x-4=0 \Leftrightarrow x=4$ Άρα $\Gamma(4,0)$

Η ευθεία ΒΓ έχει κλίση $\lambda_{B\Gamma}=\frac{0+3}{4-0}=\frac{3}{4}$ και διέρχεται από το σημείο $\Gamma(4,0)$, άρα έχει εξίσωση

$B\Gamma$: $y-0=\frac{3}{4}(x-4) \Leftrightarrow y=\frac{3}{4}x-3$

ii) $\vec{AB}=(-3-3,0+2)=(-6,2)$, $\vec{A\Gamma}=(0-3,4+2)=(-3,6)$

$$\det(\vec{AB},\vec{A\Gamma})=\begin{vmatrix} -6 & 2 \\ -3 & 6 \end{vmatrix}=-36+6=-30$$

Το τρίγωνο ΑΒΓ έχει εμβαδόν

$$(AB\Gamma)=\frac{1}{2}\left|\det(\vec{AB},\vec{A\Gamma})\right|=\frac{1}{2}|-30|=\frac{1}{2}\cdot 30=15 \text{ τ.μ.}$$

γ) $\vec{KB}=(0-x,-3-y)=(-x,-3-y)$, $\vec{K\Gamma}=(4-x,0-y)=(4-x,-y)$

$$\det(\vec{KB},\vec{K\Gamma})=\begin{vmatrix} -x & -3-y \\ 4-x & -y \end{vmatrix}=xy-(4-x)(-3-y)=$$

$$=xy+12+4y-3x-xy=-3x+4y+12$$

Το τρίγωνο ΚΒΓ έχει εμβαδόν

$$(KB\Gamma)=\frac{1}{2}\left|\det(\vec{KB},\vec{K\Gamma})\right|=\frac{1}{2}|-3x+4y+12|$$

οπότε:

$$(KB\Gamma)=(AB\Gamma) \Leftrightarrow \frac{1}{2}|-3x+4y+12|=15 \Leftrightarrow |-3x+4y+12|=30 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -3x+4y+12=30 \\ \text{ή} \\ -3x+4y+12=-30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x+4y-18=0 \\ \text{ή} \\ -3x+4y+42=0 \end{cases}$$

Τα σημεία $K(x,y)$ κινούνται στις ευθείες

$\varepsilon_1: -3x+4y-18=0$ και $\varepsilon_2: -3x+4y+42=0$

οι οποίες είναι παράλληλες, αφού έχουν $\lambda_{\varepsilon_1}=\lambda_{\varepsilon_2}=\frac{3}{4}$

ΘΕΜΑ 4 / 18615 ΕΥΘΕΙΑ

Θεωρούμε ευθύγραμμο τμήμα AB που είναι παράλληλο προς την ευθεία $\varepsilon : \psi = \chi$,

με $A(\chi_1, \psi_1)$, $B(\chi_2, \psi_2)$ και $\chi_1 < \chi_2$

Αν το σημείο $M(3,5)$ είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος AB και το γινόμενο των τετμημένων των σημείων A και B ισούται με 5, τότε:

α) να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των σημείων A και B.

(Μονάδες 13)

β) να αποδείξετε ότι $(OAB) = 4$, όπου O είναι η αρχή των αξόνων.

(Μονάδες 5)

γ) να αποδείξετε ότι τα σημεία $K(\chi, \psi)$ για τα οποία ισχύει $(KAB) = 2(OAB)$ ανήκουν στις ευθείες με εξισώσεις τις: $\chi - \psi - 2 = 0$ και $\chi - \psi + 6 = 0$

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4 18615

ΛΥΣΗ

α) Η ευθεία AB με $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ και $x_1<x_2$ έχει κλίση $\lambda_{AB}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

Έχουμε ότι $AB \parallel \varepsilon: y=x \Leftrightarrow \lambda_{AB}=\lambda_\varepsilon \Leftrightarrow \dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=1$ (1)

Επίσης ισχύει ότι $x_1x_2=5$ (2)

Το τμήμα AB έχει ως μέσο το σημείο $M\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$

Αφού $M(3,5)$, τότε ισχύει:

$\dfrac{x_1+x_2}{2}=3 \Leftrightarrow x_1+x_2=6$ (3) και $\dfrac{y_1+y_2}{2}=5 \Leftrightarrow y_1+y_2=10$ (4)

Από (2), (3) έχουμε:

$\begin{cases} x_1+x_2=6 \\ x_1x_2=5 \end{cases}$ x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2-6x+5=0$

Άρα $x_1=1$, $x_2=5$

Από (1), (4) έχουμε:

$\begin{cases} \dfrac{y_2-y_1}{5-1}=1 \\ y_1+y_2=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_2-y_1=4 \\ y_1+y_2=10 \end{cases}$ ..... $y_1=3$, $y_2=7$

Άρα $A(1,3)$ και $B(5,7)$

β) $\vec{OA}=(1-0,3-0)=(1,3)$, $\vec{OB}=(5-0,7-0)=(5,7)$,

$\det(\vec{OA},\vec{OB})=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}=7-15=-8$

Οπότε το τρίγωνο OAB έχει εμβαδόν:

$(OAB)=\frac{1}{2}|\det(\vec{OA},\vec{OB})|=\frac{1}{2}|-8|=\frac{1}{2}8=4$ τ.μ.

γ) Έχουμε $K(x,y)$, οπότε:

$\vec{KA}=(1-x,3-y)$, $\vec{KB}=(5-x,7-y)$,

$\det(\vec{KA},\vec{KB})=\begin{vmatrix} 1-x & 3-y \\ 5-x & 7-y \end{vmatrix}=(1-x)(7-y)-(5-x)(3-y)$

Οπότε το τρίγωνο KAB έχει εμβαδόν:

$(KAB)=\frac{1}{2}|\det(\vec{KA},\vec{KB})|=\frac{1}{2}|(1-x)(7-y)-(5-x)(3-y)|=$

$=\frac{1}{2}|7-y-7x+xy-15+5y+3x-xy|=\frac{1}{2}|-4x+4y-8|=|-2x+2y-4|$

ΘΕΜΑ 4 18615

ΛΥΣΗ (συνέχεια)

Επομένως:

$(KAB)=2(OAB) \Leftrightarrow |-2x+2y-4|=2\cdot 4 \Leftrightarrow$

$\begin{cases} -2x+2y-4=8 \\ \text{ή} \\ -2x+2y-4=-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+2y-12=0 \\ \text{ή} \\ -2x+2y+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y+6=0 \\ \text{ή} \\ x-y-2=0 \end{cases}$

Άρα τα σημεία $K(x,y)$ ανήκουν στις ευθείες με εξισώσεις $\varepsilon_1: x-y+6=0$, $\varepsilon_2: x-y-2=0$

ΘΕΜΑ 4 / 18617

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{b}$ με μέτρα 2 , 6 αντίστοιχα και φ∈[0,π] η μεταξύ τους γωνία.

Επίσης δίνεται η εξίσωση $(\vec{a}\vec{b}+12)x+(\vec{a}\vec{b}-12)$ ψ-5=0 (1).

α) Να αποδείξετε ότι η (1) παριστάνει ευθεία για κάθε φ∈[0,π]. (Μονάδες 3)

β) Αν η παραπάνω ευθεία είναι παράλληλη στον άξονα ψ΄ψ, να αποδείξετε ότι $\vec{b}=3\vec{a}$

(Μονάδες 7)

γ) Αν η παραπάνω ευθεία είναι παράλληλη στον άξονα χ΄χ, να αποδείξετε ότι $\vec{b}=-3\vec{a}$

(Μονάδες 7)

δ) Αν η παραπάνω ευθεία είναι παράλληλη στην διχοτόμο πρώτης και τρίτης γωνίας των αξόνων, να αποδείξετε ότι $\vec{b}\perp\vec{a}$ (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4 18617

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε ότι: $|\vec{\alpha}|=2, |\vec{b}|=6$ και $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{b}})=\varphi$

Η (1) δεν παριστάνει ευθεία, μόνο όταν:

$$\begin{cases} \vec{\alpha}\vec{b}+12=0 \\ \text{και} \\ \vec{\alpha}\vec{b}-12=0 \end{cases}$$

Με αφαίρεση κατά μέλη προκύπτει:

$\vec{\alpha}\vec{b}+12-\vec{\alpha}\vec{b}+12=0 \Leftrightarrow 24=0$ που είναι άτοπο.

Άρα η (1) παριστάνει ευθεία, για κάθε $\varphi\in[0,\pi]$.

β) Έχουμε ότι η (1) είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$, οπότε έχει μορφή $x=c, c\in R$, επομένως:

$\vec{\alpha}\vec{b}-12=0 \Rightarrow |\vec{\alpha}||\vec{b}|\sigma\upsilon\nu\varphi-12=0 \Rightarrow 2\cdot6\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi=12 \Rightarrow$

$\sigma\upsilon\nu\varphi=1 \Rightarrow \varphi=0^\circ \Rightarrow \vec{\alpha}\upuparrows\vec{b}$

Αφού $\vec{\alpha}\upuparrows\vec{b}$, τότε $\vec{\alpha}=\lambda\vec{b}, \lambda>0$

Επίσης είναι: $|\vec{\alpha}|=2, |\vec{b}|=6=3\cdot2=3|\vec{\alpha}|$, άρα:

$\vec{b}=3\vec{\alpha}$

γ) Έχουμε ότι η (1) είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, άρα έχει μορφή $y=c, c\in R$, επομένως:

$\vec{\alpha}\vec{b}+12=0 \Rightarrow |\vec{\alpha}|\cdot|\vec{b}|\sigma\upsilon\nu\varphi+12=0 \Rightarrow 2\cdot6\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi=-12 \Rightarrow$

$\sigma\upsilon\nu\varphi=-1 \Rightarrow \varphi=180^\circ \Rightarrow \vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{b}$

Αφού $\vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{b}$, τότε $\vec{\alpha}=\rho\vec{b}, \rho<0$

Επίσης είναι: $|\vec{\alpha}|=2, |\vec{b}|=6=3\cdot2=3|\vec{\alpha}|$, άρα:

$\vec{b}=-3\vec{\alpha}$

ΘΕΜΑ 4 18617

ΛΥΣΗ (συνέχεια)

- Θεωρούμε τη διχοτόμο δ της 1ης και 3ης γωνίας των αξόνων που είναι η ευθεία

$\delta: y = x \iff x - y = 0$

Θεωρούμε το διάνυσμα $\vec{u} = (1,1)$, που είναι $\delta \parallel \vec{u}$

- Θεωρούμε το διάνυσμα $\vec{v} = (-(\vec{\alpha}\vec{b} - 12), \vec{\alpha}\vec{b} + 12)$, που είναι $(1) \parallel \vec{v}$

Οπότε:

$(1) \parallel \delta \Rightarrow \vec{v} \parallel \vec{u} \Rightarrow \det(\vec{v}, \vec{u}) = 0 \Rightarrow$

$\begin{vmatrix} -(\vec{\alpha}\vec{b} - 12) & \vec{\alpha}\vec{b} + 12 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -(\vec{\alpha}\vec{b} - 12) - (\vec{\alpha}\vec{b} + 12) = 0 \Rightarrow$

$-\vec{\alpha}\vec{b} + 12 - \vec{\alpha}\vec{b} - 12 = 0 \Rightarrow -2\vec{\alpha}\vec{b} = 0 \Rightarrow \vec{\alpha}\vec{b} = 0 \Rightarrow \vec{\alpha} \perp \vec{b}$

ΘΕΜΑ 2 / 18620 ΕΥΘΕΙΑ

Δίνονται οι ευθείες ε_1: $(2\lambda-1)x+y-5=0$, ε_2: $(\lambda^2+3)x-y-15=0$ με $\lambda \in \mathbb{R}$ και το σημείο $A(2,-1)$.

α) Να αποδείξετε ότι, για κάθε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ οι ευθείες τέμνονται.

(Μονάδες 7)

β) Αν οι ευθείες τέμνονται στο σημείο A, να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 10)

γ) Έστω $\lambda=2$ και B, Γ τα σημεία που οι ε_1 και ε_2 τέμνουν τον άξονα $y'y$. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 2 18620

ΛΥΣΗ

α) Το κοινό σημείο των ευθειών ε_1 και ε_2, έχει ως συντεταγμένες τη λύση του συστήματος:

$$\begin{cases}(2\lambda-1)x+y-5=0\\(\lambda^2+3)x-y-15=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(2\lambda-1)x+y=5\\(\lambda^2+3)x-y=15\end{cases}$$

Το σύστημα έχει

$$D=\begin{vmatrix}2\lambda-1 & 1\\ \lambda^2+3 & -1\end{vmatrix}=-(2\lambda-1)-(\lambda^2+3)=-2\lambda+1-\lambda^2-3=-\lambda^2-2\lambda-2$$

Το τριώνυμο έχει $\Delta=(-2)^2-4(-1)(-2)=4-8=-4<0$

οπότε για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$-\lambda^2-2\lambda-2\neq 0 \Rightarrow D\neq 0$

Αυτό σημαίνει ότι, για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ το σύστημα έχει μοναδική λύση, άρα για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ οι ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνονται.

β) Αφού οι ευθείες τέμνονται στο σημείο $A(2,-1)$, τότε έχουμε:

$A(2,-1)\in\varepsilon_1 \Leftrightarrow (2\lambda-1)2+(-1)-5=0 \Leftrightarrow 4\lambda-2-1-5=0 \Leftrightarrow \lambda=2$

γ) • για $\lambda=2$ έχουμε $\varepsilon_1: (2\cdot2-1)x+y-5=0 \Leftrightarrow 3x+y-5=0$

Στην ε_1 για $x=0$ προκύπτει: $0+y-5=0 \Leftrightarrow y=5$

Άρα η ε_1 τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $B(0,5)$

• για $\lambda=2$ έχουμε $\varepsilon_2: (2^2+3)x-y-15=0 \Leftrightarrow 7x-y-15=0$

Στην ε_2 για $x=0$ προκύπτει: $0-y-15=0 \Leftrightarrow y=-15$

Άρα η ε_2 τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $\Gamma(0,-15)$

Είναι: $\vec{AB}=(0-2,5+1)=(-2,6)$ και $\vec{A\Gamma}=(0-2,-15+1)=(-2,-14)$

$$\det(\vec{AB},\vec{A\Gamma})=\begin{vmatrix}-2 & 6\\ -2 & -14\end{vmatrix}=28+12=40$$

Άρα το τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει εμβαδόν:

$(AB\Gamma)=\frac{1}{2}|\det(\vec{AB},\vec{A\Gamma})|=\frac{1}{2}|40|=\frac{40}{2}=20$ τ.μ.

ΘΕΜΑ 4 / 18621 ΕΥΘΕΙΑ

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon: 2\kappa\chi-(1+\kappa)\psi+1-3\kappa=0$ και $\zeta:(1+3\kappa)\chi+(\kappa-1)\psi+2-6\kappa=0$,

όπου $\kappa \in \mathbb{R}$

α) Να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του κ, ώστε οι ευθείες να είναι παράλληλες.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε την αμβλεία γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες (ε) και (ζ).

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 4 18621

ΛΥΣΗ

α) Θεωρούμε τα διανύσματα:

$\vec{u} = (1+\kappa, 2\kappa)$, που είναι $\vec{u} \parallel \varepsilon$

$\vec{v} = (-(\kappa-1), 1+3\kappa)$, που είναι $\vec{v} \parallel \zeta$

Έχουμε ότι:

$\varepsilon \parallel \zeta \Leftrightarrow \vec{u} \parallel \vec{v} \Leftrightarrow \det(\vec{u}, \vec{v}) = 0 \Leftrightarrow$

$\begin{vmatrix} 1+\kappa & 2\kappa \\ -(\kappa-1) & 1+3\kappa \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1+\kappa)(1+3\kappa) + 2\kappa(\kappa-1) = 0 \Leftrightarrow$

$1 + 3\kappa + \kappa + 3\kappa^2 + 2\kappa^2 - 2\kappa = 0 \Leftrightarrow 5\kappa^2 + 2\kappa + 1 = 0$

$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 5 \cdot 1 = 4 - 20 = -16 < 0$, άρα η εξίσωση είναι αδύνατη.

Επομένως δεν υπάρχει $\kappa \in \mathbb{R}$, ώστε $\varepsilon \parallel \zeta$.

β) Ισχύει ότι:

$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = -(\kappa+1)(\kappa-1) + 2\kappa(1+3\kappa) = -(\kappa^2-1) + 2\kappa + 6\kappa^2 =$
  $= -\kappa^2 + 1 + 2\kappa + 6\kappa^2 = 5\kappa^2 + 2\kappa + 1$
- $|\vec{u}| = \sqrt{(1+\kappa)^2 + (2\kappa)^2} = \sqrt{5\kappa^2 + 2\kappa + 1}$
  $|\vec{v}| = \sqrt{[-(\kappa-1)]^2 + (1+3\kappa)^2} = \sqrt{2(5\kappa^2 + 2\kappa + 1)}$

Οπότε:

$$\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{5\kappa^2 + 2\kappa + 1}{\sqrt{5\kappa^2 + 2\kappa + 1} \cdot \sqrt{2(5\kappa^2 + 2\kappa + 1)}} = \frac{5\kappa^2 + 2\kappa + 1}{\sqrt{2}\left(\sqrt{5\kappa^2 + 2\kappa + 1}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Άρα: $\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \sigma\upsilon\nu 45^\circ$, δηλαδή $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 45^\circ$

Οι ευθείες ε και ζ, ως παράλληλες των $\vec{u}$ και $\vec{v}$, σχηματίζουν δύο γωνίες:

την οξεία 45° και την αμβλεία $180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$, η οποία είναι η ζητούμενη.

ΘΕΜΑ 4 / 18622 ΕΥΘΕΙΑ

Δίνονται τα σημεία $A\left(1,\frac{-3}{2}\right)$, $B(2,-1)$ και $\Gamma\left(\mu,\frac{\mu-4}{2}\right)$, όπου $\mu\in\mathbb{R}$

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\mu\in\mathbb{R}$ το σημείο Γ ανήκει στην ευθεία που διέρχεται από τα σημεία A και B

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε την τιμή του μ έτσι, ώστε $\mu\cdot\overrightarrow{B\Gamma}=-\overrightarrow{AB}$

(Μονάδες 6)

δ) Για την τιμή του μ που βρήκατε στο ερώτημα γ), να αποδείξετε ότι $(OB\Gamma)=1$, όπου O είναι η αρχή των αξόνων.

(Μονάδες 3)

ΘΕΜΑ 4 18622

ΛΥΣΗ

α) $\vec{AB} = (2-1, -1+\frac{3}{2}) = (1, \frac{1}{2})$

$\vec{B\Gamma} = (\mu-2, \frac{\mu-4}{2}+1) = (\mu-2, \frac{\mu-2}{2})$

β) Η ευθεία ΑΒ έχει:

κλίση $\lambda_{AB} = \frac{-1+\frac{3}{2}}{2-1} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$

και διέρχεται από το σημείο $B(2,-1)$, άρα

έχει εξίσωση $AB: y+1 = \frac{1}{2}(x-2) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x - 2$

Οπότε

$\Gamma(\mu, \frac{\mu-4}{2}) \in AB \Leftrightarrow \frac{\mu-4}{2} = \frac{1}{2}\mu - 2 \Leftrightarrow \mu-4 = \mu-4$

Η σχέση αυτή είναι αληθής για κάθε $\mu \in R$,

άρα για κάθε $\mu \in R$ το σημείο Γ ανήκει στην ΑΒ.

γ) $\mu\vec{B\Gamma} = -\vec{AB} \Leftrightarrow \mu(\mu-2, \frac{\mu-2}{2}) = -(1, \frac{1}{2}) \Leftrightarrow$

$(\mu^2-2\mu, \frac{\mu^2-2\mu}{2}) = (-1, -\frac{1}{2}) \Leftrightarrow$

$\begin{cases} \mu^2-2\mu = -1 \\ \frac{\mu^2-2\mu}{2} = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \mu^2-2\mu = -1 \Leftrightarrow \mu^2-2\mu+1 = 0 \Leftrightarrow (\mu-1)^2 = 0 \Leftrightarrow$

$\mu-1 = 0 \Leftrightarrow \mu = 1$ διπλή ρίζα.

δ) Για $\mu=1$ έχουμε: $O(0,0)$, $B(2,-1)$ και $\Gamma(1, -\frac{3}{2})$

$\vec{OB} = (2-0, -1-0) = (2,-1)$

$\vec{O\Gamma} = (1-0, -\frac{3}{2}-0) = (1, -\frac{3}{2})$

$\det(\vec{OB}, \vec{O\Gamma}) = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -\frac{3}{2} \end{vmatrix} = -3+1 = -2$

Οπότε: $(OB\Gamma) = \frac{1}{2}|\det(\vec{OB}, \vec{O\Gamma})| = \frac{1}{2}|-2| = \frac{1}{2}\cdot 2 = 1$

ΘΕΜΑ 4 / 18623 ΕΥΘΕΙΑ

Δίνονται τα σημεία $A(3,4)$, $B(5,7)$ και $\Gamma(2\mu+1,3\mu-2)$, όπου $\mu\in\mathbb{R}$

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$ και, στη συνέχεια, να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B και Γ δεν είναι συνευθειακά για κάθε τιμή του μ.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι:

i) το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ δεν εξαρτάται από το μ.

(Μονάδες 5)

ii) για κάθε τιμή του μ το σημείο Γ ανήκει σε ευθεία ε, της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

(Μονάδες 7)

γ) Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά γιατί το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ παραμένει σταθερό, ανεξάρτητα από την τιμή του μ;

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4 18623

<u>ΛΥΣΗ</u>

α) $\vec{AB}=(5-3,7-4)=(2,3)$

$\vec{A\Gamma}=(2\mu+1-3,3\mu-2-4)=(2\mu-2,3\mu-6)$

Έχουμε ότι:

A, B, Γ συνευθειακά $\Leftrightarrow \vec{AB}\parallel\vec{A\Gamma} \Leftrightarrow \det(\vec{AB},\vec{A\Gamma})=0 \Leftrightarrow$

$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2\mu-2 & 3\mu-6 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow 2(3\mu-6)-3(2\mu-2)=0 \Leftrightarrow$

$6\mu-12-6\mu+6=0 \Leftrightarrow -6=0$ ψευδής

Άρα τα A, B, Γ δεν είναι συνευθειακά, για κάθε $\mu\in\mathbb{R}$.

β) i) $\det(\vec{AB},\vec{A\Gamma})=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2\mu-2 & 3\mu-6 \end{vmatrix}=\dots=-6$

Το τρίγωνο ΑΒΓ έχει εμβαδόν

$(AB\Gamma)=\frac{1}{2}|\det(\vec{AB},\vec{A\Gamma})|=\frac{1}{2}|-6|=\frac{1}{2}\cdot 6=3$

που είναι ανεξάρτητο του $\mu\in\mathbb{R}$.

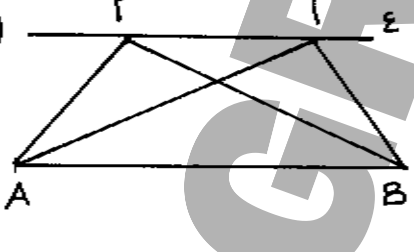
ii) Έστω $\Gamma(x,y)$. Τότε έχουμε:

$\begin{cases} x=2\mu+1 \\ y=3\mu-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x=-6\mu-3 \\ 2y=6\mu-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x=-6\mu-3 \\ -3x+2y=-6\mu-3+6\mu-4 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} \dots \\ -3x+2y=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dots \\ -3x+2y+7=0 \end{cases}$

Άρα ο γ.τ. των σημείων Γ είναι η ευθεία με εξίσωση $\varepsilon: -3x+2y+7=0$

iii)



Η ευθεία AB έχει κλίση

$\lambda_{AB}=\frac{7-4}{5-3}=\frac{3}{2}$

Η ευθεία $\varepsilon: -3x+2y+7=0 \Leftrightarrow y=\frac{3}{2}x-\frac{7}{2}$

έχει κλίση $\lambda_\varepsilon=\frac{3}{2}$

Έχουμε ότι $\lambda_{AB}=\lambda_\varepsilon$, άρα $AB\parallel\varepsilon$

Τα τρίγωνα με βάση την AB και την κορυφή Γ να κινείται στην ε είναι ισεμβαδικά, αφού έχουν κοινή βάση και ύψος την απόσταση των παραλλήλων ε και AB