ΘΕΜΑ 2 / 18556 ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ με $\left(\widehat{\vec{a},\vec{\beta}}\right)=\frac{\pi}{3}$ και $|\vec{a}|=\sqrt{2}$, $|\vec{\beta}|=2\sqrt{2}$.

α) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{a}\,\vec{\beta}$.

(Μονάδες 8)

β) Αν τα διανύσματα $2\vec{a}+\vec{\beta}$ και $\kappa\vec{a}+\vec{\beta}$ είναι κάθετα να βρείτε την τιμή του κ.

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $2\vec{a}+\vec{\beta}$.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 2 18556

<u>ΛΥΣΗ</u>

α) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}=2\cdot 2\cdot\frac{1}{2}=2$

β) $(2\vec{\alpha}+\vec{\beta})\perp(\kappa\vec{\alpha}+\vec{\beta})\Leftrightarrow(2\vec{\alpha}+\vec{\beta})(\kappa\vec{\alpha}+\vec{\beta})=0\Leftrightarrow$

$2\kappa\vec{\alpha}^2+2\vec{\alpha}\vec{\beta}+\kappa\vec{\alpha}\vec{\beta}+\vec{\beta}^2=0\xleftrightarrow{(\alpha)}2\kappa|\vec{\alpha}|^2+2\cdot 2+\kappa\cdot 2+|\vec{\beta}|^2=0\Leftrightarrow$

$2\kappa 2+4+2\kappa+8=0\Leftrightarrow 6\kappa=-12\Leftrightarrow\kappa=-2$

γ) Θεωρούμε:

$|2\vec{\alpha}+\vec{\beta}|^2=(2\vec{\alpha}+\vec{\beta})^2=4\vec{\alpha}^2+4\vec{\alpha}\vec{\beta}+\vec{\beta}^2\overset{(\alpha)}{=\!=}$

$=4|\vec{\alpha}|^2+4\cdot 2+|\vec{\beta}|^2=4\cdot 2+8+8=24$

οπότε:

$|2\vec{\alpha}+\vec{\beta}|^2=24\Leftrightarrow|2\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=\sqrt{24}\Leftrightarrow|2\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=2\sqrt{6}$

ΘΕΜΑ 2 / 18558 ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι: $\overrightarrow{AB}=(-4,-6)$, $\overrightarrow{A\Gamma}=(2,-8)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{AM}$, όπου AM είναι η διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ.

(Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι η γωνία $\hat{A}$ είναι οξεία.

(Μονάδες 10)

γ) Αν στο τρίγωνο ΑΒΓ επιπλέον ισχύει A(3,1), να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών του Β και Γ.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 2   18558

ΛΥΣΗ

α) Ισχύει ότι:

$$\vec{AM} = \frac{1}{2}\left(\vec{AB}+\vec{A\Gamma}\right) = \frac{1}{2}\left((-4,-6)+(2,-8)\right) = \frac{1}{2}(-2,-14) = (-1,-7)$$

β) Ισχύει ότι:

$$\vec{AB}\cdot\vec{A\Gamma} = |\vec{AB}|\cdot|\vec{A\Gamma}|\,\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{AB},\vec{A\Gamma}}) \Leftrightarrow$$

Θέτουμε $(\widehat{\vec{AB},\vec{A\Gamma}}) = A$

$$\sigma\upsilon\nu A = \frac{\vec{AB}\cdot\vec{A\Gamma}}{|\vec{AB}|\cdot|\vec{A\Gamma}|} \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu A = \frac{(-4,-6)\cdot(2,-8)}{\sqrt{(-4)^2+(-6)^2}\cdot\sqrt{2^2+(-8)^2}} = \frac{-8+48}{\sqrt{52}\cdot\sqrt{68}} = \frac{40}{\sqrt{52}\cdot\sqrt{68}} > 0$$

Αυτό σημαίνει ότι η γωνία Α είναι οξεία.

γ) • Έχουμε ότι $\vec{AB} = (-4,-6)$ και $A(3,1)$

Αν $B(x_B, y_B)$, τότε:

$$\begin{cases} -4 = x_B - 3 \\ -6 = y_B - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = -1 \\ y_B = -5 \end{cases}$$

Άρα $B(-1,-5)$

• Έχουμε ότι $\vec{A\Gamma} = (2,-8)$ και $A(3,1)$

Αν $\Gamma(x_\Gamma, y_\Gamma)$, τότε:

$$\begin{cases} 2 = x_\Gamma - 3 \\ -8 = y_\Gamma - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_\Gamma = 5 \\ y_\Gamma = -7 \end{cases}$$

Άρα $\Gamma(5,-7)$

ΘΕΜΑ 2 / 18581 ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ για τα οποία : $2|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|=2\sqrt{2}$ και $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=60^\circ$

α) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=2$

(Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ και $\vec{\alpha}-\vec{\beta}$

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2 18581

ΛΥΣΗ

Είναι ίδια με το ΘΕΜΑ 2 18556 (α) και (γ).

ΘΕΜΑ 2 / 18598 ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}=\left(\kappa^2-6\kappa+9,\kappa-3\right)$ και $\overrightarrow{A\Gamma}=\left(1,6\right)$, όπου $\kappa\in\mathbb{R}$

α) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}$

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις τιμές του $\kappa$, ώστε τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$ να είναι κάθετα.

(Μονάδες 9)

γ) Για $\kappa=1$ να βρείτε το διάνυσμα $\overrightarrow{B\Gamma}$ .

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 2    18598

**ΛΥΣΗ**

α) $\vec{AB}\cdot\vec{A\Gamma} = (\kappa^2-6\kappa+9,\ \kappa-3)\cdot(1,6) = (\kappa^2-6\kappa+9)\cdot 1 + (\kappa-3)\cdot 6 =$

$= (\kappa-3)^2 + 6(\kappa-3) = (\kappa-3)(\kappa-3+6) = (\kappa-3)(\kappa+3)$

β) $\vec{AB} \perp \vec{A\Gamma} \Leftrightarrow \vec{AB}\,\vec{A\Gamma} = 0 \overset{(\alpha)}{\Leftrightarrow} (\kappa-3)(\kappa+3) = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \kappa-3=0 \\ \text{ή} \\ \kappa+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa=3 \\ \text{ή} \\ \kappa=-3 \end{cases}$$

γ) Αν $\kappa=1$, τότε:

$\vec{AB} = (1-6+9,\ 1-3) = (4,-2)$ , $\vec{A\Gamma} = (1,6)$

Ισχύει ότι:

$\vec{B\Gamma} = \vec{A\Gamma} - \vec{AB} = (1,6) - (4,-2) = (1,6) + (-4,2) = (-3,8)$

ΘΕΜΑ 2 / 18603 ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και σημεία $\Delta$ και $E$ του επιπέδου τέτοια, ώστε $\overrightarrow{A\Delta}=2\overrightarrow{AB}+5\overrightarrow{A\Gamma}$ και $\overrightarrow{AE}=5\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{A\Gamma}$

α) Να γράψετε το διάνυσμα $\overrightarrow{\Delta E}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$ .

(Μονάδες 13)

β) Να δείξετε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{\Delta E}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$ είναι παράλληλα.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2 18603

ΛΥΣΗ

α) $\vec{\Delta E} = \vec{AE} - \vec{A\Delta} = (5\vec{AB} + 2\vec{A\Gamma}) - (2\vec{AB} + 5\vec{A\Gamma}) =$

$= 5\vec{AB} + 2\vec{A\Gamma} - 2\vec{AB} - 5\vec{A\Gamma} = 3\vec{AB} - 3\vec{A\Gamma}$

β) Από το (α) έχουμε:

$\vec{\Delta E} = 3\vec{AB} - 3\vec{A\Gamma} \Longrightarrow \vec{\Delta E} = 3(\vec{AB} - \vec{A\Gamma}) \Longrightarrow \vec{\Delta E} = 3\vec{\Gamma B} \Longrightarrow$

$\vec{\Delta E} = -3\vec{B\Gamma} \Longrightarrow \Delta E \parallel B\Gamma$

ΘΕΜΑ 2 / 18604 ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

Δίνεται παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$ και $Ε$, $Ζ$ σημεία τέτοια ώστε: $\overrightarrow{ΑΕ}=\frac{2}{5}\overrightarrow{ΑΔ}$, $\overrightarrow{ΑΖ}=\frac{2}{7}\overrightarrow{ΑΓ}$ .

α) Να γράψετε τα διανύσματα $\overrightarrow{ΕΖ}$ και $\overrightarrow{ΖΒ}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\overrightarrow{ΑΒ}$ και $\overrightarrow{ΑΔ}$ .

(Μονάδες 13)

β) Να αποδείξτε ότι τα σημεία $Β$, $Ζ$ και $Ε$ είναι συνευθειακά.

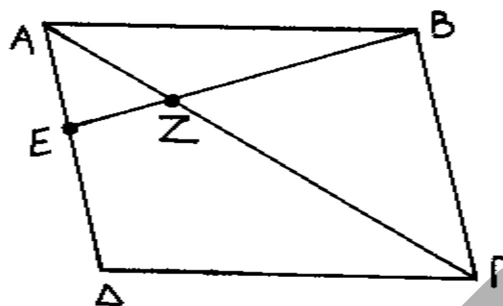
(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2 18604

ΛΥΣΗ

- Από τη σχέση $\vec{AE}=\frac{2}{5}\vec{A\Delta}$ προκύπτει:
  $\vec{AE}\uparrow\uparrow\vec{A\Delta}$ και $|\vec{AE}|=\left|\frac{2}{5}\vec{A\Delta}\right| \Leftrightarrow |\vec{AE}|=\frac{2}{5}|\vec{A\Delta}|$
- Από τη σχέση $\vec{AZ}=\frac{2}{7}\vec{A\Gamma}$ προκύπτει:
  $\vec{AZ}\uparrow\uparrow\vec{A\Gamma}$ και $|\vec{AZ}|=\left|\frac{2}{7}\vec{A\Gamma}\right| \Leftrightarrow |\vec{AZ}|=\frac{2}{7}|\vec{A\Gamma}|$

Επομένως τα σημεία Ε και Ζ ανήκουν στις ευθείες ΑΔ και ΑΓ αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:




Έστω $\vec{AB}=\vec{\Delta\Gamma}=\vec{x}$ και $\vec{A\Delta}=\vec{B\Gamma}=\vec{y}$

α) • $\vec{EZ}=\vec{AZ}-\vec{AE}\overset{\text{υπόθ}}{=\!=}\frac{2}{7}\vec{A\Gamma}-\frac{2}{5}\vec{A\Delta}\overset{\text{παρ/μο}}{=\!=}\frac{2}{7}(\vec{AB}+\vec{A\Delta})-\frac{2}{5}\vec{A\Delta}=$
$=\frac{2}{7}\vec{x}+\frac{2}{7}\vec{y}-\frac{2}{5}\vec{y}=\frac{2}{7}\vec{x}+\frac{10}{35}\vec{y}-\frac{14}{35}\vec{y}=\frac{2}{7}\vec{x}-\frac{4}{35}\vec{y}$

• $\vec{ZB}=\vec{AB}-\vec{AZ}\overset{\text{υπόθ}}{=\!=}\vec{AB}-\frac{2}{7}\vec{A\Gamma}\overset{\text{παρ/μο}}{=\!=}\vec{AB}-\frac{2}{7}(\vec{AB}+\vec{A\Delta})=$
$=\vec{x}-\frac{2}{7}\vec{x}-\frac{2}{7}\vec{y}=\frac{5}{7}\vec{x}-\frac{2}{7}\vec{y}$

β) Έχουμε ότι:
$\vec{EZ}=\frac{2}{7}\vec{x}-\frac{4}{35}\vec{y}=\frac{10}{35}\vec{x}-\frac{4}{35}\vec{y}=\frac{2}{5}\left(\frac{5}{7}\vec{x}-\frac{2}{7}\vec{y}\right)=\frac{2}{5}\vec{ZB}$

Από τη σχέση $\vec{EZ}=\frac{2}{5}\vec{ZB}$ προκύπτει ότι $\vec{EZ}\parallel\vec{ZB}$. Όμως, τα διανύσματα $\vec{EZ}$ και $\vec{ZB}$ έχουν κοινό το σημείο Ζ, οπότε είναι συνευθειακά διανύσματα. Άρα και τα σημεία Β, Ε, Ζ είναι συνευθειακά.

ΘΕΜΑ 2 / 18605 ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{OA}=2\vec{i}+4\vec{j}$, $\overrightarrow{OB}=3\vec{i}+\vec{j}$ και $\overrightarrow{O\Gamma}=5\vec{i}-5\vec{j}$, όπου $\vec{i}$ και $\vec{j}$ είναι τα μοναδιαία διανύσματα των αξόνων $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$.

(Μονάδες 12)

β) Να εξετάσετε αν τα σημεία $A$, $B$ και $\Gamma$ μπορεί να είναι κορυφές τριγώνου.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2 18605

ΛΥΣΗ

α) $\vec{OA} = 2\vec{i} + 4\vec{j} = (2,4)$, άρα $A(2,4)$

$\vec{OB} = 3\vec{i} + \vec{j} = (3,1)$, άρα $B(3,1)$

$\vec{O\Gamma} = 5\vec{i} - 5\vec{j} = (5,-5)$, άρα $\Gamma(5,-5)$

β) Θεωρούμε τα διανύσματα:

$\vec{AB} = (3-2, 1-4) = (1,-3)$

$\vec{B\Gamma} = (5-3, -5-1) = (2,-6)$

$\vec{\Gamma A} = (2-5, 4+5) = (-3,9)$

1ος ΤΡΟΠΟΣ

Τα διανύσματα $\vec{AB}, \vec{B\Gamma}, \vec{\Gamma A}$ έχουν αντίστοιχα, συντελεστές διεύθυνσης:

$\lambda_{\vec{AB}} = \frac{-3}{1} = -3$, $\lambda_{\vec{B\Gamma}} = \frac{-6}{2} = -3$, $\lambda_{\vec{\Gamma A}} = \frac{9}{-3} = -3$

$\lambda_{\vec{AB}} = \lambda_{\vec{B\Gamma}} \Leftrightarrow \vec{AB} \parallel \vec{B\Gamma}$

Τα παράλληλα διανύσματα $\vec{AB}$ και $\vec{B\Gamma}$ έχουν κοινό το σημείο Β, οπότε είναι συνευθειακά.

Άρα και τα σημεία Α,Β,Γ είναι συνευθειακά, επομένως δε μπορεί να αποτελούν κορυφές τριγώνου.

2ος ΤΡΟΠΟΣ

$\det(\vec{AB}, \vec{B\Gamma}) = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = -6+6=0$

Άρα $\vec{AB} \parallel \vec{B\Gamma}$ κ.τ.λ.

3ος ΤΡΟΠΟΣ

Τα διανύσματα $\vec{AB}, \vec{B\Gamma}, \vec{\Gamma A}$ έχουν αντίστοιχα, μέτρα:

$|\vec{AB}| = \sqrt{1^2+(-3)^2} = \sqrt{10}$, $|\vec{B\Gamma}| = \sqrt{2^2+(-6)^2} = \sqrt{40}$, $|\vec{\Gamma A}| = \sqrt{(-3)^2+9^2} = \sqrt{90}$

Τα Α,Β,Γ αποτελούν κορυφές τριγώνου, αν και μόνο αν:

$\left||\vec{AB}| - |\vec{B\Gamma}|\right| < |\vec{\Gamma A}| < |\vec{AB}| + |\vec{B\Gamma}| \Leftrightarrow |\sqrt{10} - \sqrt{40}| < \sqrt{90} < \sqrt{10} + \sqrt{40}$

Η σχέση αυτή δεν ισχύει, επομένως τα Α,Β,Γ δεν αποτελούν κορυφές τριγώνου.

ΘΕΜΑ 4 / 18606 ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{OA}=(4,-2)$ και $\overrightarrow{OB}=(1,2)$, όπου $O$ είναι η αρχή των αξόνων.

α) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{OA}$ και $\overrightarrow{OB}$ είναι κάθετα.

(Μονάδες 4)

β) Αν $\Gamma(\alpha,\beta)$ είναι σημείο της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A$ και $B$, τότε:

i) να αποδείξετε ότι: $\overrightarrow{AB}=(-3,4)$ και $\overrightarrow{A\Gamma}=(\alpha-4,\beta+2)$

(Μονάδες 5)

ii) να αποδείξετε ότι: $4\alpha+3\beta=10$

(Μονάδες 6)

iii) αν επιπλέον τα διανύσματα $\overrightarrow{O\Gamma}$ και $\overrightarrow{AB}$ είναι κάθετα, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου $\Gamma$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4 18606

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε ότι:

$\lambda_{\vec{OA}} \cdot \lambda_{\vec{OB}} = \frac{-2}{4} \cdot \frac{2}{1} = -1$, άρα $\vec{OA} \perp \vec{OB}$

β) Αφού $\vec{OA} = (4,-2)$ και $O(0,0)$, τότε $A(4,-2)$

Αφού $\vec{OB} = (1,2)$ και $O(0,0)$, τότε $B(1,2)$

i) • Έχουμε ότι: $\vec{AB} = (1-4, 2+2) = (-3,4)$

• Αφού $\Gamma(\alpha,\beta)$, τότε $\vec{A\Gamma} = (\alpha-4, \beta+2)$

ii) Τα σημεία $A, B, \Gamma$ είναι συνευθειακά, οπότε έχουμε:

$\vec{AB} \parallel \vec{A\Gamma} \Rightarrow \det(\vec{AB}, \vec{A\Gamma}) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ \alpha-4 & \beta+2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$-3(\beta+2) - 4(\alpha-4) = 0 \Rightarrow -3\beta - 6 - 4\alpha + 16 = 0 \Rightarrow$

$-4\alpha - 3\beta = -10 \Rightarrow 4\alpha + 3\beta = 10$

iii) Έχουμε ότι $\vec{O\Gamma} = (\alpha-0, \beta-0) = (\alpha,\beta)$, οπότε:

$\vec{O\Gamma} \perp \vec{AB} \Leftrightarrow \vec{O\Gamma} \cdot \vec{AB} = 0 \Leftrightarrow (\alpha,\beta)\cdot(-3,4) = 0 \Leftrightarrow -3\alpha + 4\beta = 0$

Τα $\alpha, \beta$ προκύπτουν από τη λύση του συστήματος:

$$\begin{cases} 4\alpha + 3\beta = 10 \\ -3\alpha + 4\beta = 0 \end{cases}$$

$D = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 16+9 = 25$, $D_\alpha = \begin{vmatrix} 10 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 40-0 = 40$, $D_\beta = \begin{vmatrix} 4 & 10 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = 0+30 = 30$

οπότε: $\alpha = \frac{D_\alpha}{D} = \frac{40}{25} = \frac{8}{5}$, $\beta = \frac{D_\beta}{D} = \frac{30}{25} = \frac{6}{5}$

Άρα $\Gamma\left(\frac{8}{5}, \frac{6}{5}\right)$

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ 4 / 18609

Σε τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι $\overrightarrow{AB}=(\lambda,\lambda+1)$, $\overrightarrow{A\Gamma}=(3\lambda,\lambda-1)$, όπου $\lambda\neq 0$ και $\lambda\neq -2$, και $M$ είναι το μέσο της πλευράς $Β\Gamma$

α) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AM}=(2\lambda,\lambda)$

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε την τιμή του $\lambda$ για την οποία το διάνυσμα $\overrightarrow{AM}$ είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{\alpha}=\left(\frac{2}{\lambda},-\lambda\right)$

(Μονάδες 8)

γ) Για την τιμή του $\lambda$ που βρήκατε στο ερώτημα β), να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $ΑΒΓ$

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4 18609

ΛΥΣΗ

α) Είναι

$$\vec{AM} = \frac{\vec{AB}+\vec{A\Gamma}}{2} = \frac{(\lambda,\lambda+1)+(3\lambda,\lambda-1)}{2} = \frac{1}{2}(4\lambda,2\lambda) = (2\lambda,\lambda)$$

β) $\vec{AM} \perp \vec{\alpha} \Leftrightarrow \vec{AM}\cdot\vec{\alpha} = 0 \Leftrightarrow (2\lambda,\lambda)\cdot\left(\frac{2}{\lambda},-\lambda\right)=0 \Leftrightarrow$

$4-\lambda^2=0 \Leftrightarrow (2-\lambda)(2+\lambda)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2-\lambda=0 \\ \text{ή} \\ 2+\lambda=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda=2 \text{ δεκτό} \\ \text{ή} \\ \lambda=-2 \text{ απορ} \end{cases}$

Άρα $\lambda=2$

γ) Με $\lambda=2$ έχουμε: $\vec{AB}=(2,3)$, $\vec{A\Gamma}=(6,1)$

Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ ισούται με:

$(AB\Gamma) = \frac{1}{2}\cdot\left|\det(\vec{AB},\vec{A\Gamma})\right|$

Είναι $\det(\vec{AB},\vec{A\Gamma}) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = 2-18=-16$

Άρα $(AB\Gamma) = \frac{1}{2}\cdot|-16| = \frac{1}{2}\cdot 16 = 8$ τ.μ.

ΘΕΜΑ 4 / 18616 ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ για τα οποία ισχύουν:

$|\vec{\alpha}|=2$, $|\vec{\beta}|=1$, $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=60^\circ$ και $\vec{\gamma}=\frac{\kappa}{2}\cdot\vec{\alpha}-\vec{\beta}$, όπου $\kappa\in\mathbb{R}$

α) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$

(Μονάδες 3)

β) Αν ισχύει $\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}=\kappa$, τότε:

i) να αποδείξετε ότι: $\kappa=-2$

(Μονάδες 6)

ii) να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$

(Μονάδες 8)

iii) να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $3\vec{\alpha}+2\vec{\gamma}$ και $\vec{\beta}-\vec{\gamma}$ είναι κάθετα.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4 18616

ΛΥΣΗ

α) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=2\cdot1\cdot\sigma\upsilon\nu60^\circ=2\cdot\frac{1}{2}=1$

β) Ισχύει ότι: $\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}=\kappa$ (1)

i) Έχουμε ότι:

$\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}=\kappa \Longrightarrow \vec{\beta}\left(\frac{\kappa}{2}\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)=\kappa \Longrightarrow \frac{\kappa}{2}\vec{\alpha}\vec{\beta}-\vec{\beta}^2=\kappa \overset{(\alpha)}{\Longrightarrow}$

$\frac{\kappa}{2}\cdot1-|\vec{\beta}|^2=\kappa \Longrightarrow \frac{\kappa}{2}-1^2=\kappa \Longrightarrow \kappa-2=2\kappa \Longrightarrow \kappa=-2$

ii) Με $\kappa=-2$ έχουμε ότι:

$\vec{\beta}\vec{\gamma}=-2$ και $\vec{\gamma}=\frac{-2}{2}\vec{\alpha}-\vec{\beta} \Longleftrightarrow \vec{\gamma}=-\vec{\alpha}-\vec{\beta}$

Έχουμε ότι:

$|\vec{\gamma}|^2=|-\vec{\alpha}-\vec{\beta}|^2=|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|^2=(\vec{\alpha}+\vec{\beta})^2=\vec{\alpha}^2+2\vec{\alpha}\vec{\beta}+\vec{\beta}^2\overset{(\alpha)}{=}$

$=|\vec{\alpha}|^2+2\cdot1+|\vec{\beta}|^2=2^2+2+1^2=7$

Οπότε $|\vec{\gamma}|^2=7 \Longleftrightarrow |\vec{\gamma}|=\sqrt{7}$

iii) Έχουμε ότι:

$(3\vec{\alpha}+2\vec{\gamma})(\vec{\beta}-\vec{\gamma})=3\vec{\alpha}\vec{\beta}-3\vec{\alpha}\vec{\gamma}+2\vec{\beta}\vec{\gamma}-2\vec{\gamma}^2\overset{(\alpha),(1)}{=}$

$=3\cdot1-3\vec{\alpha}\vec{\gamma}+2(-2)-2|\vec{\gamma}|^2\overset{(ii)}{=}$

$=3-3\vec{\alpha}\vec{\gamma}-4-2\cdot7=-15-3\vec{\alpha}\vec{\gamma}$

Όμως:

$\vec{\alpha}\vec{\gamma}=\vec{\alpha}(-\vec{\alpha}-\vec{\beta})=-\vec{\alpha}^2-\vec{\alpha}\vec{\beta}=-|\vec{\alpha}|^2-1=-2^2-1=-5$

Επομένως:

$(3\vec{\alpha}+2\vec{\gamma})(\vec{\beta}-\vec{\gamma})=-15-3(-5)=-15+15=0 \Longleftrightarrow$

$(3\vec{\alpha}+2\vec{\gamma})\perp(\vec{\beta}-\vec{\gamma})$

ΘΕΜΑ 4 / 18618 ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

α) Να εξετάσετε πότε ισχύει καθεμιά από τις ισότητες: $|\vec{u}+\vec{v}|=|\vec{u}|+|\vec{v}|$ και $|\vec{u}+\vec{v}|=\left||\vec{u}|-|\vec{v}|\right|$

(Μονάδες 10)

β) Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ για τα οποία ισχύουν: $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0}$ και $\frac{|\vec{\alpha}|}{3}=\frac{|\vec{\beta}|}{4}=\frac{|\vec{\gamma}|}{7}$.

i) Να αποδείξετε ότι: $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}$ και $\vec{\beta}\uparrow\downarrow\vec{\gamma}$

(Μονάδες 8)

ii) Να αποδείξετε ότι: $7\vec{\alpha}+3\vec{\gamma}=\vec{0}$

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4 18618

ΛΥΣΗ

α) • $|\vec{u}+\vec{v}|=|\vec{u}|+|\vec{v}| \overset{\text{Μ.Α.Μ.}}{\Longleftrightarrow} |\vec{u}+\vec{v}|^2=(|\vec{u}|+|\vec{v}|)^2 \Leftrightarrow$

$(\vec{u}+\vec{v})^2=|\vec{u}|^2+2|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|+|\vec{v}|^2 \Leftrightarrow \vec{u}^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2=\vec{u}^2+2|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|+\vec{v}^2 \Leftrightarrow$

$2\vec{u}\cdot\vec{v}=2|\vec{u}|\cdot|\vec{v}| \Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}| \Leftrightarrow \vec{u}\uparrow\uparrow\vec{v}$

• $|\vec{u}+\vec{v}|=||\vec{u}|-|\vec{v}|| \overset{\text{Μ.Α.Μ.}}{\Longleftrightarrow} |\vec{u}+\vec{v}|^2=||\vec{u}|-|\vec{v}||^2 \Leftrightarrow$

$(\vec{u}+\vec{v})^2=(|\vec{u}|-|\vec{v}|)^2 \Leftrightarrow \vec{u}^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2=|\vec{u}|^2-2|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|+|\vec{v}|^2 \Leftrightarrow$

$2\vec{u}\cdot\vec{v}=-2|\vec{u}|\cdot|\vec{v}| \Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v}=-|\vec{u}||\vec{v}| \Leftrightarrow \vec{u}\uparrow\downarrow\vec{v}$

β)

i) • 1η ΕΠΙΛΟΓΗ

Ισχύει ότι: $\dfrac{|\vec{\alpha}|}{3}=\dfrac{|\vec{\beta}|}{4}=\dfrac{|\vec{\gamma}|}{7}=\dfrac{|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|}{3+4}=\dfrac{|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|}{7}$

Οπότε: $\dfrac{|\vec{\gamma}|}{7}=\dfrac{|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|}{7} \Longrightarrow |\vec{\gamma}|=|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|$ (1)

2η ΕΠΙΛΟΓΗ

Θέτουμε: $\dfrac{|\vec{\alpha}|}{3}=\dfrac{|\vec{\beta}|}{4}=\dfrac{|\vec{\gamma}|}{7}=\lambda,\ \lambda\geq 0$, άρα $|\vec{\alpha}|=3\lambda, |\vec{\beta}|=4\lambda, |\vec{\gamma}|=7\lambda$

Οπότε: $|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|=3\lambda+4\lambda=7\lambda=|\vec{\gamma}|$ (1)

Επίσης έχουμε:

$\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0} \Longrightarrow \vec{\alpha}+\vec{\beta}=-\vec{\gamma} \Longrightarrow |\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=|-\vec{\gamma}| \Longrightarrow |\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=|\vec{\gamma}|$ (2)

από (1), (2) προκύπτει ότι:

$|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|$, οπότε έχουμε ότι $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}$

• λόγω (i) υπάρχει $\rho, \rho\geq 0$, ώστε $\vec{\alpha}=\rho\vec{\beta}$ (3)

οπότε από την υπόθεση έχουμε:

$\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0} \overset{(3)}{\Longrightarrow} \rho\vec{\beta}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0} \Longrightarrow (\rho+1)\vec{\beta}=-\vec{\gamma} \Longrightarrow$

$\vec{\gamma}=-(\rho+1)\vec{\beta} \xrightarrow{-(\rho+1)<0} \vec{\gamma}\uparrow\downarrow\vec{\beta}$

ΘΕΜΑ 4 18618

ΛΥΣΗ (συνέχεια)

ii) Έχουμε ότι $\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta}$ και $\vec{\gamma} \uparrow\downarrow \vec{\beta}$, άρα $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\gamma}$

Οπότε:

$$\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\gamma} \Longrightarrow 7\vec{\alpha} \uparrow\downarrow 3\vec{\gamma} \xrightarrow{(\alpha)} |7\vec{\alpha}+3\vec{\gamma}| = \left||7\vec{\alpha}|-|3\vec{\gamma}|\right| \Longrightarrow$$

$$|7\vec{\alpha}+3\vec{\gamma}| = \left|7|\vec{\alpha}|-3|\vec{\gamma}|\right| \xrightarrow{\text{2η επιλογή}} |7\vec{\alpha}+3\vec{\gamma}| = |7\cdot 3\lambda - 3\cdot 7\lambda| \Longrightarrow$$

$$|7\vec{\alpha}+3\vec{\gamma}| = 0 \Longrightarrow 7\vec{\alpha}+3\vec{\gamma} = \vec{0}$$