ΘΕΜΑ 2 /5601

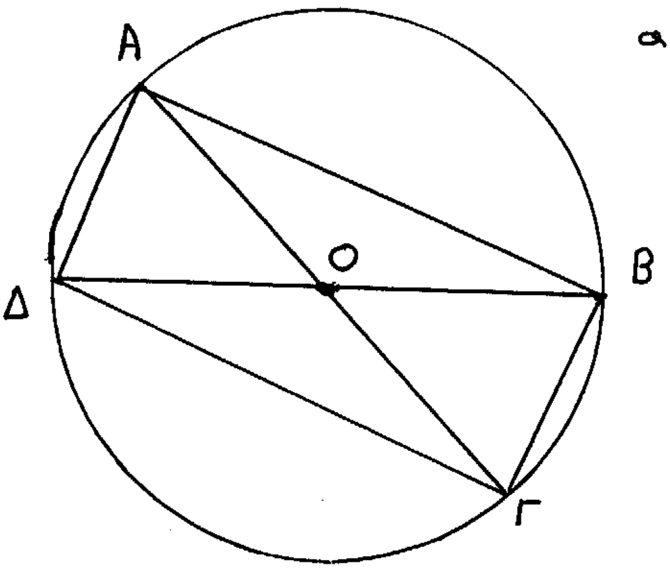
Σε κύκλο κέντρου Ο φέρουμε τις διαμέτρους του ΑΓ και ΒΔ.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 13)

β) Ποια σχέση πρέπει να έχουν οι διάμετροι ΑΓ και ΒΔ ώστε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ να είναι τετράγωνο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)

5601

ΘΕΜΑ 2



α) Αφού το Ο είναι κέντρο του κύκλου και οι ΑΓ, ΒΔ είναι διάμετροι του κύκλου προκύπτει ότι το Ο είναι μέσο του ΑΓ και του ΒΔ.

Άρα οι διαγώνιοι ΑΓ και ΒΔ του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ διχοτομούνται στο Ο. Επομένως το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο. Ακόμη $\hat{\Delta A B} = 90°$ ως εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει στο ημικύκλιο $\overset{\frown}{\Delta B}$. Επομένως το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο.

β) Για να είναι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ τετράγωνο θα πρέπει οι διαγώνιοι ΑΓ και ΒΔ να τέμνονται κάθετα.

Έτσι αφού το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, έχει μία ορθή γωνία και οι διαγώνιοί του είναι κάθετες, προκύπτει ότι το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο.

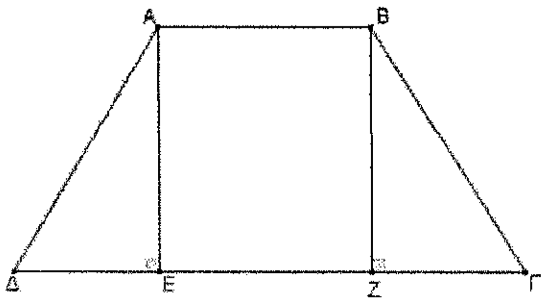
ΘΕΜΑ 2 / 3415

Θεωρούμε ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ). Φέρουμε τα ύψη του ΑΕ και ΒΖ.

Να αποδείξετε ότι:

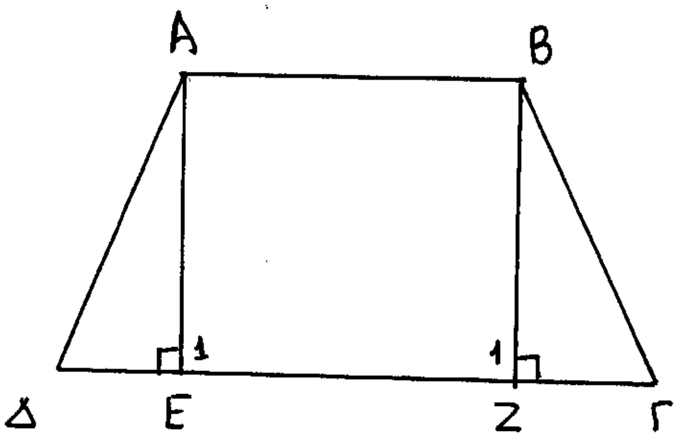
α) ΔΕ=ΓΖ. (Μονάδες 12)

β) ΑΖ=ΒΕ. (Μονάδες 13)



3415

ΘΕΜΑ 2



α) Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΕ και ΒΖΓ

- $A\Delta = B\Gamma$ επειδή το ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο.
- $\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}$ επειδή το ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Άρα από κριτήριο ισότητας ορθογωνίων τριγώνων τα τρίγωνα είναι ίσα. Άρα και τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους είναι ίσα. Συνεπώς $\Delta E = \Gamma Z$.

β) $AB \parallel \Gamma\Delta$: $B\hat{A}E + \hat{E}_1 = 180^\circ$

$B\hat{A}E + 90^\circ = 180^\circ$

$B\hat{A}E = 90^\circ$

επειδή $B\hat{A}E$ και $\hat{E}_1$ είναι εντός και επί τ' αυτά γωνίες.

Οπότε:

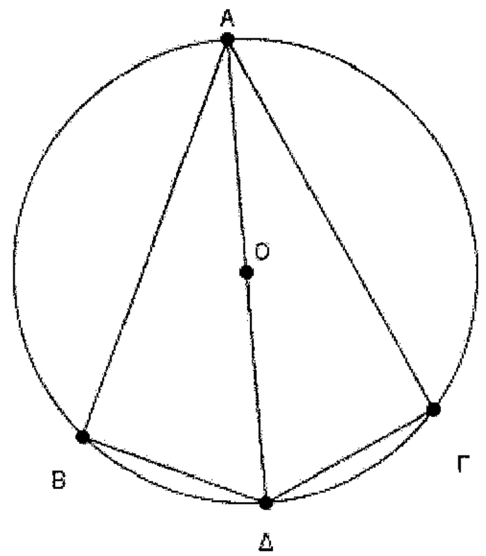
$B\hat{A}E = \hat{E}_1 = \hat{Z}_1 = 90^\circ$. Άρα το ΒΑΕΖ είναι ορθογώνιο. Έτσι προκύπτει ότι οι διαγώνιοί του ΑΖ και ΒΕ είναι ίσες.

ΘΕΜΑ 2 / 5603

Έστω κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ. Αν η διάμετρος ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας ΒΑΓ, να αποδείξετε ότι:

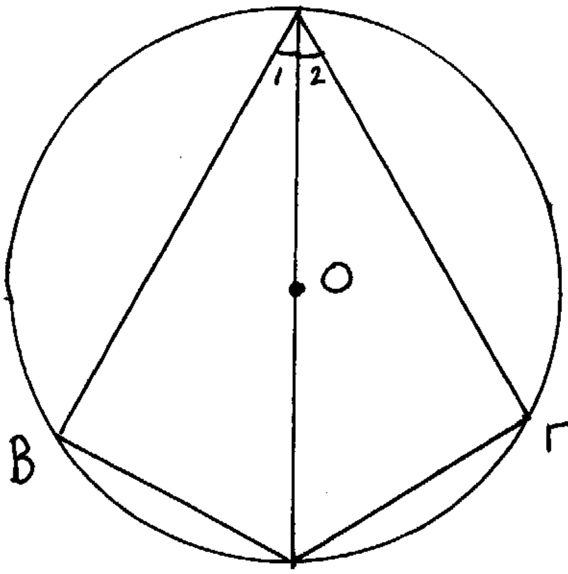
α) Τα τόξα ΒΔ και ΔΓ είναι ίσα. (Μονάδες 10)

β) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ είναι ίσα. (Μονάδες 15)



5603

ΘΕΜΑ 2



α) Αφού η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $B\hat{A}\Gamma$ προκύπτει ότι $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$.

Άρα και $\overset{\frown}{B\Delta} = \overset{\frown}{\Delta\Gamma}$ αφού οι εγγεγραμμένες γωνίες $\hat{A}_1$ και $\hat{A}_2$ που βαίνουν σ' αυτά τα τόξα είναι μεταξύ τους ίσες.

β) Ισχυει: $A\hat{B}\Delta = 90^\circ$ και $A\hat{\Gamma}\Delta = 90^\circ$ επειδή οι $A\hat{B}\Delta$, $A\hat{\Gamma}\Delta$ είναι γωνίες εγγεγραμμένες που βαίνουν σε ημικυκλια.

Επομένως συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ.

- ΑΔ κοινή πλευρά
- $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα.

ΘΕΜΑ 4 /3817

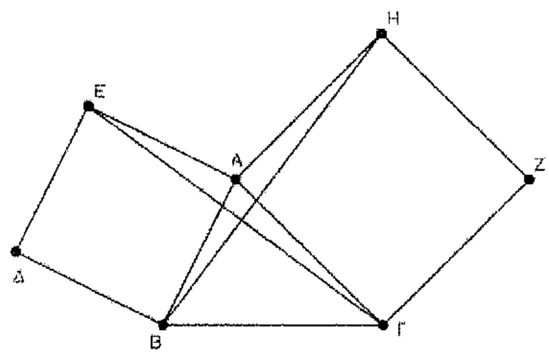
Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και στο εξωτερικό του σχηματίζονται τα τετράγωνα ΑΒΔΕ και ΑΓΖΗ.

Να αποδείξετε ότι:

α) $\mathrm{E}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{H} = \mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Gamma + \mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{B}$ (Μονάδες 8)

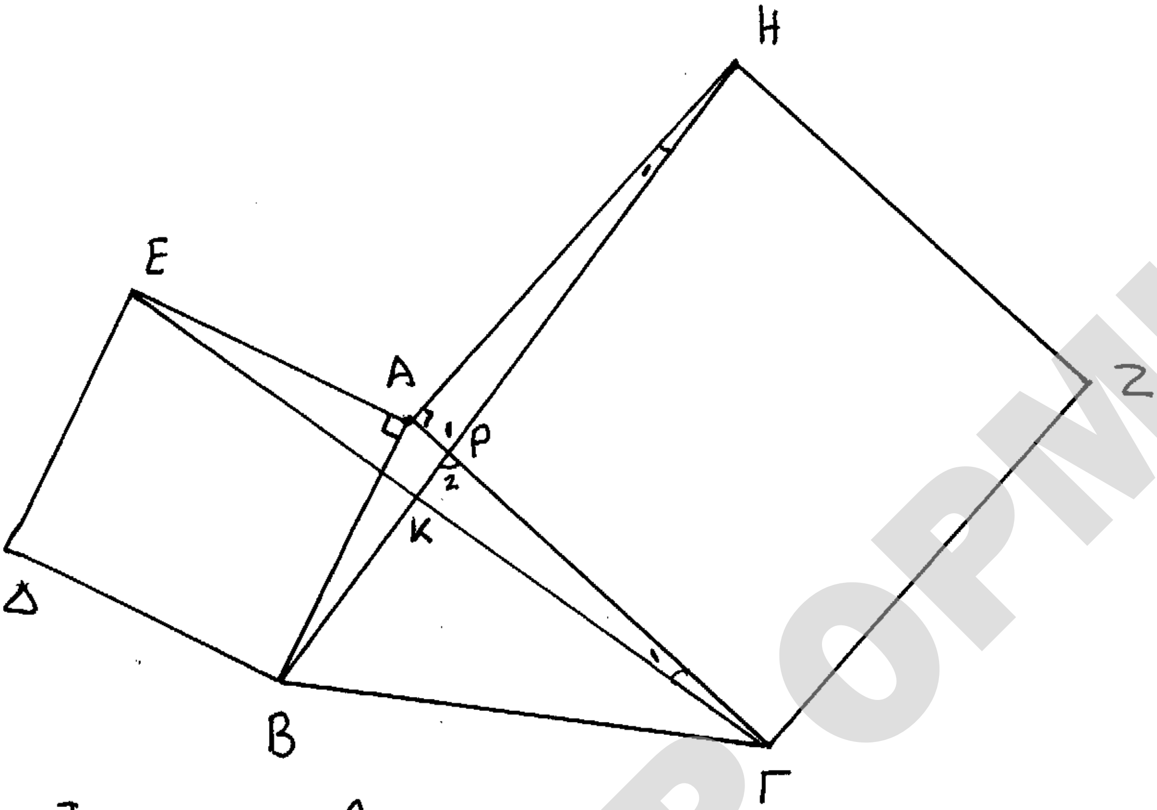
β) ΕΓ = ΒΗ (Μονάδες 9)

γ) Η ΕΓ είναι κάθετη στη ΒΗ. (Μονάδες 8)



3817 (Σ1)

ΘΕΜΑ 4



α) Ισχύει: $E\hat{A}H + E\hat{A}B + B\hat{A}\Gamma + \Gamma\hat{A}H = 360^\circ$

$$E\hat{A}H + 90^\circ + B\hat{A}\Gamma + 90^\circ = 360^\circ$$

$$\boxed{E\hat{A}H = 180^\circ - B\hat{A}\Gamma} \quad (1)$$

Στο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει:

$$B\hat{A}\Gamma + A\hat{B}\Gamma + A\hat{\Gamma}B = 180^\circ$$

$$\boxed{A\hat{B}\Gamma + A\hat{\Gamma}B = 180^\circ - B\hat{A}\Gamma} \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει

$$E\hat{A}H = A\hat{B}\Gamma + A\hat{\Gamma}B$$

β) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΕΑΓ και ΒΑΗ:

- ΕΑ = ΑΒ ως πλευρές του τετραγώνου ΑΕΔΒ.
- ΑΓ = ΑΗ ως πλευρές του τετραγώνου ΑΗΖΓ

$$\left.\begin{aligned} E\hat{A}\Gamma &= E\hat{A}B + B\hat{A}\Gamma = 90^\circ + B\hat{A}\Gamma \\ B\hat{A}H &= H\hat{A}\Gamma + B\hat{A}\Gamma = 90^\circ + B\hat{A}\Gamma \end{aligned}\right\} \text{Άρα } E\hat{A}\Gamma = B\hat{A}H$$

3817 <u>ΘΕΜΑ 4</u>

Σ2

Οπότε από το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα. Άρα και τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους είναι ίσα. Άρα $ΕΓ = ΒΗ$ και

$$\hat{H}_1 = \hat{\Gamma}_1 = \varphi$$

γ) Στο τρίγωνο ΑΡΗ ισχύει:

$$\hat{H}_1 + \hat{P}_1 + H\hat{A}P = 180^\circ$$

$$\varphi + \hat{P}_1 + 90^\circ = 180^\circ$$

$$\hat{P}_1 = 90^\circ - \varphi$$

Όμως $\hat{P}_1 = \hat{P}_2$ ως κατακορυφήν γωνίες.

Άρα $\hat{P}_2 = 90 - \varphi$.

Στο τρίγωνο ΚΡΓ ισχύει:

$$P\hat{K}\Gamma + \hat{P}_2 + \hat{\Gamma}_1 = 180^\circ$$

$$P\hat{K}\Gamma + (90 - \varphi) + \varphi = 180^\circ$$

$$P\hat{K}\Gamma = 180^\circ - 90^\circ$$

$$P\hat{K}\Gamma = 90^\circ$$

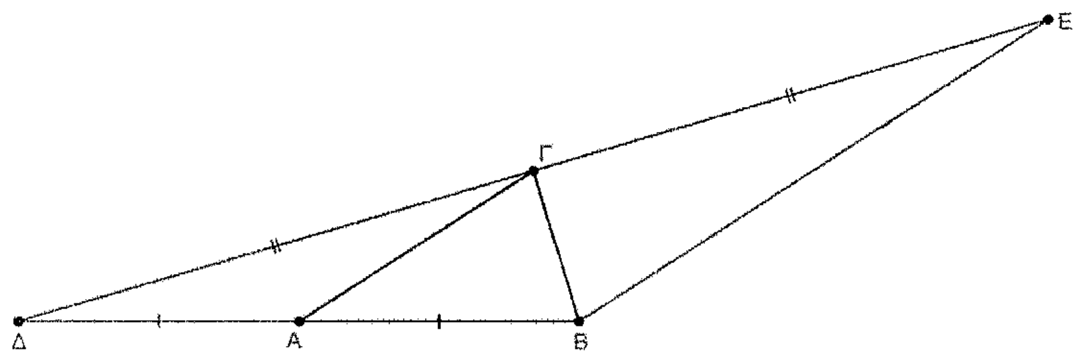
Επομένως $ΕΓ \perp ΒΗ$.

ΘΕΜΑ 2 /2852

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ). Στην προέκταση της ΒΑ (προς το μέρος της κορυφής Α) παίρνουμε σημείο Δ ώστε ΑΒ = ΑΔ και στην προέκταση της ΔΓ (προς το μέρος της κορυφής Γ) παίρνουμε σημείο Ε ώστε ΔΓ = ΓΕ.

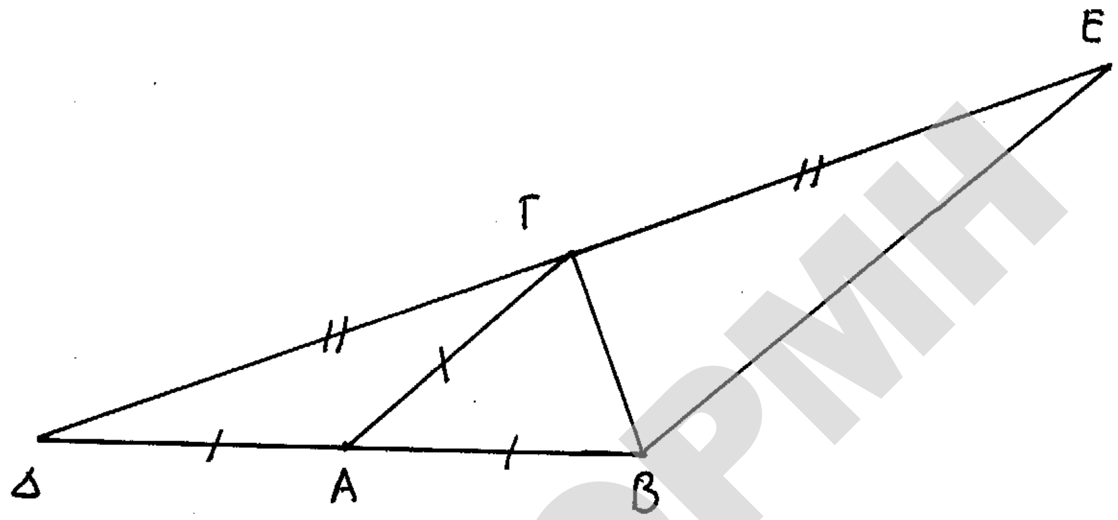
α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΔΓΒ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 12)

β) Να δείξετε ότι ΒΕ//ΑΓ και $ΑΓ = \frac{ΒΕ}{2}$. (Μονάδες 13)



2852

ΘΕΜΑ 2



α) Στο τρίγωνο ΔΓΒ για την διάμεσο ΓΑ ισχύει : $ΓΑ = ΔΑ = ΑΒ = \frac{ΔΒ}{2}$. Άρα $Δ\hat{Γ}Β = 90^\circ$ οπότε το τρίγωνο ΔΓΒ είναι ορθογώνιο.

β) Στο τρίγωνο ΔΒΕ επειδή το Α είναι μέσο του ΔΒ και το Γ είναι μέσο του ΔΕ προκύπτουν ότι $ΑΓ // ΒΕ$ και $ΑΓ = \frac{ΒΕ}{2}$.

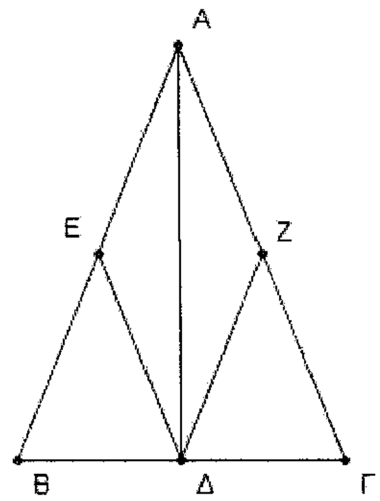
ΘΕΜΑ 2 /3416

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ), το ύψος του ΑΔ και τα μέσα Ε και Ζ των πλευρών του ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.

Να αποδείξτε ότι:

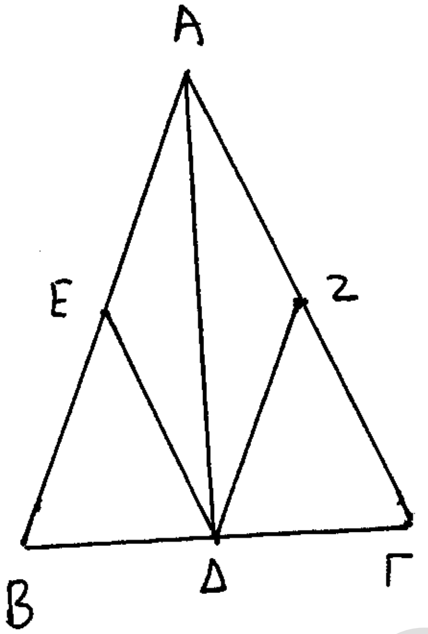
α) Τα τρίγωνα ΒΔΕ και ΓΔΖ είναι ίσα. (Μονάδες 15)

β) Το τετράπλευρο ΑΖΔΕ είναι ρόμβος. (Μονάδες 10)



3416

ΘΕΜΑ 2



α) Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ επειδή το ΑΔ είναι ύψος στη βάση του, προκύπτει ότι το ΑΔ είναι διάμεσος και διχοτόμος.

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΒΔΕ και ΓΔΖ:

- ΒΔ = ΔΓ επειδή το ΑΔ είναι διάμεσος στο ΒΓ.
- ΒΕ = ΓΖ ως μισά των ίσων τμημάτων ΑΒ = ΑΓ.
- $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ ως προσκείμενες γωνίες στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ.

Άρα από το κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα είναι ίσα.

β) Στο τρίγωνο ΑΒΓ επειδή το Ζ είναι μέσο του ΑΓ και το Δ είναι μέσο του ΒΓ προκύπτει ότι $\Delta Z = \frac{AB}{2} = AE$ και $\Delta Z \parallel AB$.
Άρα $\Delta Z \parallel= AE$. Άρα το ΑΖΔΕ είναι παραλληλόγραμμο και επειδή η διαγώνιος ΑΔ είναι διχοτόμος της $\hat{A}$ προκύπτει ότι το ΑΖΔΕ είναι ρόμβος.

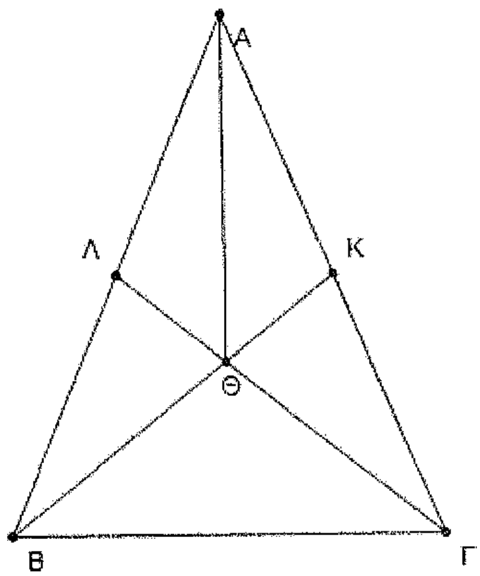
ΘΕΜΑ 2 /5607

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) και τις διαμέσους του ΒΚ και ΓΛ, οι οποίοι τέμνονται στο σημείο Θ.

Να αποδείξετε ότι:

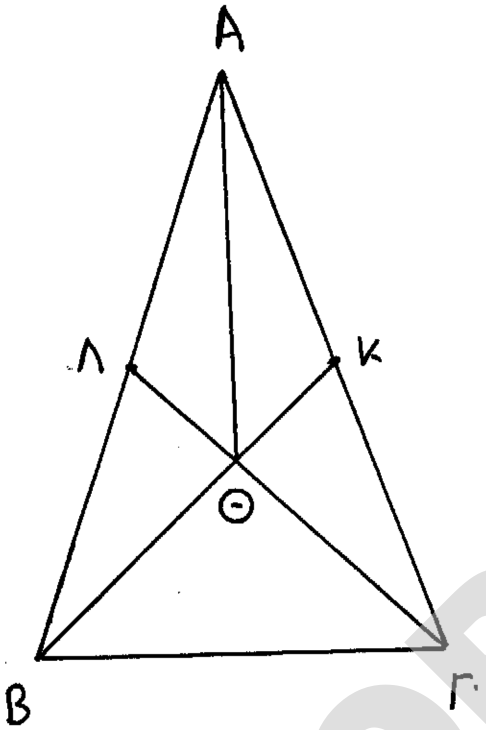
α) Οι διάμεσοι ΒΚ και ΓΛ είναι ίσες. (Μονάδες 12)

β) Τα τρίγωνα ΑΒΘ και ΑΓΘ είναι ίσα (Μονάδες 13)



5607

ΘΕΜΑ 2



α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΚ και ΑΓΛ :

- ΑΒ=ΑΓ (υπόθεση)
- $\hat{A}$ κοινή γωνία
- ΑΚ=ΑΛ ως μισά των ίσων τμημάτων ΑΓ=ΑΒ αντίστοιχα.

Άρα από το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα. Άρα και τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους είναι ίσα.
Άρα ΒΚ=ΓΛ.

β) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΘ και ΑΘΓ :

- ΑΘ κοινή πλευρά
- ΑΒ=ΑΓ.
- $B\Theta=\frac{2}{3}BK$ αφού το Θ είναι βαρύκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ.

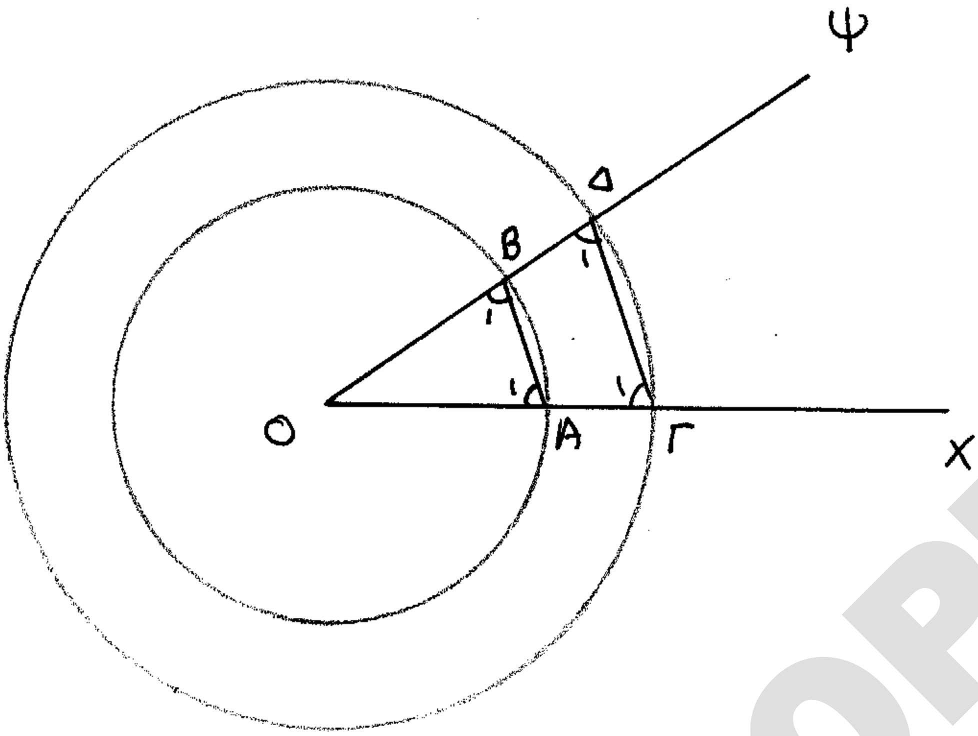
και $\Theta\Gamma=\frac{2}{3}\Gamma\Lambda$ αφού το Θ είναι βαρύκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ. Και επειδή ΒΚ=ΓΛ προκύπτει ότι ΒΘ=ΘΓ. Άρα από ΠΠΠ τα τρίγωνα ΑΒΘ και ΑΓΘ είναι ίσα.

ΘΕΜΑ 2 /2853

Ένας μαθητής της Α' λυκείου βρήκε έναν τρόπο να κατασκευάζει παράλληλες ευθείες. Στην αρχή σχεδιάζει μια τυχαία γωνία ΧΟΨ . Στη συνέχεια με κέντρο την κορυφή Ο της γωνίας σχεδιάζει δυο ομόκεντρους διαφορετικούς κύκλους με τυχαίες ακτίνες. Ο μικρότερος κύκλος τέμνει τις πλευρές ΟΧ και ΟΨ της γωνίας στα σημεία Α, Β αντίστοιχα και ο μεγαλύτερος στα σημεία Γ, Δ. Ισχυρίζεται ότι οι ευθείες που ορίζονται από τις χορδές ΑΒ και ΓΔ είναι παράλληλες. Μπορείτε να το δικαιολογήσετε; (Μονάδες 25)

2853

ΘΕΜΑ 2



- Ισχυει $OA = OB$ ως ακτίνες του κύκλου (O, OA). Άρα το τρίγωνο OAB είναι ισοσκελές με $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$. Άρα στο τρίγωνο OAB ισχύει: $\hat{O} + \hat{A}_1 + \hat{B}_1 = 180° \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \hat{O} + \hat{A}_1 + \hat{A}_1 = 180° \Leftrightarrow 2\hat{A}_1 = 180° - \hat{O} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\hat{A}_1 = 90° - \frac{\hat{O}}{2}} \quad (1)$$

- Ισχύει $O\Gamma = O\Delta$ ως ακτίνες του κυκλου $(O, O\Gamma)$. Αρα το τρίγωνο $O\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές με $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Delta}_1$. Αρα στο τρίγωνο $O\Gamma\Delta$ ισχύει:

$$\hat{O} + \hat{\Gamma}_1 + \hat{\Delta}_1 = 180° \Leftrightarrow \hat{O} + \hat{\Gamma}_1 + \hat{\Gamma}_1 = 180° \Leftrightarrow$$

$$\hat{O} + 2\hat{\Gamma}_1 = 180° \Leftrightarrow 2\hat{\Gamma}_1 = 180° - \hat{O} \Leftrightarrow \boxed{\hat{\Gamma}_1 = 90° - \frac{\hat{O}}{2}} \quad (2)$$

Απο τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει ότι $\hat{\Gamma}_1 = \hat{A}_1$

Άρα $AB \parallel \Gamma\Delta$ αφού τεμνόμενες απο την $O\Gamma$ σχηματίζουν τις εντός, εκτός και επί τ'αυτά γωνίες $\hat{A}_1, \hat{\Gamma}_1$ ίσες.